Slovenská technická univerzita v Bratislave
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra telekomunikácií

Výpočty na homogénnych vedeniach

ADSS1
AR 2009/2010, zimný

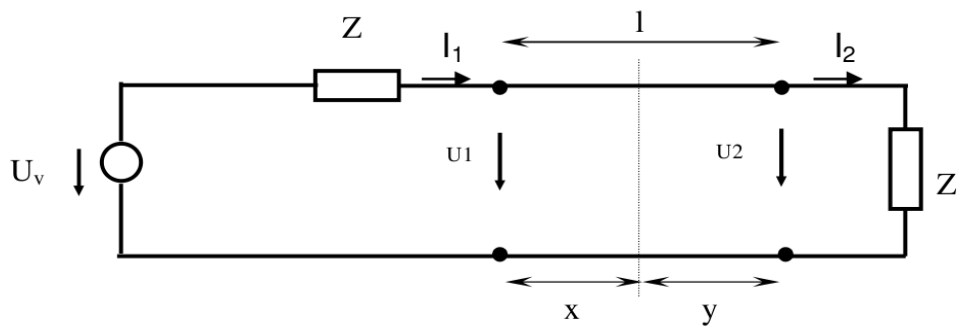
Grenčík Róbert
TLK 7
meracia skupina 12

Úlohy

1. Vypočítajte vlnovú impedanciu $\mathcal{Z} = Z \cdot e^{j\varphi_z}$, špecifickú konštantu tlmenia α, špecifickú konštantu fázového posuvu β a fázovú rýchlosť v_f pre zadané hodnoty homogénneho vedenia : diaľkový kábel DK Ø 1,2 Cu XV, $C = 33\text{nF}/km,\ L = 0{,}7\,mH/km$

2. Vypočítané hodnoty závislosti $Z = f_1(\omega),\ \varphi_Z = f_2(\omega),\ \Re\{Z\} = f_3(\omega),\ \Im\{Z\} = f_4(\omega),$ $\alpha = f_5(\omega),\ \beta = f_6(\omega),\ v_f = f_7(\omega)$ spracujte graficky.

3. Pre vypočítané hodnoty Z a γ z úlohy 1:
   a) zistite vektor napätia $\mathcal{U}(x)$ a okamžité hodnoty *u(x)* pre $f = 25\text{kHz},\ t = 0{,}7\,s$ a vzdialenosť $x = 0;\ 0{,}5;\ 1;\ \ldots\ 7\text{km}$, ak je modul napätia $U_v = 9\text{V}$ a počiatočná fáza $\varphi_v = 35°$.



   Dané vedenie je impedančne prispôsobené tak, že je na ňom len postupujúca vlna.

   b) Pre hodnoty vektora napätia $\mathcal{U}(x)$ zostrojte hodograf a k nemu prislúchajúci priebeh okamžitých hodnôt *u(x)*.

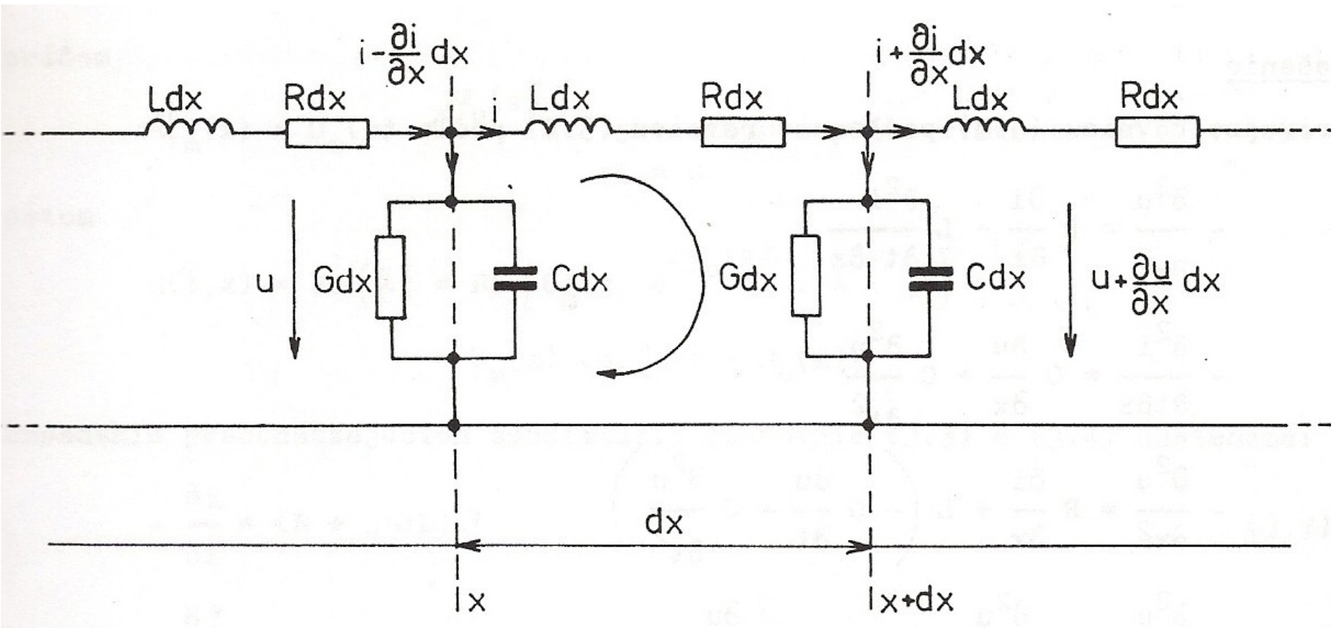
4. Vypočítajte impedanciu nakrátko $\mathcal{Z}_k$ a impedanciu naprázdno $\mathcal{Z}_0$ pre dĺžku $y = 5\text{km}$ a zostrojte grafy závislostí
   $Z_k = f_8(\omega),\ \varphi_k = f_9(\omega),\ Z_0 = f_{10}(\omega),\ \varphi_0 = f_{11}(\omega),\ Z_{vl} = f_{12}(\omega),\ \varphi_{vl} = f_{13}(\omega).$

Teoretický úvod

Homogénnym vedením nazývame také vedenie, ktoré má v každom svojom ľubovolne krátkom elemente rovnaké vlastnosti, ako na celej svojej dĺžke. Vyjadrujeme ich pomocou tzv. *primárnych konštánt:*

R – odpor vedenia na jednotku dĺžky
G – izolačná vodivosť na jednotku dĺžky
L – indukčnosť vedenia na jednotku dĺžky
C – kapacita vedenia na jednotku dĺžky

pričom jednotku dĺžky treba voliť vždy tak, aby v porovnaní s najkratšou vlnovou dĺžkou, ktorá sa pri použití vedenia v praxi ešte vyskytuje, bola zanedbateľne malá.
Celé vedenie možno rozdeliť na elementárne úseky dĺžky dx. Náhradná schéma homogénneho vedenia v nesymetrickom tvare dĺžky dx potom bude :



Označíme si v mieste x + dx napätie $u+\dfrac{\partial u}{\partial x}dx$ a prúd $i+\dfrac{\partial i}{\partial x}dx$. Treba si uvedomiť, že napätie **u** a prúd **i** sú funkciou vzdialenosti **x** od začiatku vedenia a času **t**.

$$u=f(x,t)$$
$$i=f(x,t)$$

Preto je potrebné skúmať závislosť napätia a prúdu od vzdialenosti **x** od začiatku vedenia v danom časovom okamihu **t**. Vychádzajúc z aplikácie I. a II. Kirchhoffovho zákona možno pre vyššie uvedenú schému homogénneho vedenia napísať sústavu rovníc :

$$u+\frac{\partial u}{\partial x}dx-u+R.i.dx+L.\frac{\partial i}{\partial t}dx=0$$
$$i-\frac{\partial i}{\partial x}dx-i-G.u.dx-C.\frac{\partial u}{\partial t}dx=0$$

Úpravou týchto rovníc dostaneme parciálne diferenciálne rovnice:

$$-\frac{\partial u}{\partial x}=R.i+L.\frac{\partial i}{\partial t} \qquad (1)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x}=G.u+C.\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (2)$$

,

ktorých riešením dostaneme rovnice označované ako *telegrafné rovnice*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=L.C.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+(L.G+R.C).\frac{\partial u}{\partial t}+R.G.u$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=L.C.\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+(L.G+R.C).\frac{\partial i}{\partial t}+R.G.i$$

Pri riešení rovníc (1) a (2) budeme predpokladať vedenie pri harmonickom napájaní a ustálenom stave. S výhodou použijeme pravidlá symbolického komplexného počtu a zavedeného označenia:

$$u \equiv u(t,x) \quad \rightarrow \quad \mathcal{U}_m(x).e^{j.\omega.t}=\mathcal{U}$$

$$i \equiv i(t,x) \quad \rightarrow \quad I_m(x).e^{j.\omega.t}=I$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial i}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial I}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow j.\omega.\mathcal{U} \qquad\qquad \frac{\partial i}{\partial t} \rightarrow j.\omega.I$$

Dosadením predchádzajúcich substitúcií do rovníc (1) a (2) dostávame:

$$-\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}=(R+j.\omega.L).I$$

$$-\frac{\partial I}{\partial x}=(G+j.\omega.C).\mathcal{U}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2}=(R+j.\omega.L).(G+j.\omega.C).\mathcal{U}$$

Výraz $(R+j.\omega.L).(G+j.\omega.C)=\gamma^2$, kde γ je špecifická komplexná miera prenosu,

$$\gamma=\alpha+j.\beta \quad ,$$

ktorej reálna časť α vyjadruje špecifickú vlnovú mieru tlmenia a jej imaginárna imaginárna časť β vyjadruje špecifickú vlnovú mieru fázového posunu.

Po zvolení zvolení miery prenosu γ rovnice pre napätie a prúd dostaneme v tvare:

$$\frac{d^2 \mathcal{U}}{d^2} - \gamma^2.\mathcal{U} = 0$$

$$\frac{d^2 I}{d^2} - \gamma^2.I = 0$$

Toto sú lineárne diferenciálne rovnice rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientami. Ich riešením sú rovnice homogénneho vedenia v komplexnom tvare pre určnie napätia a prúdu v ľubovoľnom mieste vedenia x a v ľubovoľnom časovom okamihu t.

$$\mathcal{U}=\frac{1}{2}.(\mathcal{U}_1+\mathcal{Z}.\mathit{I}_1).e^{-\gamma.x}+\frac{1}{2}.(\mathcal{U}_1-\mathcal{Z}.\mathit{I}_1).e^{\gamma.x} \qquad (3)$$

$$\mathit{I}=\frac{1}{2}.\left(\frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{Z}}+\mathit{I}_1\right).e^{-\gamma.x}-\frac{1}{2}.\left(\frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{Z}}-\mathit{I}_1\right).e^{\gamma.x} \qquad (4)$$

- rovnice (3) a (4) v hyperbolickom tvare:

$$\mathcal{U}=\mathcal{U}_1.\cosh(\gamma.x)-\mathcal{Z}.\mathit{I}_1.\sinh(\gamma.x)$$

$$\mathit{I}=\mathit{I}_1.\cosh(\gamma.x)-\frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{Z}}.\sinh(\gamma.x)$$

Veličina Z sa nazýva vlnová impedancia vedenia, pre ktorú platí:

$$\mathcal{Z}=\sqrt{\frac{R+j.\omega.L}{G+j.\omega.C}}$$

- odkiaľ vieme vyrátať veľkosť modulu a argumentu vlnovej impedancie:

$$Z=\sqrt[4]{\frac{R^2+\omega^2.L^2}{G^2+\omega^2.C^2}} \qquad \varphi_z=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\omega.L}{R}\ +\ \operatorname{arctg}\frac{\omega.C}{G}\right)$$

- rovnice (3) a (4) môžeme tiež prepísať takto:

$$\mathcal{U}=\mathcal{U}_m(x).e^{j.\omega.t}=A_1.e^{-\alpha.x}.e^{j.(\omega.t+\varphi_1-\beta.x)}+A_2.e^{\alpha.x}.e^{j.(\omega.t+\varphi_2+\beta.x)}$$

$$\mathit{I}=\mathit{I}_m(x).e^{j.\omega.t}=B_1.e^{-\alpha.x}.e^{j.(\omega.t+\psi_1-\beta.x)}+B_2.e^{\alpha.x}.e^{j.(\omega.t+\psi_2+\beta.x)}$$

Okamžité hodnoty $u=(t,x)$ a $i=(t,x)$ dostaneme z predchádzajúcich rovníc:

$$u(t,x)=\Re\,\mathcal{U}=A_1.e^{-\alpha.x}.\cos(\omega.t+\varphi_1-\beta.x)+A_2.e^{\alpha.x}.\cos(\omega.t+\varphi_2+\beta.x)$$

$$i(t,x)=\Re\,\mathit{I}=B_1.e^{-\alpha.x}.\cos(\omega.t+\psi_1-\beta.x)+B_2.e^{\alpha.x}.\cos(\omega.t+\psi_2+\beta.x)$$

kde

$$\alpha=\sqrt{\frac{R.G}{\cos(\varphi_1).\cos(\varphi_2)}}.\cos\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$$

$$\beta=\sqrt{\frac{R.G}{\cos(\varphi_1).\cos(\varphi_2)}}.\sin\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$$

$$\varphi_1=\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega.L}{R}\right) \qquad \varphi_2=\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega.C}{G}\right)$$

Veličina v_f sa nazýva fázová rýchlosť šírenia a udáva rýchlosť šírenia určitého stavu fázy po homogénnom vedení, ktoré je bezodrazovo zakončené pri napájaní jediným harmonickým signálom a v ustálenom stave. Je definovaná ako podiel uhlovej frekvencie ω a vlnovej miery fázového posunu β .

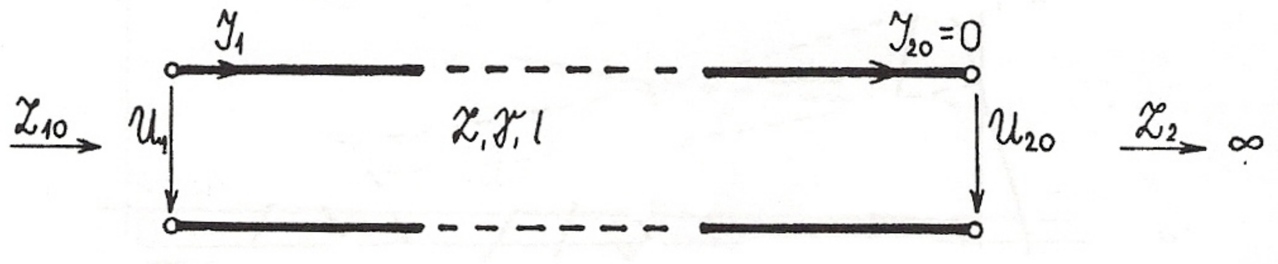
$$v_f=\frac{\omega}{\beta}=\frac{2.\pi.f}{\frac{2.\pi}{\lambda}}=\lambda.f$$

Špeciálne prípady vedení

- ideálne (bezstratové) vedenie
- vedenie s malým tlmením
- vedenie s normálnym tlmením
- nekonečne dlhé homogénne vedenie
- vedenie zakončené charakteristickou impedanciou
- homogénne vedenie zakončené naprázdno a nakrátko

Homogénne vedenie zakončené naprázdno

- zakončovacia impedancia $\mathcal{Z}_{20}= \rightarrow \infty$



- vstupná impedancia $\mathcal{Z}_{VST}=\mathcal{Z}.\text{cotgh}(\gamma.l)$

$$\mathcal{Z}_0=Z_0.e^{j.\varphi_0}=\mathcal{Z}.\text{cotgh}(\gamma.l)=\mathcal{Z}.\frac{\cosh(\alpha l).\sinh(\alpha l)-j\sin(\beta l).\cos(\beta l)}{\sinh^2(\alpha l).\cos^2(\beta l)+\cosh^2(\alpha l).\sin^2(\beta l)}$$

$$Z_0=Z.\frac{\sqrt{\cosh^2(\alpha l).\sinh^2(\alpha l)+\sin^2(\beta l).\cos^2(\beta l)}}{\sinh^2(\alpha l).\cos^2(\beta l)+\cosh^2(\alpha l).\sin^2(\beta l)}$$

$$\varphi_0=\varphi_Z-\text{arctg}\left(\frac{\sin(\beta l).\cos(\beta l)}{\sinh(\alpha l).\cosh(\alpha l)}\right)$$

$$\mathcal{U}_y=\mathcal{U}_{20}.\cosh(\gamma.y)$$

$$I_y=\frac{\mathcal{U}_{20}}{\mathcal{Z}}.\sinh(\gamma.y)$$

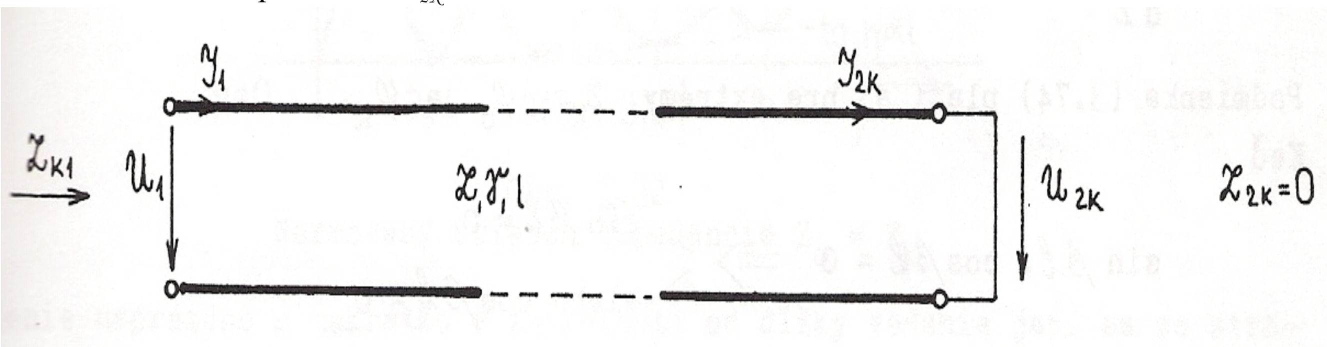
kde $\mathcal{U}_{20}$ je napätie na konci vedenia. Pre priebehy vektorov napätí a prúdov pri zakončení naprázdno v ľubovolnom mieste vo vzdialenosti y od konca vedenia platí:

$$\mathcal{U}_{y0}=\frac{\mathcal{U}_{20}}{2}.e^{\gamma.y}+\frac{\mathcal{U}_{20}}{2}.e^{-\gamma.y}$$

$$I_{y0}=\frac{\mathcal{U}_{20}}{2.\mathcal{Z}}.e^{\gamma.y}-\frac{\mathcal{U}_{20}}{2.\mathcal{Z}}.e^{-\gamma.y}$$

<u>Homogénne vedenie zakončené nakrátko</u>

- zakončovacia impedancia $\mathcal{Z}_{2K}=0\,\Omega$



- vstupná impedancia $\mathcal{Z}_{VST}=\mathcal{Z}.\operatorname{tgh}(\gamma.1)$

$$Z_0=Z.\frac{\sqrt{\sinh^2(\alpha 1).\cosh^2(\alpha 1)+\sin^2(\beta 1).\cos^2(\beta 1)}}{\cosh^2(\alpha 1).\cos^2(\beta 1)+\sinh^2(\alpha 1).\sin^2(\beta 1)}$$

$$\varphi_0=\varphi_Z+\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\beta 1).\cos(\beta 1)}{\sinh(\alpha 1).\cosh(\alpha 1)}\right)$$

$$\mathcal{U}_y=\mathcal{Z}.I_{2K}.\sinh(\gamma.y)$$
$$I_y=I_{2K}.\cosh(\gamma.y)$$

<u>Vyšetrenie priebehov</u> Z_0, Z_K, φ_0 a φ_K <u>v závislosti od dĺžky vedenia l</u>

- extrémy zistíme z podmienky:

$$\frac{d}{dl}(Z_0, Z_K, \varphi_0, \varphi_K)=0 \quad\Rightarrow\quad \sin(\beta 1).\cos(\beta 1)=0$$

$$\sin(\beta 1).\cos(\beta 1)=0 \;\Rightarrow\; \sin(\beta 1)=0 \;\vee\; \cos(\beta 1)=0$$

1. Nech $\sin(\beta 1)=0$

$$\beta l = 0, \pi, 2\pi, \ldots \Rightarrow \beta l = n\pi \quad \text{kde } n = 0,1,2,\ldots$$

vtedy

$$|\mathrm{cotgh}(\alpha l) = 1|$$

a

$$Z_0 = Z.\mathrm{cotgh}(\alpha l) \qquad Z_K = Z.\mathrm{tgh}(\alpha l)$$

$$\varphi_0 = \varphi_Z \qquad \varphi_K = \varphi_Z$$

tento pripad zodpovedá dĺžke vedenia

$$l = \frac{n\pi}{\beta} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = n\frac{\lambda}{2}$$

Pri týchto dĺžkach Z_K nadobúda minimum a Z_0 maximum

2. Keď $\cos(\beta l) = 0$

$$\beta l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots \Rightarrow \beta l = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

vtedy

$$|\mathrm{cotgh}(\alpha l) = 1|$$

$$l = \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{2n+1}{4}\lambda$$

- pri týchto dĺžkach Z_K nadobúda minimum a Z_0 maximum

Tam kde Z_K nadobúda minimum, Z_0 nadobúda maximum a naopak.

Riešenia úloh

Úloha číslo 1:

Hodnoty, pre jeden riadok z tabuľky 1, ktoré budú použité vo vzorových výpočtoch:

$$C = 33\, nF/km$$
$$L = 0{,}7\, mH/km$$
$$R = 36\,\Omega/km$$
$$G = 27{,}1\,\mu S/km$$
$$f = 20\,kHz$$

Vzorové výpočty

Uhlová frekvencia

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\, 20\cdot 10^3 = \mathbf{125663{,}706\, s^{-1}}$$

Všeobecný vzorec pre vlnovú impedanciu vedenia

$$\mathcal{Z} = \sqrt{\frac{\mathrm{R} + \mathrm{j}\omega \mathrm{L}}{\mathrm{G} + \mathrm{j}\omega \mathrm{C}}}$$

Modul vlnovej impedancie

$$\mathrm{Z} = \sqrt{\Re(\mathrm{Z})^2 + \Im(\mathrm{Z})^2}$$

Na vzorový výpočet do tabuľky bol použitý nasledujúci vzťah:

$$\mathrm{Z} = \sqrt[4]{\frac{\mathrm{R}^2 + \omega^2 \mathrm{L}^2}{\mathrm{G}^2 + \omega^2 \mathrm{C}^2}} = \sqrt[4]{\frac{36^2 + (2\pi\, 20\cdot 10^3 \cdot 0{,}7\cdot 10^{-3})^2}{(27{,}1\cdot 10^{-6})^2 + (2\pi\, 20\cdot 10^3\cdot 33\cdot 10^{-9})^2}} = \mathbf{151{,}391\,\Omega}$$

$$\Re(\mathrm{Z}) = \mathrm{Z}\cdot\cos(\varphi_z) = 151{,}391\cdot\cos(-10{,}941) = \mathbf{148{,}639\,\Omega}$$

$$\Im(\mathrm{Z}) = \mathrm{Z}\cdot\sin(\varphi_z) = 151{,}391\cdot\sin(-10{,}941) = \mathbf{-28{,}734\,\Omega}$$

Fáza vlnovej impedancie vedenia

$$\varphi_z = \mathrm{arctg}\left(\frac{\Im(\mathrm{Z})}{\Re(\mathrm{Z})}\right)$$

$$\varphi_z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}\frac{\omega\cdot \mathrm{L}}{\mathrm{R}} + \mathrm{arctg}\frac{\omega\cdot \mathrm{C}}{\mathrm{G}}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}\frac{2\pi\, 20\cdot 10^3\cdot 0{,}7\cdot 10^{-3}}{36} + \mathrm{arctg}\frac{2\pi\, 20\cdot 10^3\cdot 33\cdot 10^{-9}}{27{,}1\cdot 10^{-6}}\right) =$$
$$= \mathbf{-10{,}941°}$$

Špecifická konštanta

$$\gamma = \sqrt{(\mathrm{R} + \mathrm{j}\omega \mathrm{L})(\mathrm{G} + \mathrm{j}\omega \mathrm{C})}$$

$$\varphi_1 = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega.\mathrm{L}}{\mathrm{R}}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{2\pi\, 20\cdot 10^3\cdot 0{,}7\cdot 10^{-3}}{36}\right) = \mathbf{67{,}743°}$$

$$\varphi_2 = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega.\mathrm{C}}{\mathrm{G}}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{2\pi\, 20\cdot 10^3\cdot 33\cdot 10^{-9}}{27{,}1\cdot 10^{-6}}\right) = \mathbf{89{,}626°}$$

Špecifická vlnová miera tlmenia

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mathrm{R.G}}{\cos(\varphi_1).\cos(\varphi_2)}}.\cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) = \sqrt{\frac{36\cdot 27{,}1\cdot 10^{-6}}{\cos(67{,}743).\cos(89{,}626)}}.\cos\left(\frac{67{,}743 + 89{,}626}{2}\right) =$$
$$= \mathbf{0{,}123\,Np/km}$$

$$\alpha = 0{,}123188\,\mathrm{Np/km} = 0{,}123188\cdot 8{,}686 = \mathbf{1{,}07\,dB/km}$$

Špecifická vlnová miera fázového posunu

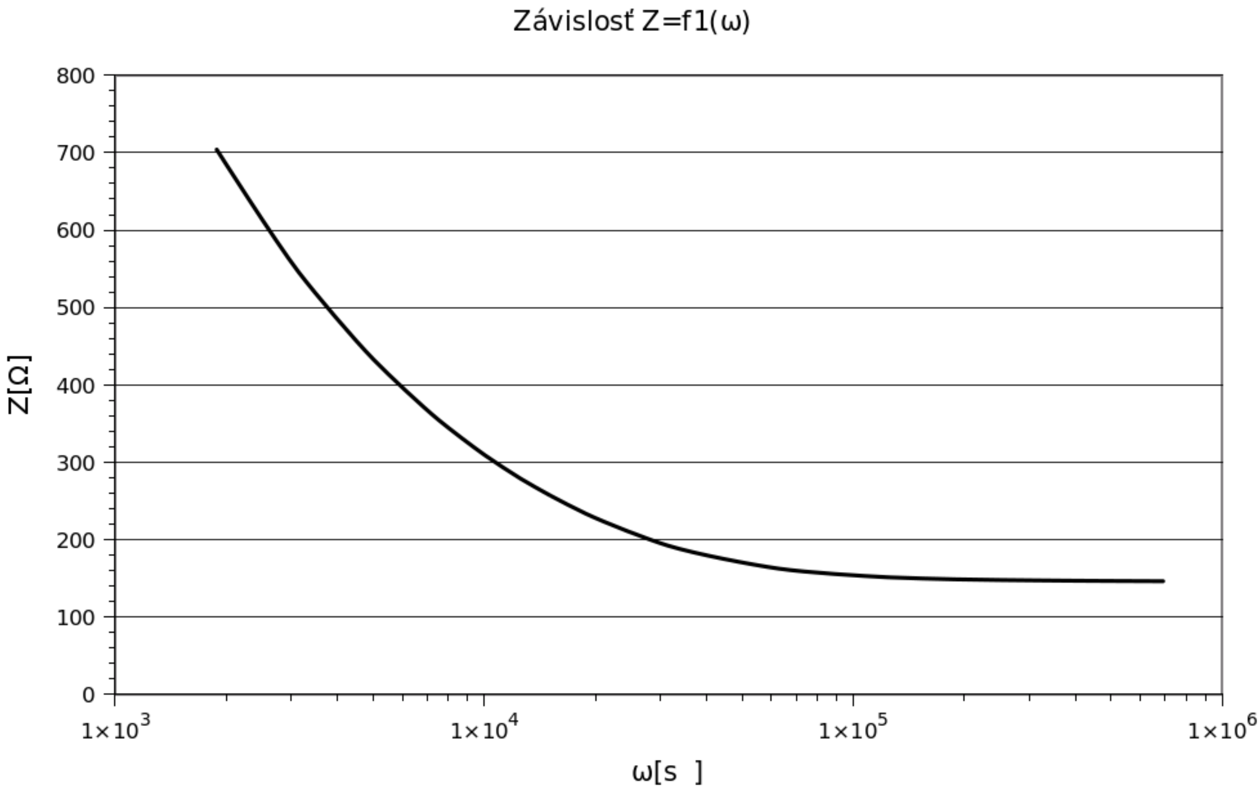
$$\beta = \sqrt{\frac{R.G}{\cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)}}\cdot\sin\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right) = \sqrt{\frac{36\cdot 27{,}1\cdot 10^{-6}}{\cos(67{,}743)\cdot\cos(89{,}626)}}\cdot\sin\left(\frac{67{,}743+89{,}626}{2}\right) =$$

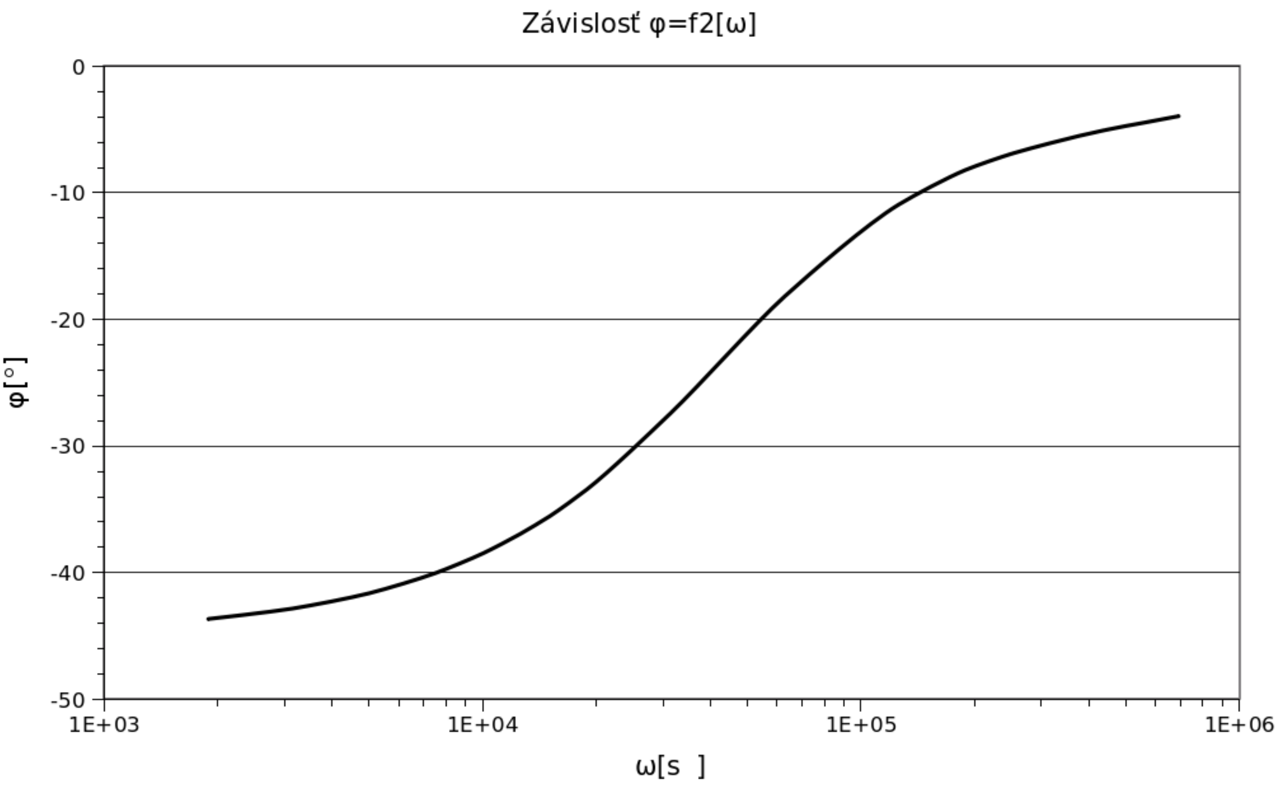
$$= \mathbf{0{,}615\,rad/km}$$

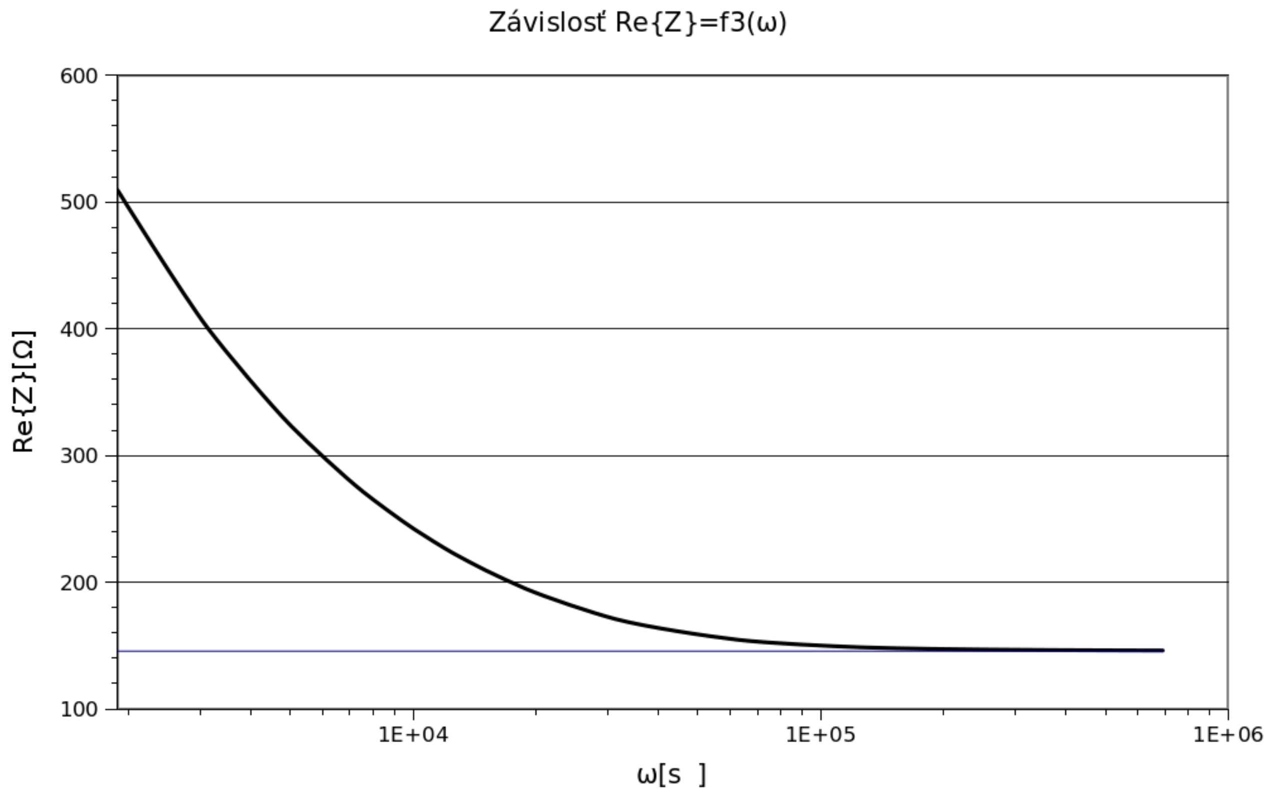
Fázová rýchlosť

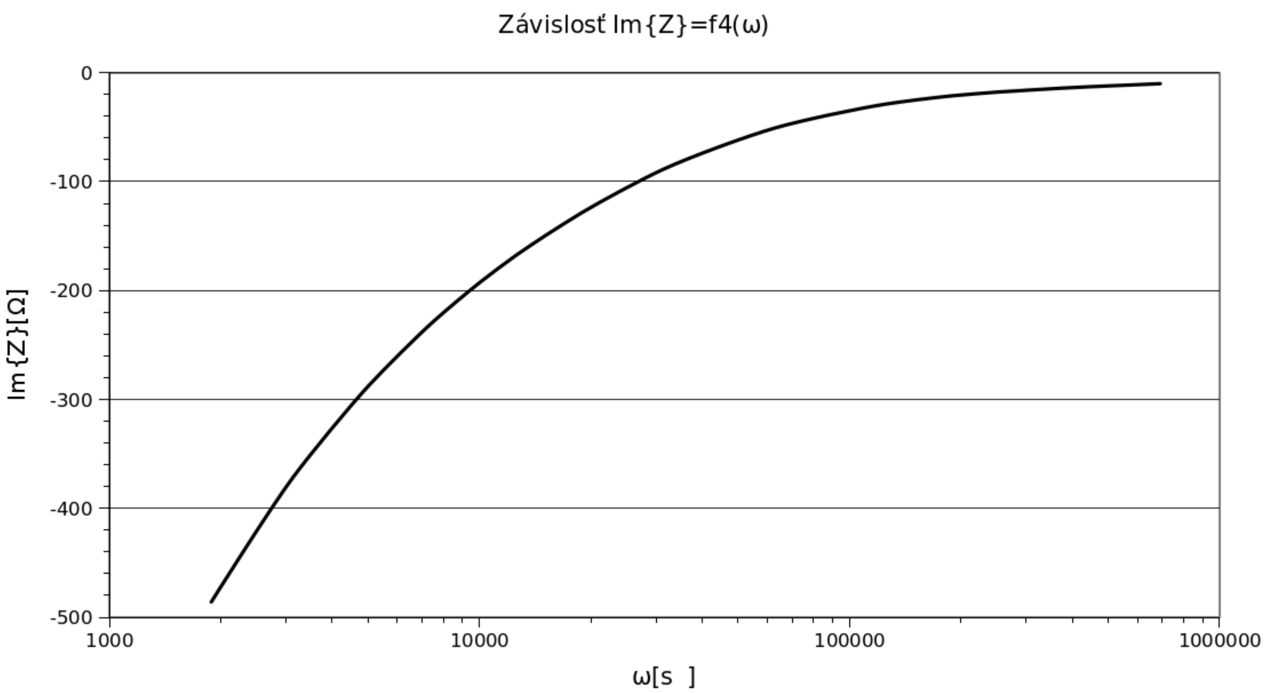
$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi\cdot 20\cdot 10^3}{0{,}615} = \mathbf{203999{,}523\,km/s}$$

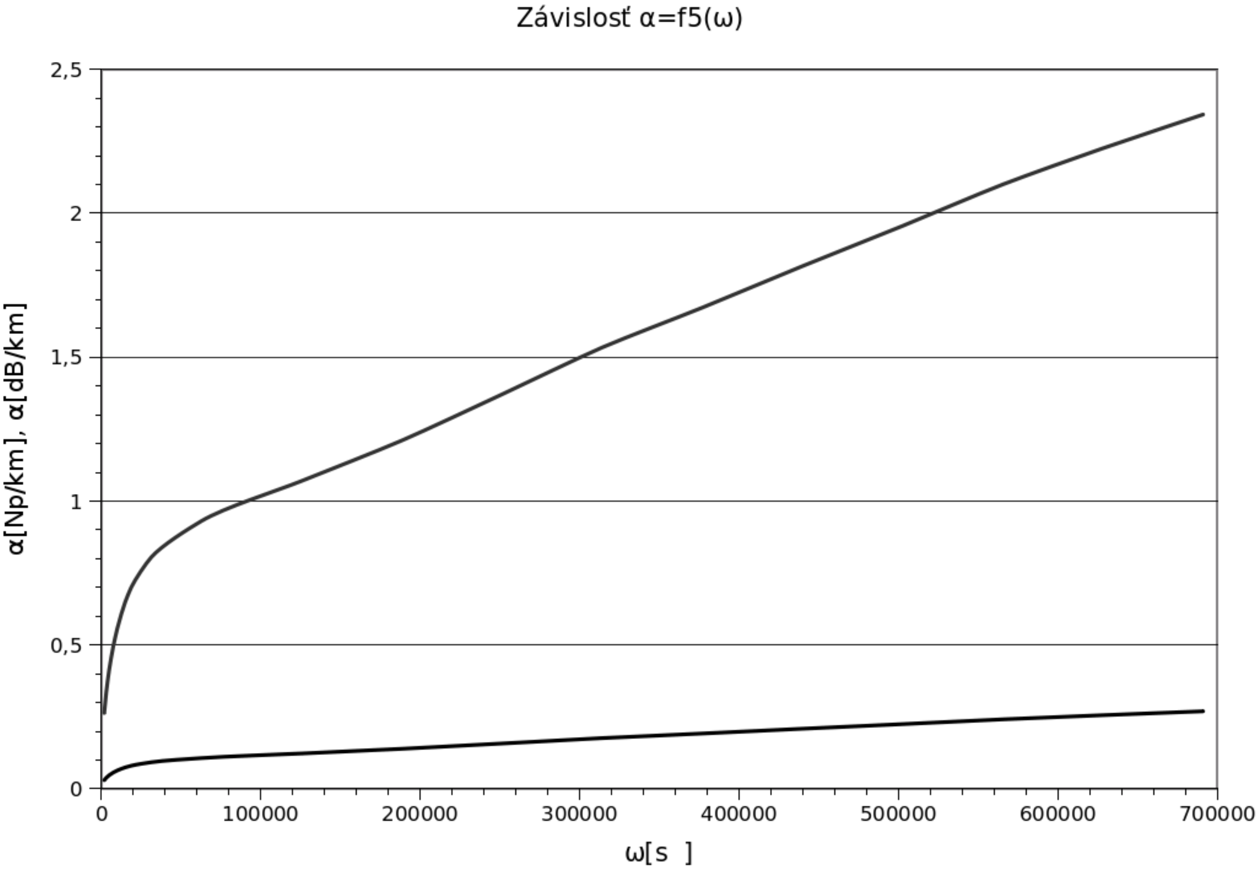
Úloha číslo 2:
Graficky znázornené jednotlivé závislosti



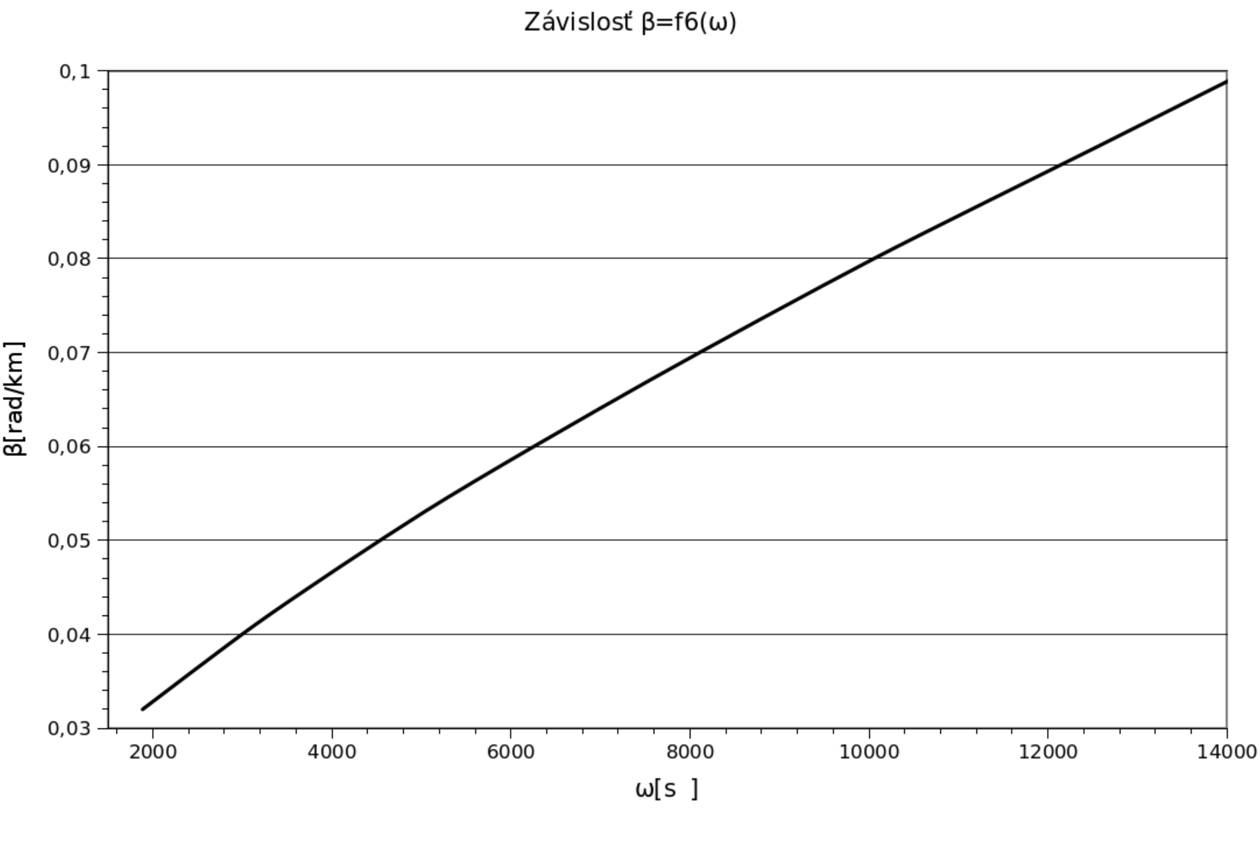


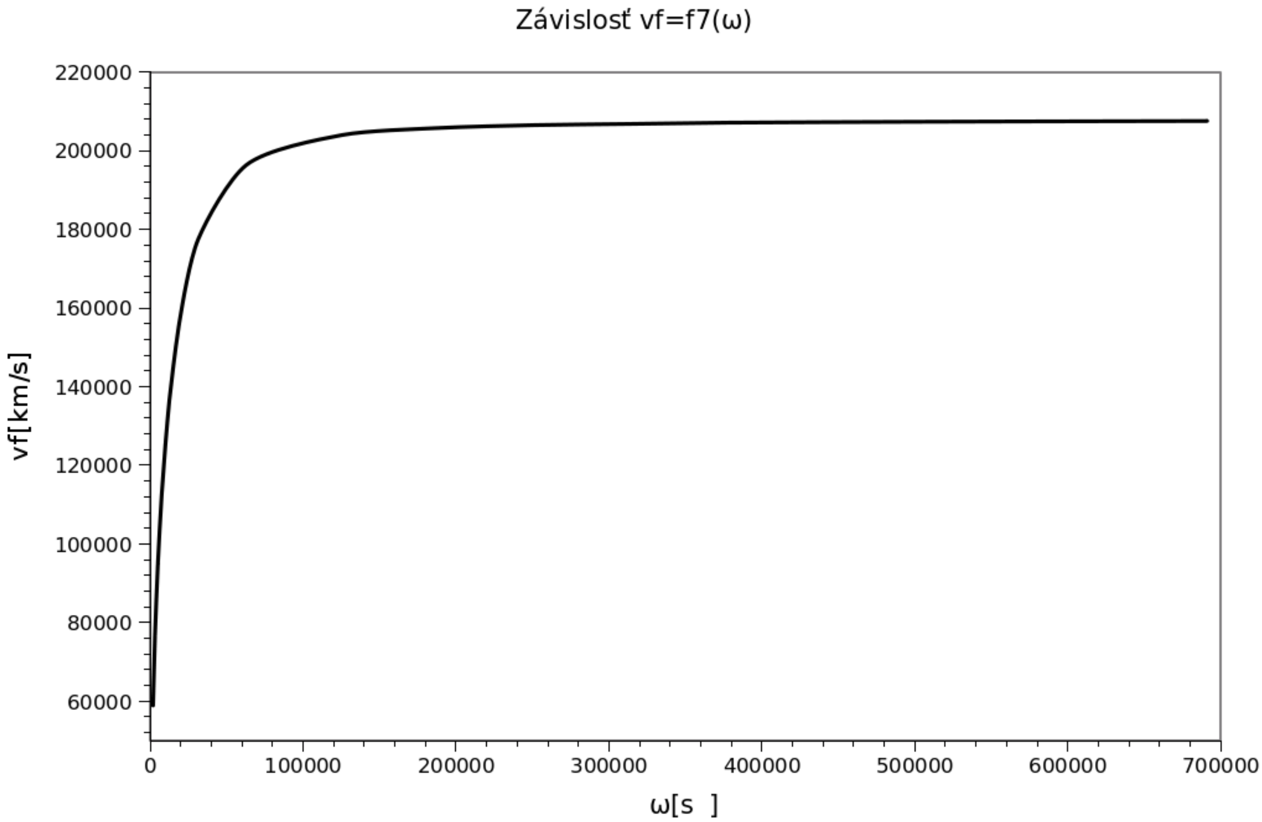

Závislosť Re{Z}=f3(ω)
600
500
400
300
200
100
Re{Z}[Ω]
1E+04
1E+05
1E+06
ω[s]


Závislosť Im{Z}=f4(ω)
0
-100
-200
-300
-400
-500
Im{Z}[Ω]
1000
10000
100000
1000000
ω[s]



Detail $\beta = \mathrm{f}_6(\omega)$ aby bolo vidno, že nie je lineárna na celom rozsahu.




Závislosť vf=f7(ω)
vf[km/s]
220000
200000
180000
160000
140000
120000
100000
80000
60000
0
100000
200000
300000
400000
500000
600000
700000
ω[s]

Úloha číslo 3:

a)

Vo vzorových výpočtoch sa budú používať nasledujúce parametre vedenia:

$$f = 25kHz$$
$$t = 0{,}7\,s$$
$$U_v = 9V$$
$$\varphi_v = 35°$$

Zadanú máme aj vzdialenosť od začiatku vedenia $x = 0 ; 0{,}5 ; 1 ; 1{,}5 ; ... 7\,km$.

Hodnoty α a β sú určené pomocou regresie.

$\alpha = \mathbf{0{,}137\ Np/km}$

$\beta = \mathbf{0{,}766\ rad/km}$

Vzorové výpočty pre dané parametre:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 25\cdot 10^3 = \mathbf{157079{,}632\ km/s}$$

$$U_1 = \frac{U_v}{2} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\mathcal{U}(x) = U_1 e^{-\gamma x}$$

$$\Re(\mathcal{U}(x)) = \frac{U_v}{2} e^{-\alpha x} \cdot \cos(\omega t + \varphi_v - \beta x) = \frac{9}{2} e^{-0{,}137\cdot 1} \cdot \cos(2\pi 25\cdot 10^3 \cdot 0{,}7 + \frac{7\pi}{36} - 0{,}766\cdot 1) = \mathbf{3{,}877\ V}$$

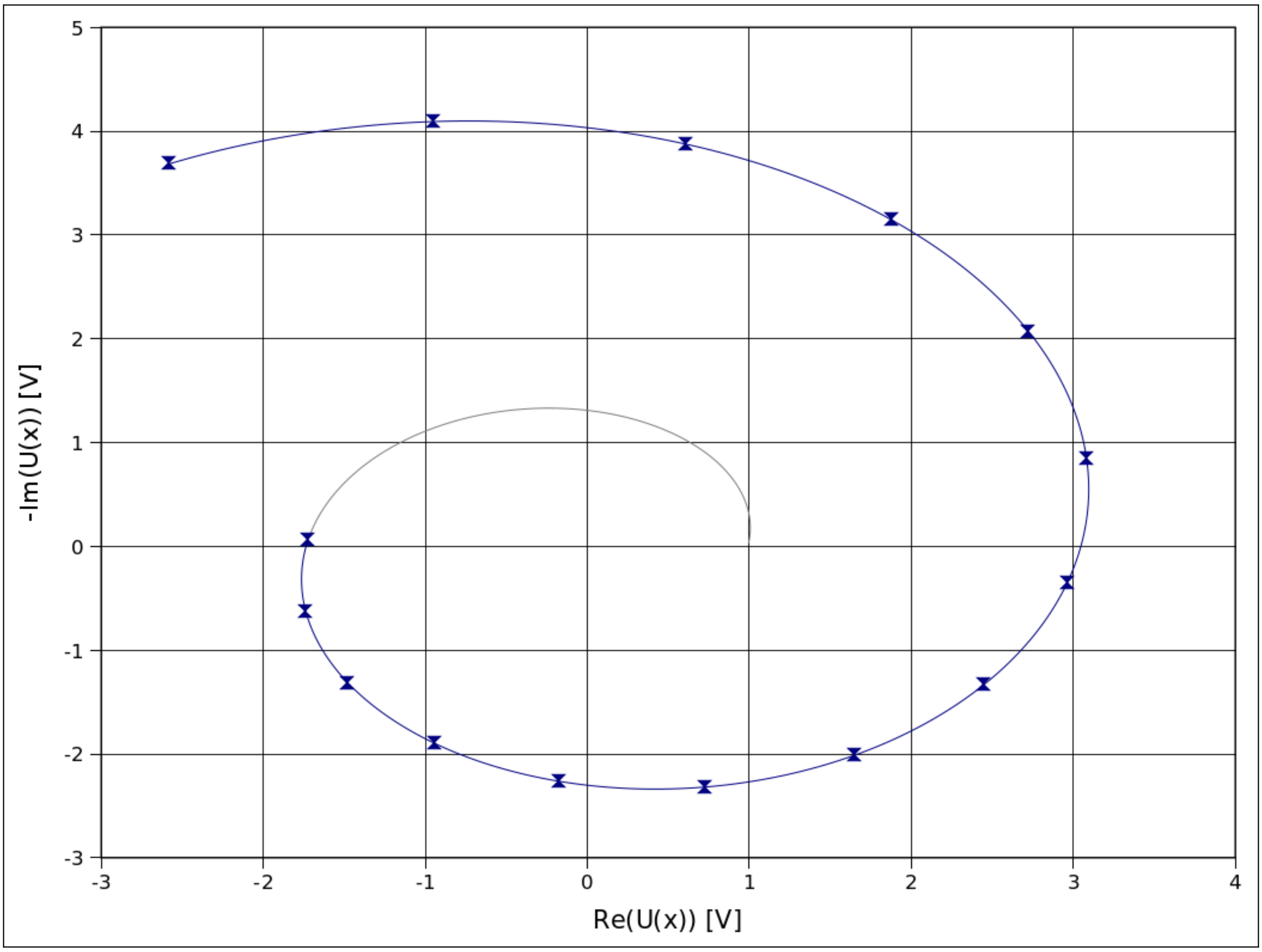
$$\Im(\mathcal{U}(x)) = \frac{U_v}{2} e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \varphi_v - \beta x) = \frac{9}{2} e^{-0{,}137\cdot 1} \cdot \sin(2\pi 25\cdot 10^3 \cdot 0{,}7 + \frac{7\pi}{36} - 0{,}766\cdot 1) = \mathbf{-0{,}606\ V}$$

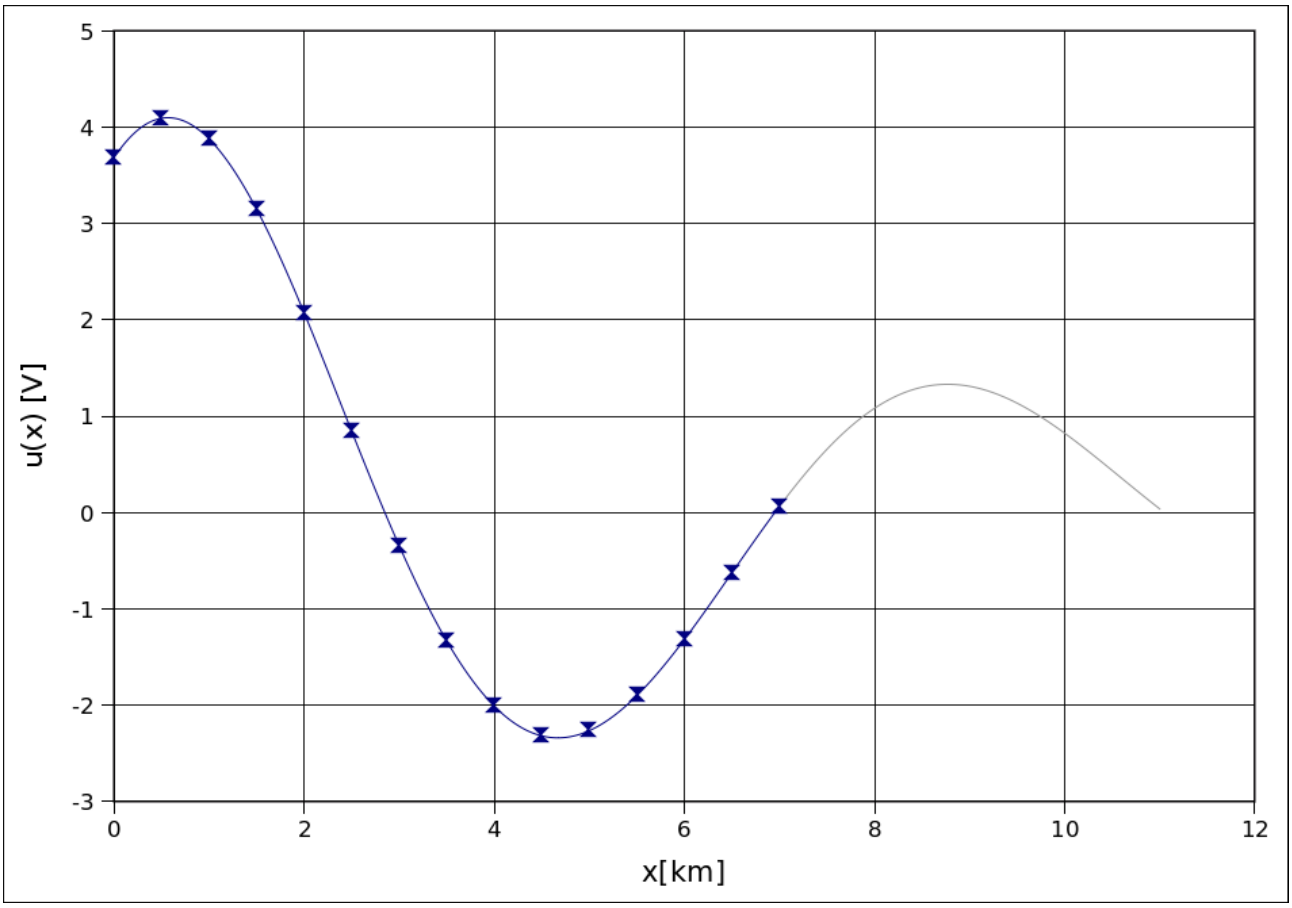
$$u(x) = \Re(\mathcal{U}(x))$$

Tabuľka závislosti okamžitej hodnoty napätia od vzdialenosti:

x [km]	$u(x) = \Re(\mathcal{U}(x))[V]$	$\Im(\mathcal{U}(x))[V]$
0	3,686	2,581
0,5	4,093	0,949
1	3,877	0,606
1,5	3,146	−1,878
2	2,070	−2,725
2,5	0,842	−3,082
3	−0,346	−2,963
3,5	−1,334	−2,446
4	−2,009	−1,653
4,5	−2,317	−0,731
5	−2,262	0,176
5,5	−1,898	0,941
6	−1,315	1,478
6,5	−0,623	1,739
7	0,067	1,724

b) Hodograf pre hodnoty napätia:


-Im(U(x)) [V]
Re(U(x)) [V]
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3
4


u(x) [V]
x[km]
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
2
4
6
8
10
12

Úloha číslo 4:

Vo vzorových výpočtoch sa budú používať nasledujúce parametre:

$$C = 33\,\mathrm{nF/km}$$
$$L = 0{,}7\,\mathrm{mH/km}$$
$$R = 36\,\Omega/\mathrm{km}$$
$$G = 27{,}1\,\mu\mathrm{S/km}$$
$$f = 20\,\mathrm{kHz}$$
$$\alpha = 0{,}123\,\mathrm{Np/km}$$
$$\beta = 0{,}615\,\mathrm{rad/km}$$
$$y = l = 5\mathrm{km}$$
$$Z = 151{,}391\,\Omega$$
$$\varphi_z = -10{,}941\,°$$

Modul vlnovej impedancie vedenia nakrátko

$$Z_k = Z\frac{\sqrt{\sinh^2(\alpha l)\cdot\cosh^2(\alpha l)+\sin^2(\beta l)\cdot\cos^2(\beta l)}}{\cosh^2(\alpha l)\cdot\cos^2(\beta l)+\sinh^2(\alpha l)\sin^2(\beta l)}$$

$$Z_k = 151{,}391\frac{\sqrt{\sinh^2(0{,}615)\cdot\cosh^2(0{,}615)+\sin^2(3{,}075)\cdot\cos^2(3{,}075)}}{\cosh^2(0{,}615)\cdot\cos^2(3{,}075)+\sinh^2(0{,}615)\sin^2(3{,}075)} = \mathbf{83{,}464\,\Omega}$$

Fáza vlnovej impedancie vedenia nakrátko

$$\varphi_k = \varphi_z + \mathrm{arctg}\left(\frac{\sin(\beta l)\cdot\cos(\beta l)}{\sinh(\alpha l)\cdot\cosh(\alpha l)}\right) = -10{,}941 + \mathrm{arctg}\left(\frac{\sin(3{,}075)\cdot\cos(3{,}075)}{\sinh(0{,}615)\cdot\cosh(0{,}615)}\right) = \mathbf{-11{,}026\,°}$$

Modul vlnovej impedancie vedenia naprázdno

$$Z_0 = Z\frac{\sqrt{\cosh^2(\alpha l)\cdot\sinh^2(\alpha l)+\sin^2(\beta l)\cdot\cos^2(\beta l)}}{\sinh^2(\alpha l)\cdot\cos^2(\beta l)+\cosh^2(\alpha l)\sin^2(\beta l)}$$

$$Z_0 = 151{,}391\frac{\sqrt{\cosh^2(0{,}123\cdot 5)\cdot\sinh^2(0{,}123\cdot 5)+\sin^2(0{,}615\cdot 5)\cdot\cos^2(0{,}615\cdot 5)}}{\sinh^2(0{,}123\cdot 5)\cdot\cos^2(0{,}615\cdot 5)+\cosh^2(0{,}123\cdot 5)\sin^2(0{,}615\cdot 5)} = \mathbf{274{,}6\,\Omega}$$

Fáza vlnovej impedancie vedenia naprázdno

$$\varphi_0 = \varphi_z - \mathrm{arctg}\left(\frac{\sin(\beta l)\cdot\cos(\beta l)}{\sinh(\alpha l)\cdot\cosh(\alpha l)}\right) = -10{,}941 - \mathrm{arctg}\left(\frac{\sin(3{,}075)\cdot\cos(3{,}075)}{\sinh(0{,}615)\cdot\cosh(0{,}615)}\right) = \mathbf{-10{,}856\,°}$$

Vlnová impedancia:

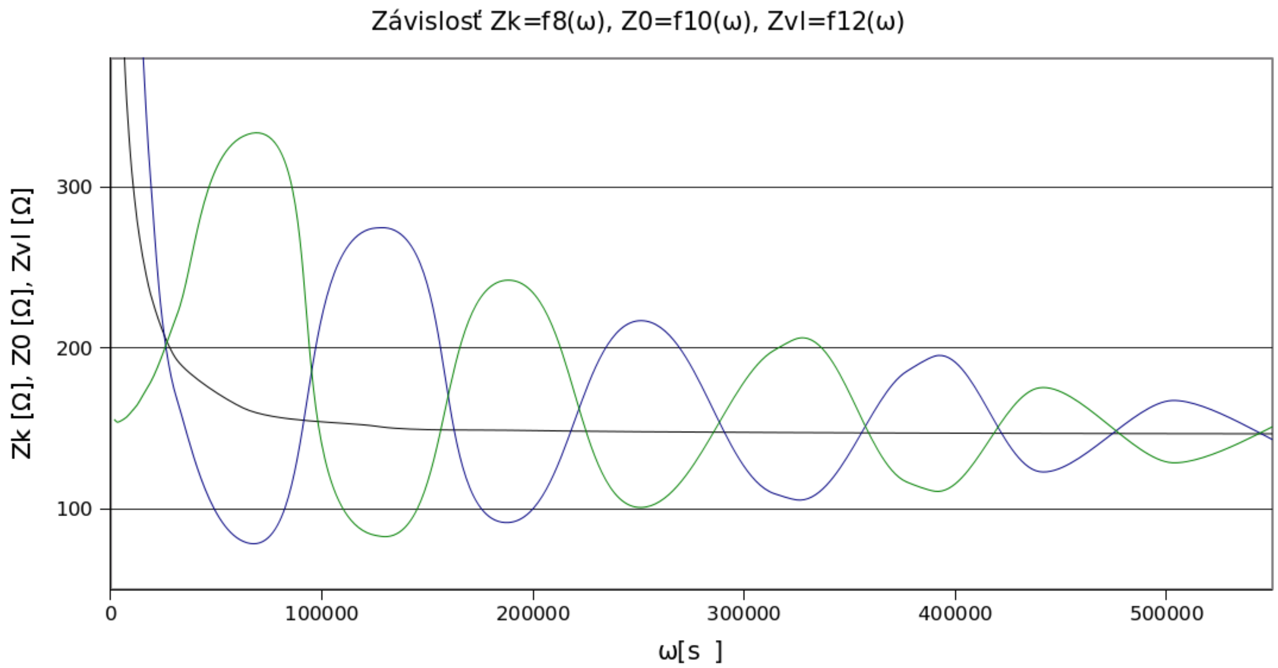
$$Z_{vl} = \sqrt{Z_k\cdot Z_0} = \sqrt{83{,}483\cdot 274{,}593} = \mathbf{151{,}391\,\Omega}$$

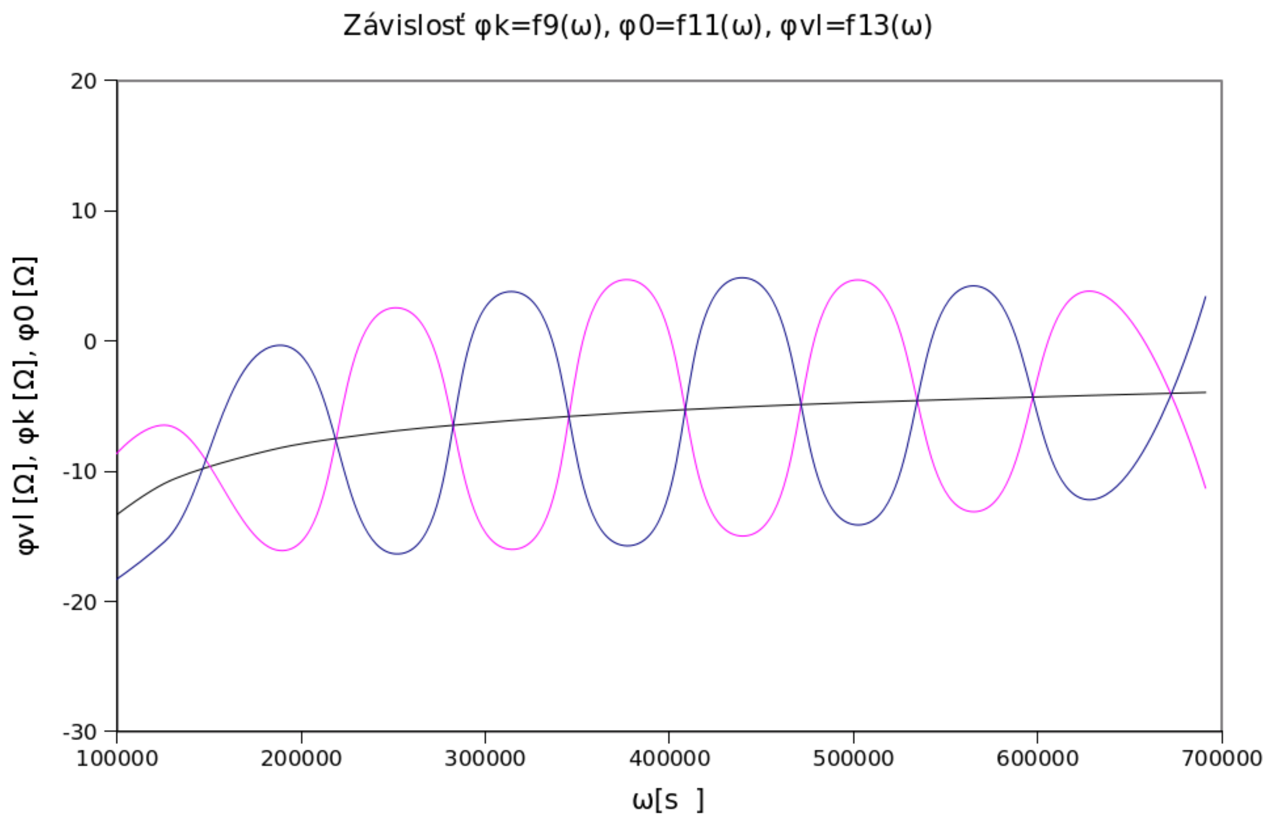
Fáza vlnovej impedancie:

$$\varphi_{vl} = \frac{\varphi_k+\varphi_0}{2} = \frac{-15{,}422+(-6{,}46)}{2} = \mathbf{-10{,}941\,°}$$

Tabuľka maxím a minim:

n	$\boldsymbol{\beta}$ **[rad/km]**	$\boldsymbol{\alpha}$ **[mNp/km]**	$\boldsymbol{\omega}$ **[$\mathbf{s^{-1}}$]**	**Z[Ω]**	**$\mathbf{Z_k}$[Ω]**	**$\mathbf{Z_0}$[Ω]**
1	0,628	123,519	128164,885	150,948	82,939	274,723
2	1,571	180,069	324783,514	147,400	205,732	105,607
3	1,885	196,602	390438,347	147,090	110,960	194,985
4	2,827	244,476	586829,804	146,600	174,450	123,196
5	3,142	268,621	650128,812	145,500	126,937	166,778


Závislosť Zk=f8(ω), Z0=f10(ω), Zvl=f12(ω)
Zk [Ω], Z0 [Ω], Zvl [Ω]
300
200
100
0
100000
200000
300000
400000
500000
ω[s]


Závislosť φk=f9(ω), φ0=f11(ω), φvl=f13(ω)
φvl [Ω], φk [Ω], φ0 [Ω]
20
10
0
-10
-20
-30
100000
200000
300000
400000
500000
600000
700000
ω[s]

Záver

V tomto zadaní som riešil vlastnosti diaľkového kábla DK Ø 1,2 Cu XV.

V prvej úlohe som vypočítal podľa uvedených vzťahov uhlovú frekvenciu, modul vlnovej impedancie, reálnu a imaginárnu zložku vlnovej impedancie, fázu, špecifickú vlnovú mieru tlmenia, špecifickú vlnovú mieru fázového posunu a fázovú rýchlosť. Vypočítané hodnoty sú uvedené v tabuľke pri riešení úlohy číslo 1. V riešení som uviedol aj vzorové výpočty pre jednu danú frekvenciu a dané parametre vedenia.

Hodnoty, vypočítané v úlohe číslo 1 som použil na vykreslenie závislosti jednotlivých veličín. V závislosti modulu impedancie Z od uhlovej frekvencie vidíme, že impedancia so zvyšujúcou sa uhlovou frekvenciou klesá, ale nikdy nedosiahne nulovú hodnotu. Pre lepšie zobrazenie som použil logaritmickú mierku na osi x.
V závislosti fázy od uhlovej frekvencie vidíme, že má rastúci charakter a limitne sa blíži k nule. Taktiež som použil logaritmickú mierku na osi x.
Graf závislosti reálnej zložky impedancie od uhlovej frekvencie má klesajúci charakter. Hodnota klesá s rastúcou hodnotou uhlovej frekvencie až k hodnote $\sqrt{L/C}$. Použil som logaritmickú mierku pre hodnoty na osi x.
Závislosť imaginárnej zložky od uhlovej frekvencie má rastúci charakter. Pre lepšie zobrazenie som použil logaritmickú mierku.
V grafe závislosti špecifickej vlnovej miery tlmenia sú zobrazené dve krivky, jedna pre tlmenie v Np/km a druhá pre tlmenie v dB/km. Urobil som to preto, aby som lepšie videl, ako sa graficky líšia veličiny Np od dB. Môžeme tiež vidieť, že špecifická vlnová miera tlmenia má rastúci charakter, čo je dôkazom toho, že vedenie nespĺňa podmienky pre neskreslený prenos. Ak by malo spĺňať podmienky pre neskreslený prenos, muselo by byť tlmenie konštantné na celom priebehu.
Ďalšou podmienkou pre neskreslený prenos je, že špecifická vlnová miera fázového posunu by musela byť lineárna na celom priebehu. Pre to, aby som ukázal, že nie je lineárna, som na grafe závislosti fázového posunu urobil detail časti, ktorá nespĺňa požiadavku linearity.
Na poslednom grafe závislosti fázovej rýchlosti od uhlovej frekvencie vidíme, že fázová rýchlosť má zo začiatku prudko rastúci charakter, ktorý prechádza do konštantného priebehu. Tým, že má fázová rýchlosť aj rastúci charakter je porušená ďalšia podmienka pre neskreslený prenos. Táto podmienka platí na časti, kde je fázová rýchlosť konštantná.

V tretej úlohe som najprv pomocou regresie určil parametre α a β, ktoré som neskôr využil pri výpočte reálnej a imaginárnej zložky vektora napätia. Okamžitá hodnota napätia je rovná reálnej zložke vektora napätia. Takto som vyrátal všetky potrebné zložky pre vzdialenosť od 0 do 7km s krokom 0,5km a zapísal do tabuľky. Následne som všetky hodnoty graficky vyniesol do hodografu a do závislosti vzdialenosti od okamžitej hodnoty napätia. V hodografe je naznačené ďalšie pokračovanie krivky.

V poslednej štvrtej úlohe som vypočítal hodnoty modulu vlnovej impedancie a fázy nakrátko a naprázdno. Následne som si pomocou regresie určil ďalšie hodnoty, z ktorých som vytvoril tabuľku maxím a minim. Vyrátané hodnoty a hodnoty maxím a minim som použil na zostrojenie závislosti impedancii od uhlovej frekvencie. Ako je vidno na grafe, nepodarilo sa mi určiť pomocou regresie presné hodnoty parametrov, pretože sa všetky závislosti impedancii nepreťali v jednom mieste. Urobil som aj závislosť fázy nakrátko a naprázdno od uhlovej frekvencie. Fázy sa bez problémov preťali v spoločných bodoch. Pre kontrolu som vyrátal aj vlnovú impedanciu podľa daného vzťahu.