

# IIR SÚSTAVY

OVERENIE STABILITY IIR SÚSTAVY  
STABILIZÁCIA IIR SÚSTAVY

# IIR Sústavy

1

□ sú definované :

❖ diferenčnou rovnicou (N – počet vzoriek) :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot x(n-k) - \sum_{k=1}^{N-1} b_k \cdot y(n-k)$$

❖ prenosovou funkciou :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \cdot z^{-k}} \quad \longrightarrow \quad H(z) = \alpha_0 \frac{\prod_{k=1}^{N-1} (1 - z_{0k} \cdot z^{-k})}{\prod_{k=1}^{N-1} (1 - z_{xk} \cdot z^{-k})}$$

# IIR Sústavy – overovanie stability

2

- možnosti overenia stability :
  - ❖ **a)** privedenie kronekerovho impulzu na vstup sústavy
  - ❖ **b)** výpočet koreňov menovateľa (póly)
  - ❖ **c)** výpočet podielu čitateľ / menovateľ prenosovej funkcie
- body a) a c) sú vlastne výpočet impulzovej charakteristiky našej sústavy (z ktorej zároveň aj vidíme, či sa jedná o IIR sústavu)

# IIR Sústavy – overovanie stability

3

## Príklad :

- diferenčná rovnica:

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + 2x(n-2) + 4y(n-1) - 8y(n-2)$$

- z diferenčnej rovnice po úprave dostaneme prenosovú funkciu:

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 4z^{-1} + 8z^{-2}}$$

# IIR Sústavy – overovanie stability

4

- a) privedenie kronekerovho impulzu na vstup sústavy  $\Rightarrow x(n)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \dots]$ , na výstupe dostaneme  $h(n)$

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + 2x(n-2) + 4y(n-1) - 8y(n-2)$$

$$y(0) = x(0) = 1$$

$$y(1) = -2x(0) + 4y(0) = -2 + 4 = 2$$

$$y(2) = 2x(0) + 4y(1) - 8y(0) = 2 + 8 - 8 = 2$$

$$y(3) = 4y(2) - 8y(1) = 8 - 16 = -8$$

$$y(4) = 4y(3) - 8y(2) = -32 - 16 = -48$$

....

- jedná sa o IIR sústavu ( $h(n)$  nemá konečný počet nenulových hodnôt) a tiež je sústava nestabilná, pretože súčet všetkých vzoriek  $h(n)$  nie je konečné číslo, lebo veľkosť vzoriek má tendenciu rásť

# IIR Sústavy – overovanie stability

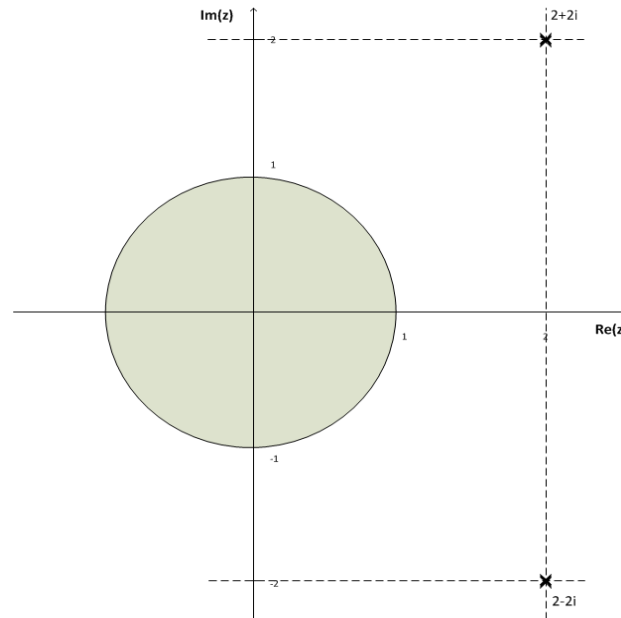
5

- b) výpočet koreňov menovateľa (póly)
- poloha koreňov čitateľa (núl) je z hľadiska systému stability nezaujímavá

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2}$$

$$x_1 = 2 + 2i$$

$$x_2 = 2 - 2i$$



- každá sústava, ktorá obsahuje póly je typu IIR a ak ležia póly mimo jednotkovej kružnice je zároveň aj nestabilná

# IIR Sústavy – overovanie stability

- c) výpočet podielu čitateľ / menovateľ prenosovej funkcie - podiel je zároveň impulzová odozva sústavy  $h(n)$  po Z-transformácii. Teda  $h(n)$  tvoria koeficienty po delení.

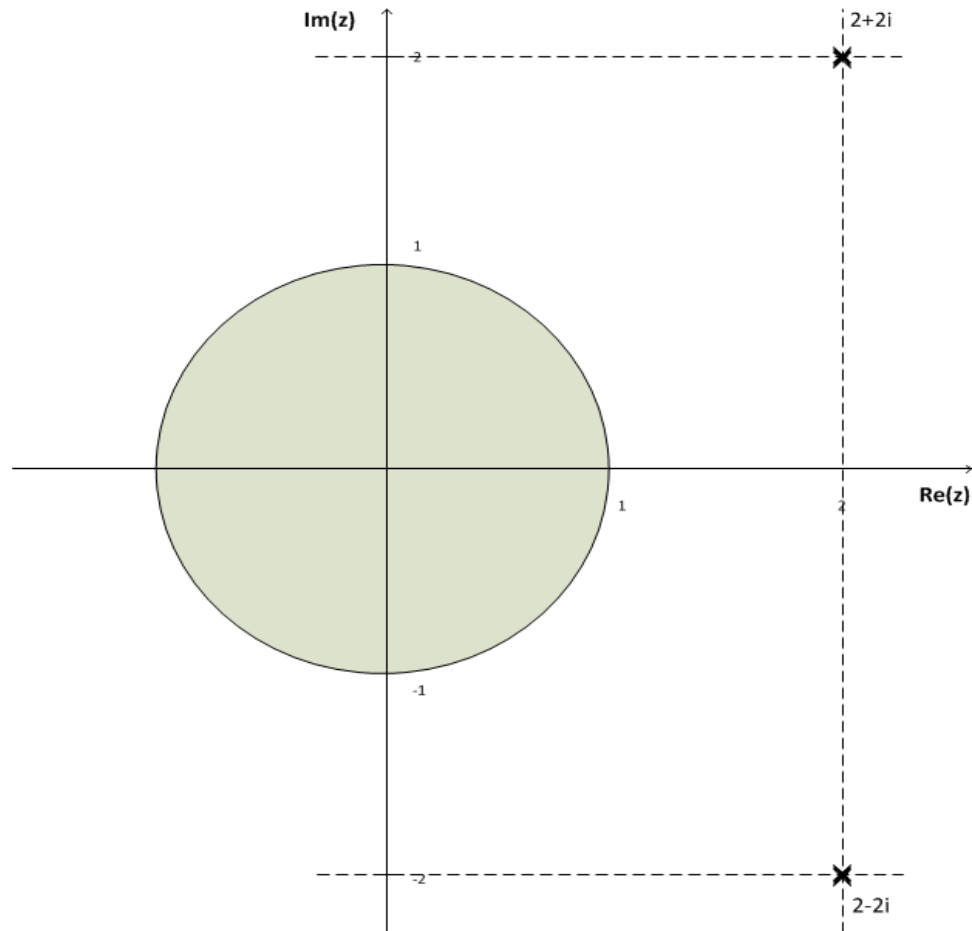
$$(1 - 2z^{-1} + 2z^{-2}) : (1 - 4z^{-1} + 8z^{-2}) = 1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} - 8z^{-3} \dots$$

- delenie bezo zvyšku nie je možné, preto je sústava IIR
- hodnoty koeficientov sa neustále zvyšujú, preto je sústava zároveň aj nestabilná

# IIR Sústavy - stabilizácia

7

- podľa rozloženia pólov je možné vidieť, že sústava je nestabilná, preto dôjde k jej rozkmitaniu, sústavu je preto nevyhnutné stabilizovať





# IIR Sústavy - stabilizácia

8

- **Metóda fázovacích článkov :**
  - využitie pri stabilizácii nestabilných sústav
  - póly nachádzajúce sa mimo jednotkovej kružnice je možné nahradiť vhodnými pólmi nachádzajúcimi sa v jej vnútri

## NEVÝHODY :

- nemožnosť stabilizovať póly nachádzajúce sa na jednotkovej kružnici (sústava na hranici stability)
- nemožnosť stabilizovať póly nachádzajúce sa blízko jednotkovej kružnice (  $0.9 < \text{abs}(\text{nestabilného koreňa}) < 1.1$  )

# IIR Systavy - stabilizácia

9

- metóda fázovacích článkov :

$$\hat{H}(z) = H(z) \cdot H_s(z)$$

$\hat{H}(z)$  = výsledná stabilizovaná sústava

$H(z)$  = pôvodná nestabilná sústava

$H_s(z)$  = fázovací článok, použitý na stabilizáciu sústavy

- čitateľ  $H_s(z)$  obsahuje nuly, ktoré sú rovnaké ako nestabilné póly
- menovateľ  $H_s(z)$  obsahuje stabilizované póly, ktoré sa použijú ako náhrada za pôvodne nestabilné póly

# IIR Sústavy - stabilizácia

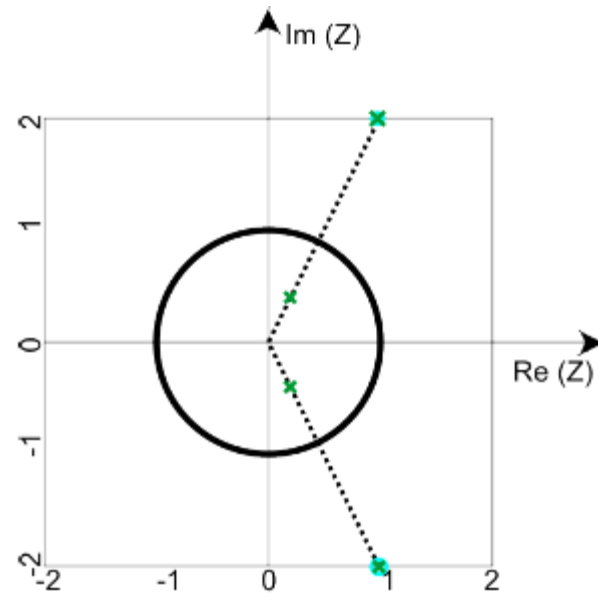
10

- výpočet hodnôt stabilných koreňov :  
( 2 komplexne združené korene)

$\overline{z_{nrx}}$  – komplexne združený nestabilný koreň

$z_{srx}$  – stabilný koreň

$$z_{srx} = \frac{1}{z_{nrx}}$$



- Nová stabilná sústava bude mať magnitúdovú charakteristiku zhodnú s pôvodnou sústavou. Pozícia núl sa oproti pôvodnej prenosovej funkcii nemení. Póly pôvodnej prenosovej funkcie a nuly fázovacieho článku sa navzájom znegujú (vyrušia).

# IIR Filtre - stabilizácia

11

Príklad (pokračovanie) :

$$z_{n1} = 2 + 2i$$

$$z_{n2} = 2 - 2i$$

$$z_{s1} = \frac{1}{2 - 2i} = \frac{1}{4} + \frac{1i}{4}$$

$$z_{s2} = \frac{1}{2 + 2i} = \frac{1}{4} - \frac{1i}{4}$$

$$k = \prod_{i=1}^u |z_{ni}| \Rightarrow k = (\sqrt{4+4}) \cdot (\sqrt{4+4}) = \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} = 8$$

$$H_s(z) = \frac{1}{k} \cdot \frac{(1 - (2 + 2i)z^{-1}) \cdot (1 - (2 - 2i)z^{-1})}{\left(1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\right)z^{-1}\right)}$$

# IIR Filtre - stabilizácia

12

$$H_s(z) = \frac{1}{8} \cdot \frac{(1 - (2 + 2i)z^{-1}) \cdot (1 - (2 - 2i)z^{-1})}{\left(1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\right)z^{-1}\right)}$$

$$\hat{H}(z) = H(z) \cdot H_s(z)$$

$$\hat{H}(z) = \frac{(1 - (1 - i)z^{-1}) \cdot (1 - (1 + i)z^{-1})}{(1 - (2 + 2i)z^{-1}) \cdot (1 - (2 - 2i)z^{-1})} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{(1 - (2 + 2i)z^{-1}) \cdot (1 - (2 - 2i)z^{-1})}{\left(1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\right)z^{-1}\right)}$$

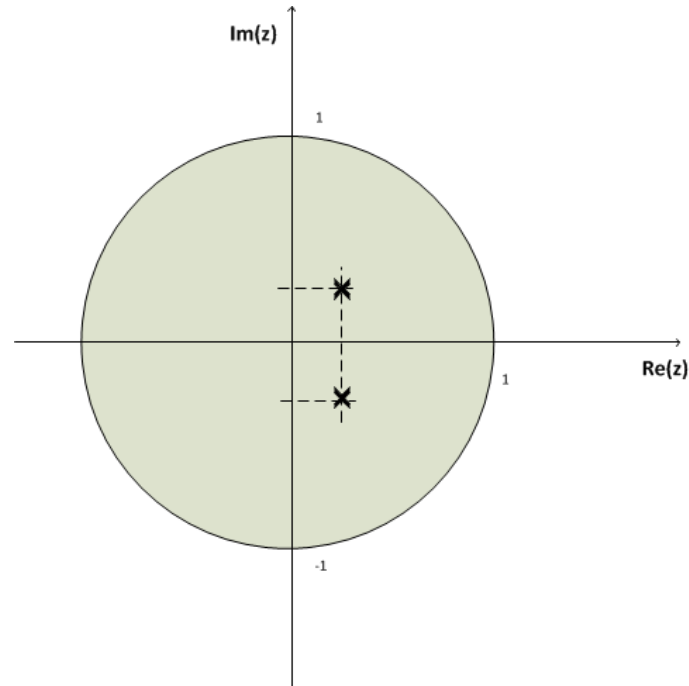
$$\hat{H}(z) = \frac{1}{8} \cdot \frac{(1 - (1 - i)z^{-1}) \cdot (1 - (1 + i)z^{-1})}{\left(1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\right)z^{-1}\right)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

# IIR Filtre - stabilizácia

13

Výsledná stabilizovaná sústava:

$$\hat{H}(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2}}{8 - 4z^{-1} + 1z^{-2}}$$

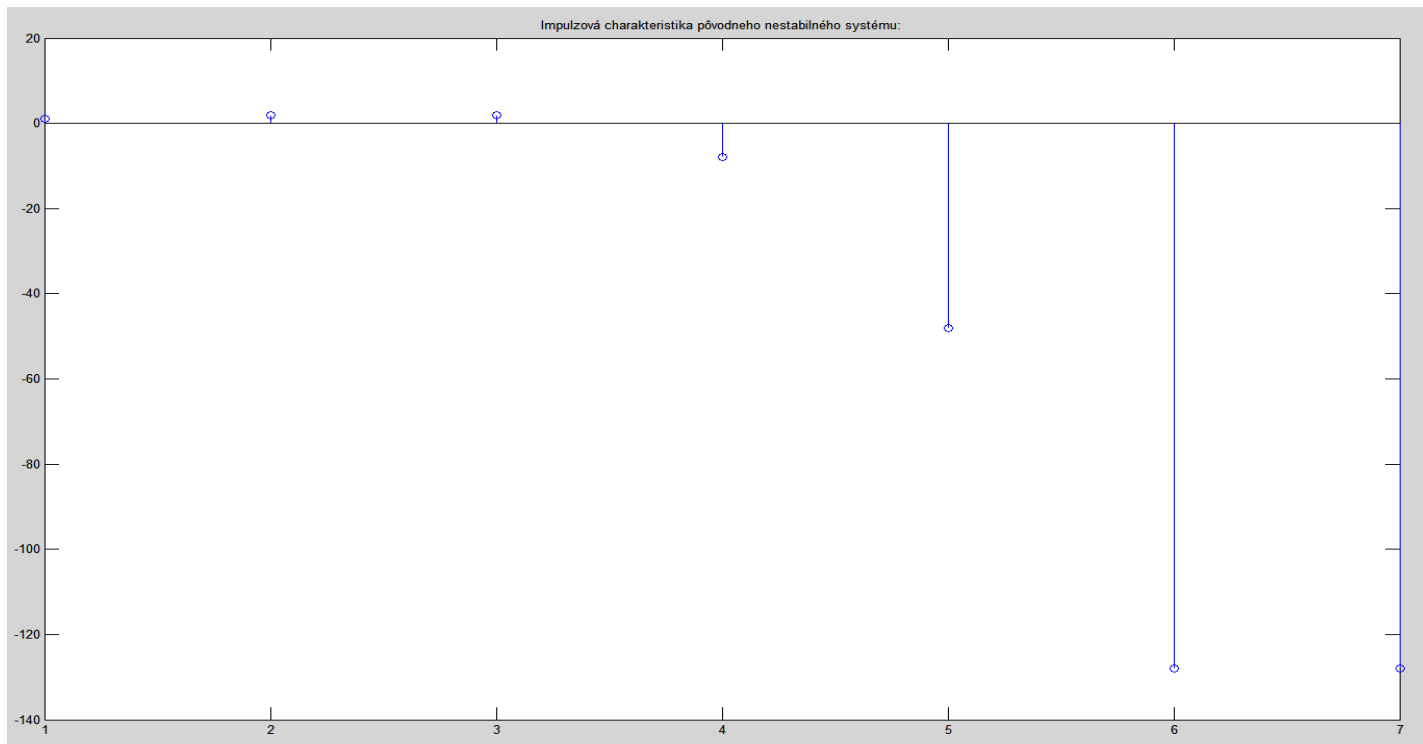


- to, že sústava je nestabilná je možné vidieť na impulzovej charakteristike sústavy, čo je aj zobrazené na nasledujúcich dvoch obrázkoch

# IIR Filtre - stabilizácia

14

- príklad nestabilnej impulzovej charakteristiky (charakteristika nestabilnej sústavy z predchádzajúceho príkladu)
- na danom obrázku je možné vidieť, že hodnoty impulzovej charakteristiky sústavy neustále narastajú, sústava sa teda rozkmitá



# IIR Filtre - stabilizácia

15

- príklad stabilnej impulzovej charakteristiky (sústava z predchádzajúceho príkladu stabilizovaná metódou fázovacích článkov):
- na danom obrázku je možné vidieť, že sústava sa ustáli, nedôjde k jej rozkmitaniu

