

Zbierka Príkladov z ADSS2

9. LDKI - Prenosová funkcia IIR systémov [1]

Zadanie

Je zadaná prenosová funkcia IIR filtra, určte či je daný systém stabilný a svoje tvrdenie odôvodnite.

Prenosová funkcia IIR filtra:

$$H(z) = \frac{z + 2}{z^2 + \frac{1}{9}}$$

Riešenie

Filtre s nekonečnou impulzovou odpoveďou (IIR) sa od FIR filtrov odlišujú najmä v tom, že výstupný signál závisí nielen od vstupného, ale aj od predchádzajúcich vzoriek výstupného signálu. Diferenčná rovnica opisujúca činnosť IIR filtrov vyzerá nasledovne:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot x(n-k) - \sum_{k=0}^{N-1} b_k \cdot y(n-k)$$

Jej Z transformáciou dostávame:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot z^{-k} \cdot X(z) - \sum_{k=0}^{N-1} b_k \cdot z^{-k} \cdot Y(z)$$

a odtiaľ môžeme vyjadriť prenosovú funkciu systému:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \cdot z^{-k}}$$

Kde \mathbf{a} a \mathbf{b} pre rôzne hodnoty k sú váhové koeficienty vstupného a výstupného signálu, ktoré predstavujú rôzne hodnoty násobičiek v modeloch filtrov. Hodnotu $k < 0$ neberieme do úvahy, pretože IIR filtre sú kauzálne systémy. Ako je vidieť, tu prenosovú funkciu predstavuje podiel dvoch polynómov.

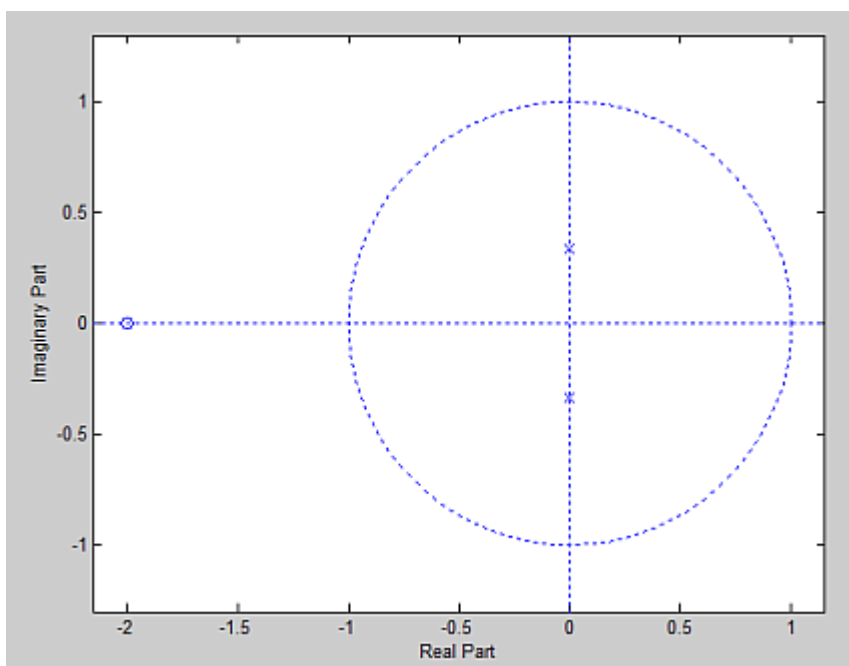
$$H(z) = a_0 \frac{\prod_{k=1}^{N-1} (1 - z_{0k} \cdot z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N-1} (1 - z_{pk} \cdot z^{-1})}$$

Korene čitateľa predstavujú **nulové body** a korene menovateľa **póly** prenosovej funkcie. Nás bude zaujímať najmä umiestnenie koreňov menovateľa, ktoré rozhoduje o stabilite systému, je dôležité aby boli umiestnené vnútri jednotkovej kružnice a nie veľmi blízko jej hraníc, pretože v tom prípade je systém stabilný. Ak sú mimo nej, systém je nestabilný a ak na nej, tak je na hranici stability, čiže za istých podmienok môže byť stabilný, za iných nie.

V našom prípade je situácia jednoduchá, prenosovú funkciu môžeme upraviť:

$$H(z) = \frac{z + 2}{z^2 + \frac{1}{9}} = \frac{z + 2}{(z - \frac{1}{3}j) \cdot (z + \frac{1}{3}j)}$$

A tu vidíme, že nulový bod je síce mimo jednotkovej kružnice, ale póly sú hlboko v nej, čiže náš systém je stabilný. Zobrazenie rozmiestnenia je koreňov $H(z)$:



[Spät'](#)