

Zbierka Príkladov z ADSS2

5. Prenosová funkcia LDKI systému, vplyv koreňov na frekvenčné charakteristiky, konvolúcia [1]

Zadanie

Využite základnú definíciu transformácie Z pre určenie obrazu geometrickej postupnosti

$$x(n) = \begin{cases} 0 & \text{pre } n = -1, -2, -3, \dots \\ a^n & \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

kde a je reálne číslo.
Zistite aj oblasť konvergence.

Riešenie

Zo všeobecnej rovnice

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

dostaneme:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot z^{-1})^n$$

a po rozpísaní:

$$X(z) = 1 + a \cdot z^{-1} + a^2 \cdot z^{-2} + \dots + a^N \cdot z^{-N} + \dots$$

N -tý čiastočný súčet vieme vyjadriť pomocou známeho vzťahu

$$X_N(z) = \frac{1 - (a \cdot z^{-1})^N}{1 - a \cdot z^{-1}}$$

Zistíme oblasť konvergence:

$$X(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} X_N(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - (a \cdot z^{-1})^N}{1 - a \cdot z^{-1}}$$

ak $|a \cdot z^{-1}| < 1$, potom rovnica

$$X_N(z) = \frac{1 - (a \cdot z^{-1})^N}{1 - a \cdot z^{-1}}$$

nadobudne tvar:

$$X(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} X_N(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}}$$

Tu vidíme, že limita existuje a je konečná, teda postupnosť konverguje ak:

$$|a \cdot z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > a$$

Ak $|a \cdot z^{-1}| > 1$, potom

$$\lim_{N \rightarrow \infty} X_N(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - (a \cdot z^{-1})^N}{1 - a \cdot z^{-1}} \rightarrow \infty$$

Z toho je zrejmé, že postupnosť v oblasti vymedzenej týmto vzťahom diverguje, ak:

$$|a \cdot z^{-1}| > 1 \Rightarrow |z| < a$$

Zakreslenie oblasti konvergenie a divergencie obrazu postupnosti $x(n) = a^n$:

