Číslicové spracovanie signálov II

2D filtrácia

Gregor Rozinaj
Katedra telekomunikácií
FEI STU Bratislava

Príprava fólií: Anton Marček

2D filtre (1/2)

Klasifikácia filtrov

- FIR
- IIR

Postup pri návrhu filtra

- **Špecifikácia filtra** - v závislosti od konkrétnej aplikácie
- **Návrh filtra** - určenie $h(n_1,n_2)$, resp. $H(z_1,z_2)$
- **Implementácia filtra** - realizácia diskrétneho systému s danou $h(n_1,n_2)$, resp. $H(z_1,z_2)$

2D filtre (2/2)

Praktické obmedzenia

- $h(n_1,n_2)$ - reálne
- stabilita sústavy $$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}\left|h(n_1,n_2)\right|<\infty$$

FIR filtre - Vlastnosti (1/5)

Vlastnosti FIR filtrov - filtre s ***nulovou fázou***

$$H(\Omega_1,\Omega_2)=\bar{H}(\Omega_1,\Omega_2)$$

Na základe symetrie FT

$$h(n_1,n_2)=\bar{h}(-n_1,-n_2)$$

pre reálne $h(n_1,n_2)$

$$h(n_1,n_2)=h(-n_1,-n_2)$$

Impulzová charakteristika filtra s nulovou fázou je symetrická vzhľadom na začiatok súradnicovej sústavy.

FIR filtre - Vlastnosti (2/5)

- Nech $h(n_1,n_2)$ je impulzová charakteristika FIR filtra s nulovou fázou. Potom:

$$H(\Omega_1,\Omega_2) = \sum_{(n_1,n_2)\in R_h}\sum h(n_1,n_2)e^{-j\Omega_1 n_1}e^{-j\Omega_2 n_2} =$$

$$= h(0,0) + \sum_{(n_1,n_2)\in R_h'}\sum h(n_1,n_2)e^{-j\Omega_1 n_1}e^{-j\Omega_2 n_2} + \sum_{(n_1,n_2)\in R_h''}\sum h(n_1,n_2)e^{-j\Omega_1 n_1}e^{-j\Omega_2 n_2}$$

$R_h = (0,0) \cup R_h' \cup R_h''$

R_h $-$ *oblasť nenulových* $h(n_1,n_2)$

R_h'' *je* R_h' *zrkadlená cez zaciatok súradnicovej sústavy*

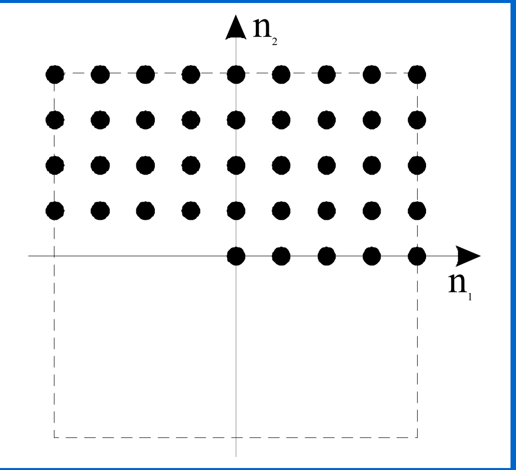
FIR filtre - Vlastnosti (3/5)

- S ohľadom na symetriu impulzovej char.:

$$H(\Omega_1,\Omega_2)=h(0,0)+\sum_{(n_1,n_2)\in R'_h}\sum\left(h(n_1,n_2)e^{-j\Omega_1 n_1}e^{-j\Omega_2 n_2}+h(-n_1,-n_2)e^{j\Omega_1 n_1}e^{j\Omega_2 n_2}\right)=$$

$$=h(0,0)+\sum_{(n_1,n_2)\in R'_h}\sum 2h(n_1,n_2)\cos(\Omega_1 n_1+\Omega_2 n_2)$$

=> asi polovica bodov $h(n_1,n_2)$ je nezávislá - ***„twofold symmetry“***

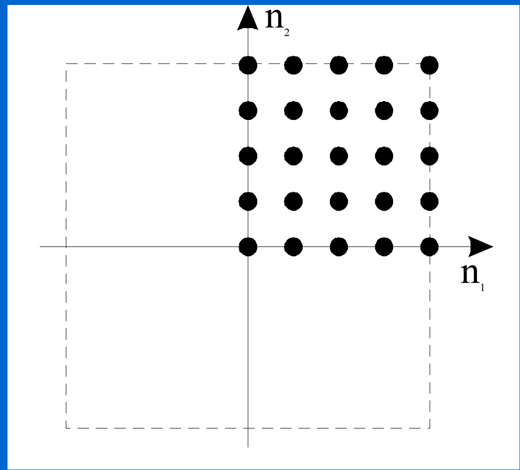


FIR filtre - Vlastnosti (4/5)

- ***„fourfold symmetry“***

$$h(n_1,n_2)=h(-n_1,n_2)=h(n_1,-n_2)$$

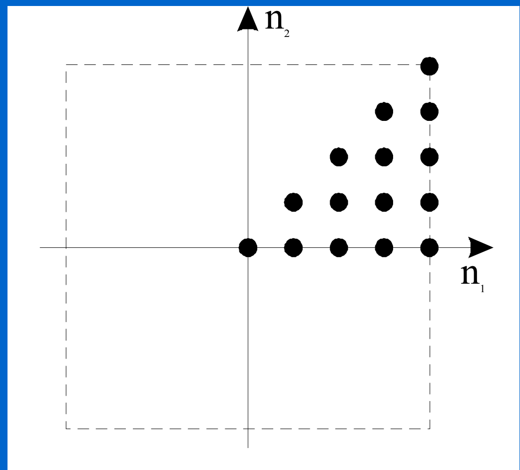
$$H(\Omega_1,\Omega_2)=H(-\Omega_1,\Omega_2)=H(\Omega_1,-\Omega_2)$$



- ***„eightfold symmetry“***

$$h(n_1,n_2)=h(-n_1,n_2)=h(n_1,-n_2)=h(n_2,n_1)$$

$$H(\Omega_1,\Omega_2)=H(-\Omega_1,\Omega_2)=H(\Omega_1,-\Omega_2)=H(\Omega_2,\Omega_1)$$



FIR filtre - Vlastnosti (5/5)

Vzhľadom na rôzne typy symetrie sa znižuje počet nezávislých parametrov, ktoré majú byť pri návrhu filtra určené a tiež sa znižuje počet aritmetických operácií potrebných na ich implementáciu

FIR filtre - Špecifikácia (1/8)

- Vo väčšine prípadov sú požiadavky určené vo frekvenčnej oblasti

$$H(\Omega_1,\Omega_2) = H(\Omega_1 + 2\pi,\Omega_2) = H(\Omega_1,\Omega_2 + 2\pi)$$
$$H(\Omega_1,\Omega_2) \quad pre \quad -\pi \le \Omega_1 \le \pi, -\pi \le \Omega_2 \le \pi$$
$$\text{úplne určuje } H(\Omega_1,\Omega_2)$$

- $h(n_1,n_2)$ - reálne => $H(\Omega_1,\Omega_2) = \overline{H}(-\Omega_1,-\Omega_2)$

$$H(\Omega_1,\Omega_2) \quad pre \quad -\pi \le \Omega_1 \le \pi, 0 \le \Omega_2 \le \pi$$
$$\text{úplne určuje } H(\Omega_1,\Omega_2) \text{ pre } \forall(\Omega_1,\Omega_2)$$

FIR filtre - Špecifikácia (2/8)

- Frekvenčná char. je kruhovo symetrická, ak:

$$H(\Omega_1,\Omega_2)=\begin{cases} f\left(\Omega_1^2+\Omega_2^2\right) & pre \quad \sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2}\le\pi \\ kon\check{s}t. & inde\ v\ r\acute{a}mci \quad -\pi\le\Omega_1\le\pi,\ -\pi\le\Omega_2\le\pi \end{cases}$$

- Impulzová char. je kruhovo symetrická, ak:

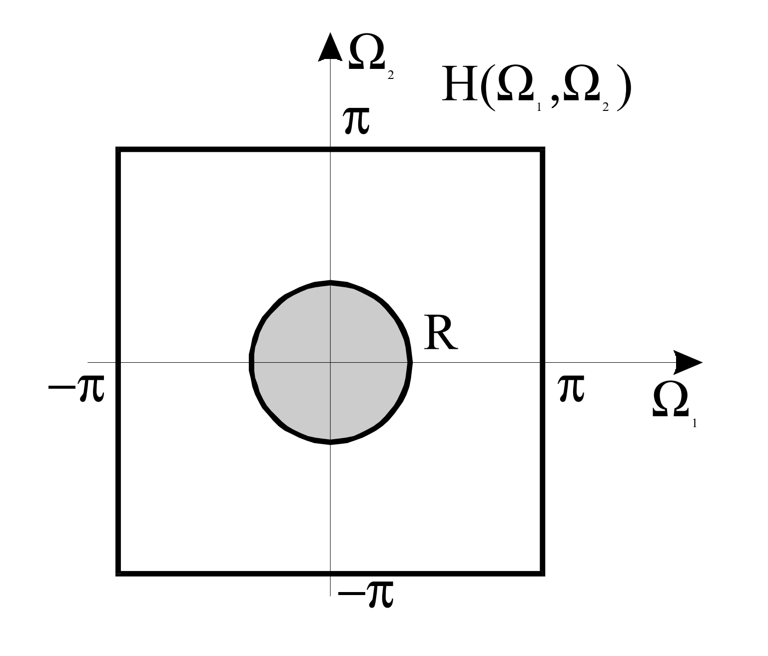
$$h(n_1,n_2)=f\left(n_1^2+n_2^2\right)$$

Ak $H(\Omega_1,\Omega_2)$ je kruhovo symetrická, potom $h(n_1,n_2)$ je kruhovo symetrická.

Ak $h(n_1,n_2)$ je kruhovo symetrická, nevyplýva z toho kruhová symetria $H(\Omega_1,\Omega_2)$.

FIR filtre - Špecifikácia (3/8)

- ***Ideálny kruhovo symetrický DP filter***



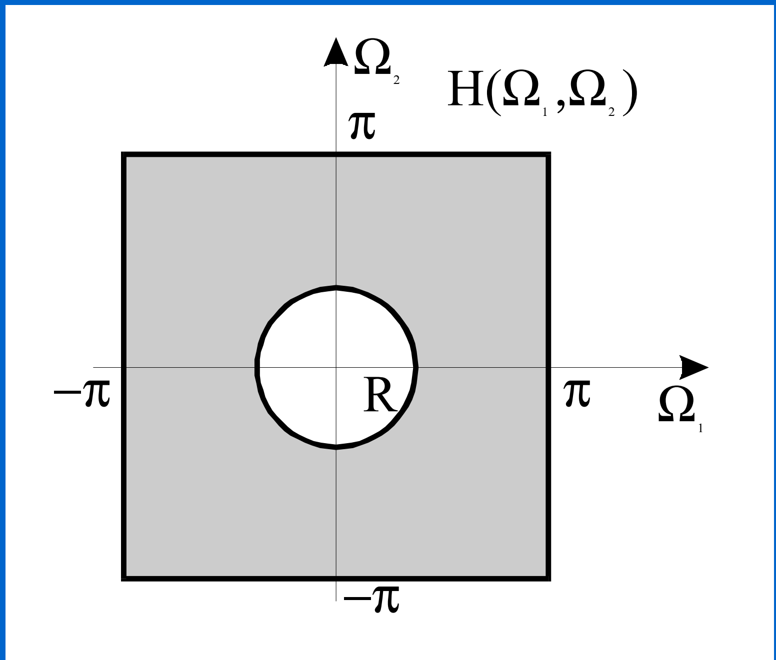
$$h_{DP}(n_1,n_2)=\frac{R}{2\pi\sqrt{n_1^2+n_2^2}}J_1\left(R\sqrt{n_1^2+n_2^2}\right)$$

$J_1(x)$ - Besselova fcia prvého druhu a prvého rádu

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^3\cdot 1!\cdot 2!}+\frac{x^5}{2^5\cdot 2!\cdot 3!}-\frac{x^7}{2^7\cdot 3!\cdot 4!}+\cdots$$

FIR filtre - Špecifikácia (4/8)

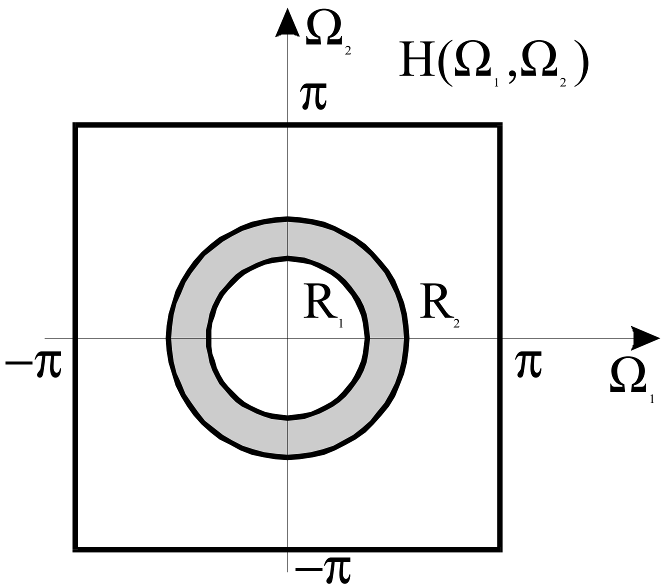
- ***Ideálny kruhovo symetrický HP filter***



$$h_{HP}(n_1,n_2)=u(n_1,n_2)-h_{DP}(n_1,n_2)$$

FIR filtre - Špecifikácia (5/8)

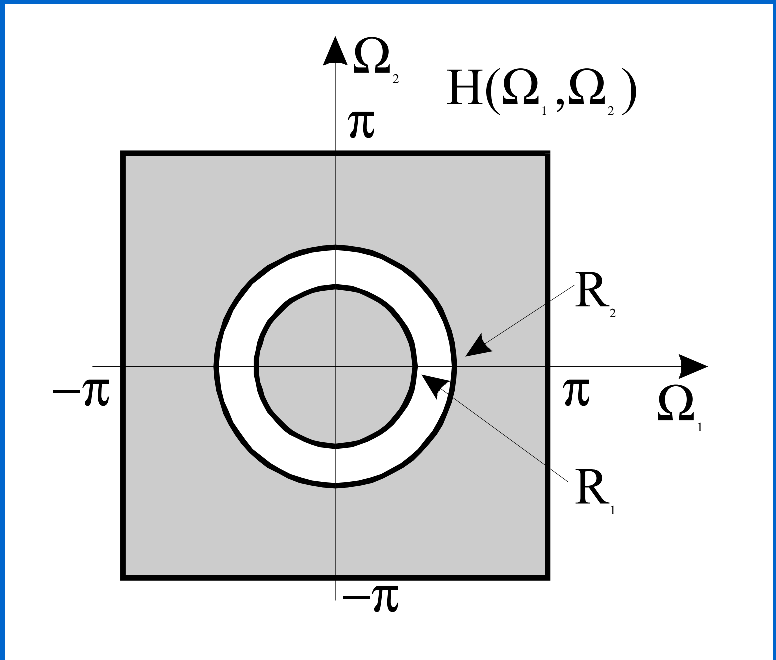
- ***Ideálny kruhovo symetrický PP filter***



$$h_{PP}(n_1,n_2)=\frac{R_2}{2\pi\sqrt{n_1^2+n_2^2}}J_1\left(R_2\sqrt{n_1^2+n_2^2}\right)-\frac{R_1}{2\pi\sqrt{n_1^2+n_2^2}}J_1\left(R_1\sqrt{n_1^2+n_2^2}\right)$$

FIR filtre - Špecifikácia (6/8)

- ***Ideálny kruhovo symetrický PZ filter***



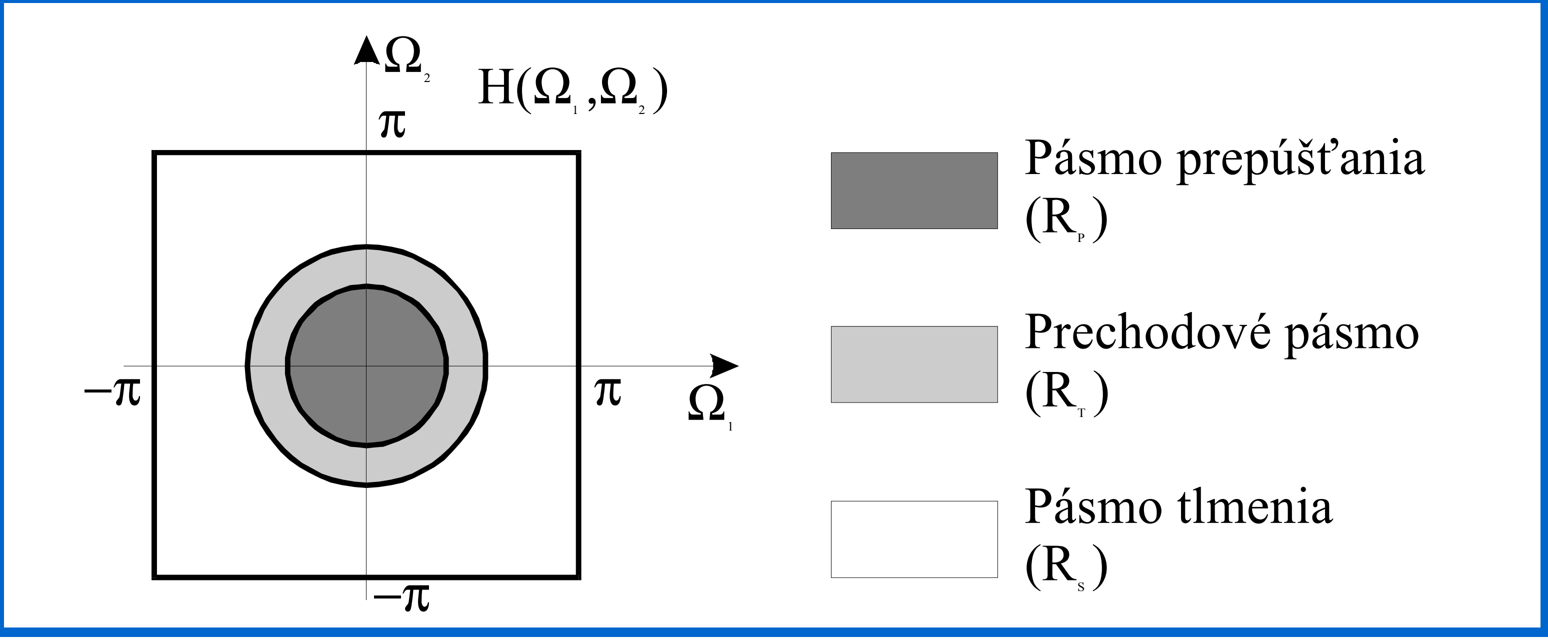
$$h_{PZ}(n_1,n_2)=u(n_1,n_2)-h_{PP}(n_1,n_2)$$

FIR filtre - Špecifikácia (7/8)

- *$H(\Omega_1,\Omega_2)$* - komplexná funkcia => určiť
  - magnitúdu
  - fázu
- FIR filtre - nulová fáza => určiť len
  - magnitúdu
- ***Tolerančný diagram*** - špecifikácia požadovanej magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky

FIR filtre - Špecifikácia (8/8)

Tolerančný diagram DP filtra



$$1-\delta_p \le \left|H(\Omega_1,\Omega_2)\right| \le 1+\delta_p \quad pre \quad (\Omega_1,\Omega_2)\in R_p \quad (pásmo\ prepústania)$$

$$-\delta_s \le \left|H(\Omega_1,\Omega_2)\right| \le \delta_s \quad pre \quad (\Omega_1,\Omega_2)\in R_s \quad (pásmo\ tlmenia)$$

FIR filtre - Návrh (1/10)

Metódy návrhu

- Oknová metóda
- Metóda frekvenčného vzorkovania
- Metóda frekvenčnej transformácie
- Metóda návrhu optimálneho filtra

FIR filtre - Návrh (2/10)

Oknová metóda

- $H_d(\Omega_1,\Omega_2)$ - požadovaná frekv. charakteristika
- $h_d(n_1,n_2)=IFT[H_d(\Omega_1,\Omega_2)]$ - požadovaná impulzová char. - vo všeobecnosti nekonečná
- prenásobením $h_d(n_1,n_2)$ tzv. oknovou funkciou získame výslednú konečnú impulzovú char.

$$h(n_1,n_2)=h_d(n_1,n_2)\cdot w(n_1,n_2)$$

FIR filtre - Návrh (3/10)

Oknová metóda (pokrač.)

- Ak $h_d(n_1,n_2)$ aj $w(n_1,n_2)$ sú symetrické oproti začiatku súradnicovej sústavy, tak aj výsledná charakteristika $(h\,(n_1,n_2))$ bude symetrická a filter bude mať nulovú fázu

$$H(\Omega_1,\Omega_2) = H_d(\Omega_1,\Omega_2) \otimes W(\Omega_1,\Omega_2) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\theta_1=-\pi}^{\pi} \int_{\theta_2=-\pi}^{\pi} H_d(\theta_1,\theta_2) W(\Omega_1-\theta_1,\Omega_2-\theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2$$

- $H\,(\Omega_1,\Omega_2)$ - „zjemnená“ verzia $H_d(\Omega_1,\Omega_2)$

FIR filtre - Návrh (4/10)

Oknová metóda (pokrač.)

- 2D okná
  - separovateľné (2x1D okno)
  - na báze rotujúceho 1D okna
- *Separovateľné 2D okno*

$$w(n_1,n_2)=w_1(n_1)\cdot w_2(n_2)=w_c(t_1,t_2)\big|_{t_1=n_1T_1,t_2=n_2T_2}$$

w_1, w_2 - 1D oknové sekvencie, resp. vzorky 1D analógovej oknovej funkcie

FIR filtre - Návrh (5/10)

Oknová metóda (pokrač.)

- Ak je frekvenčná charakteristika požadovaného filtra separovateľná, potom navrhneme 2 1D filtre $h_1(n_1)$ a $h_2(n_2)$ a vynásobíme ich

$$h(n_1, n_2) = h_1(n_1) \cdot h_2(n_2)$$

- Ak boli oba 1D filtre navrhnuté oknovou metódou, je tento postup ekvivalentný s použitím 2D separovateľného okna.

FIR filtre - Návrh (6/10)

Oknová metóda (pokrač.)

- *Rotujúce 1D okno*

$$w(n_1,n_2)=w_c(t_1,t_2)\Big|_{t_1=n_1T_1,\,t_2=n_2T_2}$$

$$w_c(t_1,t_2)=w_a(t)\Big|_{t=\sqrt{t_1^2+t_2^2}}$$

$w_a(t)$ - analógové 1D okno => analógové 2D okno $w_c(t_1,t_2)$ sme získali rotáciou 1D analógového okna

$$w_a(t)=\begin{cases}1 & |t|<\tau\\ 0 & inak\end{cases}$$ - pravoúhle okno

$$w_a(t)=\begin{cases}0.54+0.46\cos(\pi t/\tau) & |t|<\tau\\ 0 & inak\end{cases}$$ - Hammingovo okno

FIR filtre - Návrh (7/10)

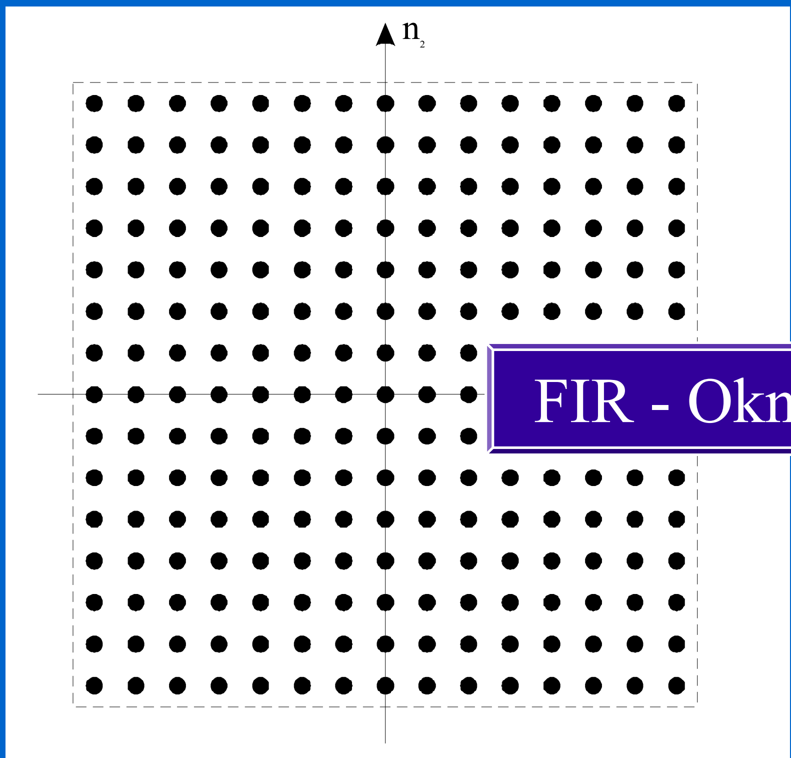
Oknová metóda (pokrač.)

- Postup
  - požadovaná $H_d(\Omega_1,\Omega_2)$
  - $h_d(n_1,n_2)=IFT[H_d(\Omega_1,\Omega_2)]$
  - voľba okna - $w(n_1,n_2)$
  - $h(n_1,n_2)= h_d(n_1,n_2)w(n_1,n_2)$

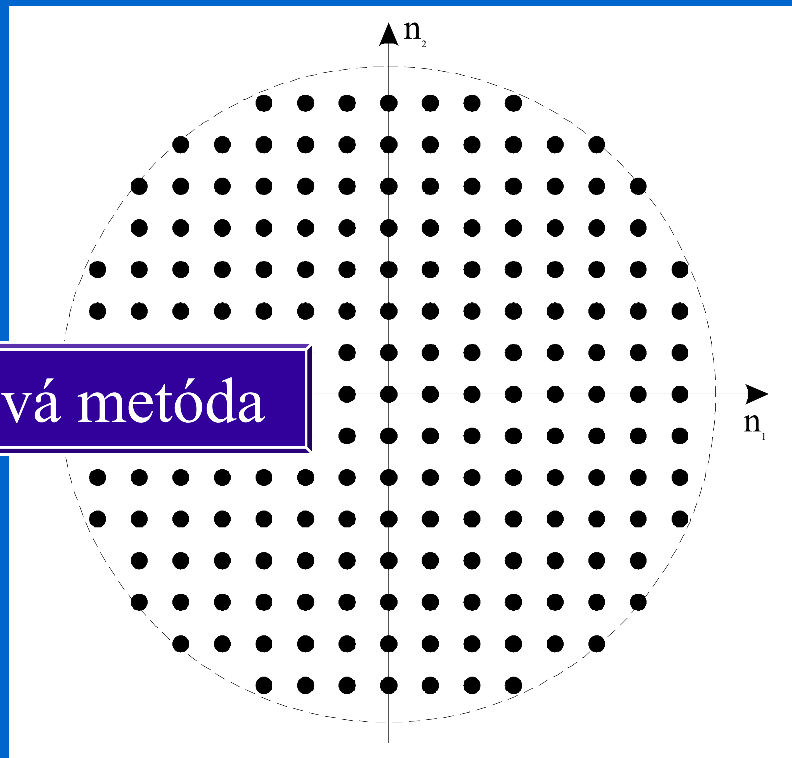
FIR filtre - Návrh (8/10)

Oknová metóda (pokrač.) - príklady okien

Separovateľné 2D pravoúhle



Rotujúce 1D pravoúhle



FIR - Oknová metóda

FIR filtre - Návrh (9/10)

Metóda frekvenčného vzorkovania

- $H_d(\Omega_1,\Omega_2)$ - požadovaná frekv. charakteristika je rovnomerne vzorkovaná => $H'(k_1,k_2)$
- $H'(k_1,k_2)$ - transformovaná pomocou IDFT do priestorovej oblasti => $h'(n_1,n_2)$
- $h'(n_1,n_2)$ - posuv do začiatku súradnicovej sústavy => $h(n_1,n_2)$ symetrické okolo (0,0)

FIR filtre - Návrh (10/10)

Metóda frekvenčného vzorkovania (pokrač.)

1. $$H'(k_1,k_2)=H_d(\Omega_1,\Omega_2)e^{-j\Omega_1\frac{N_1-1}{2}}e^{-j\Omega_2\frac{N_2-1}{2}}\Bigg|_{\Omega_1=\frac{2\pi}{N_1}k_1,\Omega_2=\frac{2\pi}{N_2}k_2}$$

$$0\le k_1\le N_1-1,\ 0\le k_2\le N_2-1$$
$$N_1,N_2\quad -nep\acute{a}rne$$

2. $$h'(n_1,n_2)=IDFT[H'(k_1,k_2)]$$

3. $$h(n_1,n_2)=h'\left(n_1+\frac{N_1-1}{2},n_2+\frac{N_2-1}{2}\right)$$ - posuv do začiatku

- Na zmenšenie prekmitov v pásme prepúšťania a tlmenia je vhodné definovať prechodové pásmo