ORTOGONÁLNE TRANSFORMÁCIE

Ortogonálne funkcie

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{y_k}_{\text{váha s akou sa signál nachádza v } x(t)\text{; môže byť aj } 0} \cdot u_k(t) \qquad k = 0,1,2,\dots,N-1$$

Def: Spojitá OT

Systém $u_i(t)$ je ortogonálny ak

$$u_i(t) \neq f(u_j(t)) \quad j \neq i$$

Matematicky: $$\int_{t_1}^{t_2} u_i(t) \cdot u_j(t)\, dt = 0 \quad i \neq j$$

$$\int_{t_1}^{t_2} u_i^2(t)\, dt = U_i$$ – dáva nenulovú hodnotu

$U_i = 1 \rightarrow$ ortonormálna funkcia

Váha: $$y_k = \frac{1}{U_k} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \overline{u_k(t)}\, dt$$

Def: Diskrétna OT

Systém $u_k(n)$ je ortogonálny ak

$$\sum_{n=0}^{M-1} u_i(n) \cdot u_j(n) \stackrel{!}{=} 0 \quad i \neq j$$

$$\sum_{n=0}^{M-1} u_i^2(n) = U_i \qquad U_i = 1 \rightarrow \text{ortonormálna funkcia}$$

Def: Úplná množina OF

- Spojitá: ak $\nexists\, u(t)$ také, že $\int_{t_1}^{t_2} u(t) \cdot u_k(t)\, dt = 0$ pre $k = 0,1,\dots$
- Diskrétna: ak $\nexists\, u(n)$ také, že $\sum_{n=0}^{M-1} u(n) \cdot u_k(n) = 0 \quad k = 0,1 \dots M-1$

(PR) Navrhnite úplnú množinu diskrét. OF dĺžky $N=3$ pričom každá funkcia má práve:

a) 3 nenulové prvky

b) 2 —//—

c) 1 —//—

a)
$$\begin{matrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{matrix}$$

→ každý riadok musí byť ortogonálny s každým čiže ideme riešiť rovnicu o 3 neznámych

$$\begin{aligned} a + b + 1 &= 0 \Rightarrow a = -b - 1 \\ a + 1 + c &= 0 \\ 1 + b + c &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 - b + 1 + c &= 0 \\ 1 + b + c &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -b + c &= 0 \\ 1 + b + c &= 0 \end{aligned}$$

$$c = -\frac{1}{2}$$

$$1 + b + c = 0$$
$$1 + b - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$
$$a = +\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{matrix}}$$

skúška:
$$\left[-\tfrac{1}{2}\cdot 1\right] + \left[1\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right] + \left[1\cdot 1\right] = 0$$
$$\left[-\tfrac{1}{2}\cdot 1\right] + \left[1\cdot 1\right] + \left[1\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right] = 0$$
$$\left[1\cdot 1\right] + \left[-\tfrac{1}{2}\cdot 1\right] + \left[1\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right] = 0$$

b)
$$\begin{matrix} 1 & j & 0 \\ j & -1 & 0 \\ -j & 1 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & \sqrt{-1} & 0 \\ -\sqrt{-1} & 1 & 0 \\ \sqrt{-1} & -1 & 0 \end{matrix}$$

→ tam sa nedá moc čo počítať.

c)
$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

(PR) Navrhnite analyticky neúplný systém diskrétnych OF dĺžky $N = 8$

→ Neúplný systém je taký, že sa dá robiť len aproximácia

→ Na prednáške sme to mali uvedené ako Rademacherovu funkciu definovanú takto:

$$rad_0(t) = 1 \qquad t \in \langle 0, 1)$$

$$rad_1(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle 0, \frac{1}{2}) \\ -1 & t \in \langle \frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

$$rad_k(t) = rad_1(2^{k-1} \cdot t)$$

Chceme dĺžku $N = 8$, takže musíme spraviť:

$$\underbrace{2^k = N \Rightarrow k = 3}_{rad_3(t)}$$

$$rad_2(t) = rad_1(2^{2-1} \cdot t) = rad_1(2t)$$

$$rad_2(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle 0; \frac{1}{4}) \\ -1 & t \in \langle \frac{1}{4}; \frac{1}{2}) \\ 1 & t \in \langle \frac{1}{2}; \frac{3}{4}) \\ -1 & t \in \langle \frac{3}{4}; 1) \end{cases}$$

$$rad_3(t) = rad_1(2^{3-1} \cdot t) = rad_1(4t)$$

$$rad_3(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle 0, \frac{1}{8}); \langle \frac{2}{8}, \frac{3}{8}); \langle \frac{4}{8}, \frac{5}{8}); \langle \frac{6}{8}, \frac{7}{8}) \\ -1 & t \in \langle \frac{1}{8}, \frac{2}{8}); \langle \frac{3}{8}, \frac{4}{8}); \langle \frac{5}{8}, \frac{6}{8}); \langle \frac{7}{8}, 1) \end{cases}$$