

P

Wavelety a banky filtrov

Vypracovanie otázok na skúšku 2005 / 2006.

Hilbertove priestory a rozklady signálov	- 5 -
Veľkosť vektora, skriptá str. 118	- 5 -
Priama suma podpriestorov, skriptá str. 118	- 5 -
Ortogonalný doplnok, skriptá str. 118.....	- 5 -
Priestor $l_2(Z)$, skriptá str. 119	- 5 -
Priestor $L_2(R)$, skriptá str. 119.....	- 5 -
Ortonormálna báza	- 5 -
Čo sú biortogonálne resp. duálne bázy, skriptá str. 119 – 120.....	- 6 -
Ortogonalna projekcia (priemet) vektora x do vektora s , skriptá str. 120.....	- 6 -
Vlastnosť postupnej aproximácie, skriptá str. 121	- 6 -
Rámec, tesný rámec, skriptá str. 123, 124.....	- 7 -
Časovo - frekvenčná analýza a waveletová transformácia.....	- 8 -
Vlastnosti waveletov oproti Fourierovej transformácii z hľadiska časovo-frekvenčnej analýzy, skriptá str. 8 – 11; prednáška 1 (pred1.doc) ; prednáška 2 (02_pred2.doc).....	- 8 -
Čo je časovo - frekvenčná rovina, a časovo frekvenčné okno, skriptá str. 8; prednáška 1 - 9 -	- 9 -
Principálne - ako vyrátame stred a veľkosti strán časovo - frekvenčného okna ľubovoľnej funkcie a o čom nám to vypovedá.....	- 9 -
Čo je princíp neurčitosti, o čom hovorí, skriptá str. 11	- 10 -
Čo je to SWT?. Ako ju vypočítame(vzorce), skriptá str. 12	- 10 -
Pomocou akých dvoch operácií su formované bazové funkcie(+vzorce) pri SWT? Ako a prečo bazové funkcie normalizujeme?	- 11 -
Vlastnosti SWT – redundancia, obsah časovo-frekvenčného okna, prednáška 2 str. 13 - 11 -	- 11 -
Základné charakteristiky waveletov – kompaktná podpora, nulové momenty, regularita, skriptá str. 15	- 12 -
Škálogram, čo je to, na čo je to, ako vypočítam hodnoty v ňom ?, skriptá str. 14.....	- 12 -
Waveletové rady a rámce	- 13 -
ako sa odstraňuje redundancia SWT ? + vzorce, skriptá str. 16.....	- 13 -
Čo sú to waveletové rady, vzorec na ich výpočet, ako vyzerajú ich bazové funkcie a ako sú tvorené + vzorce	- 13 -
Aký je rozdiel medzi WF a WR ?	- 14 -
Aký je základný rozdiel medzi ortogonálnymi, biortogonálnymi a semiortogonálnymi waveletmi ? skriptá str. 22.....	- 14 -
Analýza signálu viacúrovňovým rozlíšením	- 15 -
Ako vyzerá hierarchia priestorov pri MRA?.....	- 15 -
Aproximačné a diferenčné priestory v MRA, nakreslite a vysvetlite prečo je to tak.....	- 15 -
Algoritmus výpočtu Waveletových radov + základne vzorce, obrázky.....	- 16 -
Delenie spektra analyzovaného diskretného signálu na subpasma, vysvetliť, nakresliť - 16 -	- 16 -
Škálogram v DWT, vlastností oproti škálogramu pri SWT	- 17 -
Nakreslite bazu Haarovej DWT pre danú dĺžku N	- 18 -
Ako vyzerajú hierarchie priestorov pri biortogonálnych waveletoch, aké sú vzťahy medzi podpriestormi + vzorce.....	- 20 -
Druhy waveletov	- 21 -
Poznať druhy waveletov a ich základne charakteristiky a oblasti použitia.....	- 21 -
Vlastnosti funkcie mierky a waveletov	- 22 -
Čo sú to $h_{mra}(n)$? Popíšte 3 ich základne vlastnosti pre ortonormálne wavelety.....	- 22 -
Kompaktna podpora čo platí ?	- 22 -
Súvisí pri ortonormálnych waveletoch ? Ako je to v spektre ?, skriptá str. 37.....	- 22 -
Základné vlastnosti pri ortonormálnych waveletoch - popísať z hruba	- 22 -
ak poznáme koeficienty pre zmenu mierky? + vzorec pre výpočet v čase aj frekvencii - 24 -	- 24 -

Čo sú spoj. / disk.nulové momenty + vzorec, vysvetliť na čo sú dobre nulové momenty waveletov a funkcii mierky	- 24 -
K- regulárny filter, čo je to ? Aké má základne vlastnosti ?, skriptá str. 41	- 25 -
Aký max. K regulárny môže byť ortogonálny filter dĺžky N ? Preto ?	- 25 -
Vyjadrite sa k waveletom a ich možnostiam zisťovať nespojitosti v signále a jeho deriváciách	- 26 -
Aké poznáte metódy návrhu ortogonálnych waveletov ? Ich základne princípy pár vetami. .-	26 -
B spline wavelety – čo je to, na čo to je dobre ?, skriptá str. 45	- 27 -
Čím sa líšia semiortogonálne a biortogonálne B-spline wavelety	- 27 -
Autokorelácia a spektrálna faktorizácia	- 28 -
Čo platí pre nuly (reálnej) autokorelačnej funkcie zo sekvencie $h(n)$? , skriptá str. 50..	- 28 -
Čo sú jej spektrálne faktory a aké majú vlastnosti, čo je to minimálna fáza ?	- 28 -
Aké sú všeobecné pravidla pri spektrálnej faktorizácii ?(reálne filtre, lin fáza, ortogonálne riešenie) skriptá str. 68	- 28 -
Ako by ste navrhli ortogonálne wavelety pomocou spekt. Faktorizácie?	- 28 -
Ako by ste navrhli biortogonálne wavelety pomocou spekt. Faktorizácie?	- 29 -
DWT v maticovom tvare	- 30 -
Štruktúra a rozmery transformačných matic pre analýzu a syntézu v ortogonálnom a biortogonálnom prípade, skriptá str. 33	- 30 -
Ukázať, ako sa pomocou takých matic rozloží signál na $c(n)$ a $d(n)$ a opäť zloží., skriptá str. 30	- 30 -
Čo robiť pri DWT na kraji signálu:	- 32 -
prehľad metód, skriptá str. 76	- 32 -
aké je to symetrické rozšírenie a prečo ho nemôžeme použiť pri ortogonálnych waveletoch -	32 -
wavelety na intervale, prečo, vlastnosti, spôsob výpočtu, skriptá str. 77	- 32 -
Banky filtrov	- 33 -
Čo je to decimácia a interpolácia, ich vzorce, vysvetliť ako fungujú, načo sú dobré, schémy	- 33 -
Decimácia a interpolácia, nakresliť, čo sa deje zo signalom vo frekvencii a čase, vysvetliť, 55,	- 33 -
Čo je banka filtrov, nakresliť schému BF a popísať jej časti, vysvetliť základne pojmy – subpásma, analyzáčna časť,	- 34 -
Aký signál a ako sa dá preniesť použitím iba DP časti banky filtrov bezstratovo? (čo platí pre signál, čo platí pre filtre, ...)	- 35 -
Prečo vo BF vzniká aliasing, pri akých filtroch vobec nevzniká aliasing, ako je principiálne možné už vzniknutý aliasing pri syntéze zrušiť?	- 35 -
Nakreslite príklad (v závislosti od OMEGY) rovnomerného a dyadického delenia pásiem v Banke filtrov pre $M=8$	- 36 -
Nakreslite 2 pásmovú banku filtrov a popíšte (nie vzorce) podmienky na úplnú rekonštrukciu (Čo je úplná rekonštrukcia?)	- 37 -
Čo je to polpásmový filter? Popíšte ho v Z rovine a čase. Ako formujú filtre vo FB pol pásmové filtre?	- 37 -
Aká je podmienka eliminácie aliasingu vo 2 pásmovej FB ? (vzorec) Ak je splnená ako vlastne môže byť výstupný signál ešte deformovaný ? Nakreslite príklad vo frekvencii. .-	38
-	
Koľko filtrov a ktoré stačí poznať v ortogonálnej / biortogonálnej banke filtrov aby sme vyrátali ostatne? A PREČO PRAVE TOĽKO A PRAVE TIE ?	- 38 -

Ak sú filtre pre analýzu a syntézu kauzálné/nekauzálné čo z toho vyplýva pre syntetizačné filtre a pre celkový prenos sústavou? Načrtnite nejaké príklady.	- 39 -
Aké sú vzájomné vzťahy medzi filtermi v ortogonálnej banke filtrov ? (nakreslite obrázok). Vysvetlite prečo je časové otočenie nutné.	- 39 -
Napíšte a popíšte matice vyjadrujúce decimáciu a interpoláciu vo FB. Ukážte ako sa používajú v transformačných maticiach. Čo pre ne znamená podmienka biortogonalita? -	40
-	
Banky filtrov, časť 2.....	- 42 -
Realizácia výpočtu dyadickej DWT a IDWT pomocou bánk filtrov – schéma, str.66...	- 42 -
Aký majú súvis $h_m(n)$ a $h(n)$ v analyzačnej časti. Prečo?	- 42 -
Aký je rozdiel medzi BF s úplnou rekonštrukciou a BF ktoré realizujú wavelety?.....	- 42 -
DLT a ich implementácie bankami filtrov + základne vzorce	- 43 -
Čo je polyfázový rozklad a polyfázove filtre, prečo to robíme, základne obrázky (blokové diagramy) vzorce	- 44 -
Polyfázová matice a ich komponenty, finalny tvar banky filtrov so zlúčenými polyfázovými maticami. Ako sú zlúčené matice? Podmienka úplnej rekonštrukcie.	- 44 -
Prečo je polyfázová matice pre syntézu použitá v transponovanom tvare ? Chodí to logicky, čo sa deje pri násobení matic	- 45 -
2 pásomová BF v polyfázovom tvare. Matematický popis $C(z)$ a $D(z)$, t.j. vzorce. Vysvetliť podmienku úplnej rekonštrukcie.	- 46 -
Čo je unitárna a paraunitárna matice, + príklady matic	- 46 -
Čo je lenivá DWT, nakreslite jej BF	- 47 -
Komplementárne filtre, vlastnosti existencie	- 48 -
Čo je stupeň Laurentovho polynómu, monóm, podiel Laurentových polynómov – vlastnosti, nesudelnosť	- 48 -
Rozšírenia waveletov:	- 49 -
separovateľná 2D waveletová transformácia, druhy, spôsob výpočtu, vlastnosti	- 49 -
M pásmové wavelety, princíp, popis, relácia medzi mierkami, vlastnosti	- 50 -
Casovo-frekvenčné vlastnosti M-waveletov, Čo sú to M-adické wavelety, príklad rozloženia subpasíem a rozdelenia TF roviny pre daný stupeň M	- 51 -
V čom sú M-wavelety lepšie ako ortogonálne wavelety, nakresliť banku filtrov, ktorá počíta M-DWT	- 52 -
V čom sa líšia Multiwavelety od M-waveletov a od ortonormálnych waveletov, Nakresliť hierarchie priestorov v MRA.	- 53 -
Výpočet Multiwaveletovej transformácie, princíp, vlastnosti	- 53 -
Multiwavelety - Čím sú tvorené koeficienty pre zmenu rozlíšenia a čo by bolo výsledkom kaskadového algoritmu – iterovaním medziskalovej relácie	- 54 -
Waveletové pakety, princíp, rozdiel od ortogonálnej DWT, možné výhody	- 54 -
Optimalizácia paketovej DWT – spôsoby princíp.	- 55 -
Čo platí pre bazové funkcie paketovej DWT s úplným rozkladom stromu?	- 56 -
Lifting schéma	- 57 -
Vlastnosti + princíp + základná schéma	- 57 -
prediktory v lifting schéme, vlastnosti, princíp, možnosti	- 58 -
Krok liftingu a dualného liftingu + vzorec a zmysel, znázorniť na schéme banky filtrov ..	- 58
-	
Čím je zaručená úplná rekonštrukcia pri liftingu?	- 60 -
Čo sú Interpoláčny filtre, aké majú vlastnosti, príklad interpoláčného filtra	- 60 -
Odstraňovanie šumu pomocou waveletov – princíp.	- 61 -
Kompresia obrazu pomocou waveletov	- 62 -

Hilbertove priestory a rozklady signálov

Čo je to (nevyžadujem presné matematické formulácie):

Veľkosť vektora, skriptá str. 118

Definícia 6.6 Veľkosť vektora x (označujeme $\|x\|$) je v Hilbertových priestoroch daná skalárnym súčtom $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Priama suma podpriestorov, skriptá str. 118

Definícia 6.8 Nech \mathcal{M}_i sú podpriestory Hilbertovho priestoru \mathcal{E} . Ak každý vektor $x \in \mathcal{E}$ môžeme jednoznačne vyjadriť v tvare $x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$ pričom $x_i \in \mathcal{M}_i$, potom \mathcal{E} je priamou sumou podpriestorov \mathcal{M}_i . Píšeme $\mathcal{E} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{M}_k$.

Ortogonalný doplnok, skriptá str. 118

Definícia 6.9 Nech \mathcal{M} je podpriestor Hilbertovho priestoru \mathcal{E} . Potom **ortogonalný doplnok** k \mathcal{M} v \mathcal{E} je množina $\mathcal{M}^\perp = \{x \in \mathcal{E}; x \perp \mathcal{M}\}$.

Priestor $l^2(\mathcal{Z})$, skriptá str. 119

Priestor $l^2(\mathcal{Z})$

Vektormi x v priestore $l^2(\mathcal{Z})$ sú postupnosti $x(n) \in \mathcal{C}$, $n \in \mathcal{Z}$ s konečnou energiou $\|x\| < \infty$. Zvyčajne reprezentujú signály diskkrétne v čase. Skalárny súčin je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y(n)^* \quad x, y \in l^2(\mathcal{Z}). \quad (6.17)$$

Priestor $L^2(\mathcal{R})$, skriptá str. 119

Priestor $L^2(\mathcal{R})$

Vektormi x v priestore $L^2(\mathcal{R})$ sú funkcie $x(t) \in \mathcal{C}$, $t \in \mathcal{R}$, ktoré sú kvadraticky integrovateľné a navyše $\|x\| < \infty$. Skalárny súčin je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \int_{t \in \mathcal{R}} x(t) y(t)^* dt \quad x, y \in L^2(\mathcal{R}). \quad (6.18)$$

Ortonormálna báza

6.4.2 Ortonormálne bázy

Množina $B = \{b_i\}$ tvorí **ortonormálny systém** v priestore \mathcal{E} , ak platí:

$$\forall b_i, b_j \in B; \quad \langle b_i, b_j \rangle = \delta(i - j). \quad (6.19)$$

Ortonormálny systém B tvorí **ortonormálnu bázu** priestoru \mathcal{E} , ak všetky $x \in \mathcal{E}$ môžeme vyjadriť ako:

$$x = \sum_k \alpha_k b_k, \quad (6.20)$$

kde α_k nazývame **spektrálne koeficienty** a vypočítame ich ako

$$\alpha_k = \langle b_k, x \rangle. \quad (6.21)$$

Pre takýto systém platí **Parsevalova rovnosť**

$$\|x\|^2 = \sum_i |\langle b_i, x \rangle|^2 \quad \forall x \in \mathcal{E}. \quad (6.22)$$

Analogické tvrdenia platia aj pre *ortogonálne systémy*, vo vzťahoch je iba pridaná normalizačná konštanta.

Čo sú biortogonálne resp. duálne bázy, skriptá str. 119 – 120

6.4.3 Biortogonálne bázy

Nech množiny $B = \{b_i\}$ a $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$ sú bázami priestoru \mathcal{E} . Tieto bázy sú navzájom *duálne* resp. *biortogonálne*, ak:

- ich bázové vektory sú **navzájom ortogonálne**, t. j. **biortogonálne**:

$$\langle b_i, \tilde{b}_j \rangle = \delta(i - j) \quad \forall i, j \in \mathcal{Z} \quad (6.23)$$

- zároveň existujú kladné konečné konštanty $C, D, \tilde{C}, \tilde{D}$, že pre $\forall x \in \mathcal{E}$ platí:

$$C \|x\|^2 \leq \sum_k |\langle b_k, x \rangle|^2 \leq D \|x\|^2 \quad \tilde{C} \|x\|^2 \leq \sum_k |\langle \tilde{b}_k, x \rangle|^2 \leq \tilde{D} \|x\|^2. \quad (6.24)$$

Potom signál $x \in \mathcal{E}$ môžeme vyjadriť ako

$$x = \sum_k \langle b_k, x \rangle \tilde{b}_k = \sum_k \langle \tilde{b}_k, x \rangle b_k. \quad (6.25)$$

Parsevalova rovnosť má tvar:

$$\|x\|^2 = \sum_i \langle b_i, x \rangle^* \langle \tilde{b}_i, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{E}. \quad (6.26)$$

Ortogonálna projekcia (priemet) vektora x do vektora s , skriptá str. 120

Definícia 6.10 *Ortogonálna projekcia (priemet) vektora x do vektora s je zložka vektora x v smere vektora s nazývaná x_s*

$$x_s = \frac{\langle s, x \rangle}{\|s\|^2} s = x_{s1} s, \quad (6.27)$$

kde skalár x_{s1} , nazývame **súradnicou vektora x vo vektore s** .

Vlastnosť postupnej aproximácie, skriptá str. 121

Nech S_k je ortonormálna báza \mathcal{S}_k . Keďže s_i sú vzájomne ortogonálne, zachováva sa vlastnosť najlepšej aproximácie pri danom k v zmysle najmenších štvorcov a platí vlastnosť **postupnej aproximácie**:

$$\hat{x}^{(k+1)} = \hat{x}^{(k)} + \langle s_{k+1}, x \rangle s_{k+1}. \quad (6.30)$$

Rámec, tesný rámec, skriptá str. 123, 124

Definícia 6.13 Rámcom vo vektorovom priestore \mathcal{E} nazývame neprázdnu podmnožinu $B = \{\psi_i\}$, $B \subset \mathcal{E}$ práve vtedy, ak $L(B) = \mathcal{E}$ a $\forall f \in \mathcal{E}$ existujú kladné konečné konštanty C, D také, že platí:

$$C \|f\|^2 \leq \sum_{m,n} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq D \|f\|^2. \quad (6.44)$$

Rámce nie sú nevyhnutne lineárne nezávislé množiny. Reprezentácia vektora pomocou rámcov môže byť nadbytočná a nejednoznačná. Ak $C = D$, rámec sa nazýva **tesný** a navyše ak $\|\psi_{m,n}\| = 1$, potom C udáva mieru redundancie rámcu oproti báze (ak $C = 2$, potrebujeme $2 \times$ viac vektorov na vyjadrenie f). Ak $C = D = 1$ $\|\psi_{m,n}\| = 1$ rámec $\{\psi_{m,n}\}$ tvorí ortonormálnu bázu priestoru \mathcal{E} .

Časovo - frekvenčná analýza a waveletová transformácia

Vlastnosti waveletov oproti Fourierovej transformácii z hľadiska časovo-frekvenčnej analýzy, skriptá str. 8 – 11; prednáška 1 (pred1.doc) ; prednáška 2 (02_pred2.doc)

Reprezentácia signálov:

- poznáte reprezentáciu signálov v čase, vo frekvencii (FT)
- wavelety umožňujú flexibilnú a cieleňú reprezentáciu niekde medzi.

Waveletová transformácia (WT) má oproti STFT funkcie formované iba zmenou mierky a posunom prototypovej funkcie (základného waveletu) $\psi(t)$

Fourier t.:

Riešenie vo forme oknovej *STFT (Short Time Fourier Transform)*, Gábor (1946), posúva okno fixnej veľkosti pozdĺž signálu a extrahuje frekvenčný obsah v danom intervale

$$F(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-\tau)e^{-j\omega t} dt = \langle f(t)g(t-\tau), e^{j\omega t} \rangle$$

„kde $g(t)$ je oknová funkcia a $f(t)$ vstupná funkcia. Ak oknová funkcia je gaussovská funkcia, tak STFT sa volá *Gáborova transformácia*.

Pre STFT platí:

- Bázové funkcie sú generované *moduláciou* a *posunom* oknovej (prototypovej) funkcie $g(t)$.
- STFT má pre danú oknovú funkciu *pevné rozlíšenie vo frekvencii*.

Každý signál môže byť znázornený v *časovo-frekvenčnej rovine (TF rovina)*, ktorá charakterizuje rozdelenie napr. energie signálu v čase a frekvencii:

Rozlíšenie v čase a frekvencii pre danú funkciu $x(t)$ a jej fourierovu transformáciu $X(\omega)$ je dané *časovo – frekvenčným oknom (TF okno)*. Jeho stred je v bode $S = (t_0, \omega_0)$, a veľkosti strán sú $2\sigma_t, 2\sigma_\omega$. Platí:

$$t_0 = \|x(t)\|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} t |x(t)|^2 dt \quad \omega_0 = \|X(\omega)\|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |X(\omega)|^2 d\omega \quad (1.\text{moment})$$

$$\sigma_t^2 = \|x(t)\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} (t-t_0)^2 |x(t)|^2 dt \quad \sigma_\omega^2 = \|X(\omega)\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega-\omega_0)^2 |X(\omega)|^2 d\omega \quad (2.\text{moment})$$

Pozn: Rôzne τ, ω pri STFT zodpovedajú posunom základného TF okna v čase a frekvencii

→ **TF okno nám hovorí o tom aké drobné detaily sme schopní v signále sledovať.**

→ **Hranice okna sú definované “štatisticky”, t.j. neznamená to, že mimo okna má signal nulové hodnoty**

Pre STFT platí:

- Bázové funkcie sú generované *moduláciou* a *posunom* oknovej (prototypovej) funkcie $g(t)$.
- STFT má pre danú oknovú funkciu *pevné rozlíšenie vo frekvencii*.

Spojité waveletová transformácia (SWT) funkcie $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ je definovaná ako zobrazenie $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ vzťahom

$$SWT_f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \quad a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$$

Funkcie $\psi_{a,b}(t)$ sú definované zo *základného waveletu* $\psi(t)$ pomocou parametrov *zmeny mierky* a *posunu* a, b nasledovne:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad \psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$$

SWT v závislosti od parametra a poskytuje pružné časovo - frekvenčné rozlíšenie. Ak *časovo - frekvenčné okno* $\psi(t)$ má rozmery σ_t, σ_ω a stred v bode $S = (t_0, \omega_0)$, potom

$$\sigma_{ab_t} = a\sigma_t \quad \sigma_{ab_\omega} = \sigma_\omega / a \quad S_{ab} = (at_0 + b, \omega_0 / a)$$

T.j. obsah okna ostáva konštantne $4\sigma_t\sigma_\omega$.

Čo je časovo - frekvenčná rovina, a časovo frekvenčné okno, skriptá str. 8; prednáška 1

Pre znázornenie časovo-frekvenčných vlastností funkcií resp. signálov sa často používa tzv. **časovo-frekvenčná (TF) rovina** [17]. V TF rovine je každý signál reprezentovaný tzv. **časovo-frekvenčným oknom**. To charakterizuje umiestnenie energie signálu v čase a frekvencií.

- TF okno nám hovorí o tom aké drobné detaily sme schopní v signále sledovať.
- Hranice okna sú definované “štatisticky”, t.j. neznamená to, že mimo okna má signál nulové hodnoty

Principiálne - ako vyrátame stred a veľkosti strán časovo - frekvenčného okna ľubovoľnej funkcie a o čom nám to vypovedá

Pre znázornenie časovo-frekvenčných vlastností funkcií resp. signálov sa často používa tzv. **časovo-frekvenčná (TF) rovina** [17]. V TF rovine je každý signál reprezentovaný tzv. **časovo-frekvenčným oknom**. To charakterizuje umiestnenie energie signálu v čase a frekvencií. Označme náš signál ako $f(t)$ a jeho Fourierovu transformáciu $F(\omega)$. Ak $f(t) \in L^2(\mathcal{R})$, potom⁴ jeho TF okno má konečnú veľkosť. Jeho stred je v bode $S_{t\omega} = (t_0, \omega_0)$ a veľkosti strán sú $2\sigma_t, 2\sigma_\omega$. O ω_0 zvykneme hovoriť ako o tzv. **strednej (uhlovej) frekvencii signálu**. Príklad zobrazenia TF okna reálneho signálu (modulovaná Gaussova funkcia, t. j. **Gáborova funkcia**) je na obr. 1.1. Pre polohu a rozmery okna platí [19, str. 7]:

$$t_0 = \|f(t)\|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt \quad \sigma_t^2 = \|f(t)\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |f(t)|^2 dt. \quad (1.2)$$

Vo frekvenčnej oblasti analogicky môžeme písať⁵:

$$\omega_0 = \|F(\omega)\|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |F(\omega)|^2 d\omega \quad \sigma_\omega^2 = \|F(\omega)\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.3)$$

TF okno nám vlastne hovorí, aké drobné detaily sme schopní v signáli sledovať. Čím menšia plocha okna, tým lepšie.

1.2.1 Princíp neurčitosti

Pre reprezentáciu signálov v časovo-frekvenčnej rovine platí tzv. *princíp neurčitosti* (niečo ako princíp neurčitosti z kvantovej fyziky). Nech pre $x(t) \in L^2(\mathcal{R})$ platí

$$t.x(t), X(\omega), \omega.X(\omega) \in L^2(\mathcal{R}). \quad (1.4)$$

Potom pre TF okno $x(t)$ platí [19, str. 56]:

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2 \geq 1/4, \quad (1.5)$$

príčom rovnosť platí, ak $x(t)$ je **Gaussova funkcia**⁸ v tvare

$$x(t) = \sqrt{\alpha/\pi} e^{-\alpha t^2} \quad \alpha \in \mathcal{R}, \alpha > 0. \quad (1.6)$$

Prakticky nám to hovorí, že signály sa nedajú s ľubovoľnou presnosťou lokalizovať naraz vo frekvenciách aj v čase, t. j. získať ľubovoľne malú plochu TF okna. Plocha TF okna je vždy minimálne 2, pričom minimálnu plochu zaberajú signály, pre ktoré platí (1.6). Dôkaz princípu neurčitosti je uvedený napr. v [19, str. 58], [22, str. 68].

⁸Rovnosť zostáva zachovaná aj pri modulácii funkcie $x(t)$ a ako neskôr uvidíme aj pri zmene mierky funkcie, pozri vzťah (1.9).

Spojité waveletové transformácie (SWT) funkcie $f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ je definovaná ako zobrazenie $L^2(\mathcal{R}) \rightarrow L^2(\mathcal{R})$ vzťahom:

$$\text{SWT}_f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \quad a \in \mathcal{R}^+, b \in \mathcal{R}$$

Expanzné funkcie $\Psi_{a,b}(t)$ sú definované zo základného waveletu $\Psi(t)$ pomocou parametrov zmeny mierky a posunu a, b nasledovne:

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad \Psi(t) \in L^2(\mathcal{R})$$

Vidíme, že reprezentácia signálu pomocou spektrálnych koeficientov SWT je značne **nadbytočná** – parametre a aj b sú spojité. V závislosti od parametra a SWT poskytuje pružné časovo-frekvenčné rozlíšenie.

Pomocou akých dvoch operácií su formované bazové funkcie(+vzorce) pri SWT? Ako a prečo bazové funkcie normalizujeme?

b) bazové

funkcie sú generované zmenou mierky a posunom prototypovej funkcie

Základné wavelety majú zvyčajne jednotkovú energiu, t. j. $\|\psi(t)\| = 1$. Faktor $1/\sqrt{a}$ vo vzťahu (1.8) zabezpečuje zachovanie energie aj pri zmenenej mierke, t. j. $\|\psi_{[a,b]}(t)\| = \|\psi(t)\|$. SWT je *invertovateľná*, ak pre Fourierovu transformáciu $\Psi(\omega)$ základného waveletu platí tzv. **podmienka prípustnosti** [21]:

$$C_\psi = \int_0^\infty \left| \frac{\Psi(\omega)}{\omega} \right|^2 d\omega < \infty. \quad (1.10)$$

Wavelet je potom **prípustný**, čo prakticky znamená [2], [21]:

$$\Psi(\omega)|_{\omega=0} = 0 \quad \int_{-\infty}^\infty \psi(t) dt = 0, \quad (1.11)$$

t. j. $\psi(t)$ nemá jednosmernú zložku¹³. Potom existuje inverzná SWT v tvare:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty SWT_f(a, b) \cdot \psi_{[a,b]}(t) \frac{dadb}{a^2}. \quad (1.12)$$

Vlastnosti SWT – redundancia, obsah časovo-frekvenčného okna, prednáška 2 str. 13

Linearita:

Vyplyva priamo z linearity skalárneho súčinu

Posun v čase:

$$g(t) = f(t - b_0) \\ \Rightarrow SWT_g(a, b) = SWT_f(a, b - b_0)$$

Zmena mierky:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t}{s}\right) \\ \Rightarrow SWT_g(a, b) = SWT_f\left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}\right)$$

Zachovanie energie,

Detekcia singularít.

Reprezentácia signálu pomocou spektrálnych koeficientov SWT je značne **nadbytočná** – parametre a aj b sú spojité. Dá sa odstrániť *vzorkovaním* a, b . V závislosti od parametra a – SWT poskytuje pružné časovo-frekvenčné rozlíšenie.

Ak časovo - frekvenčné okno $\Psi(t)$ má rozmery σ_t, σ_ω a stred v bode $S = (t_0, \omega_0)$ potom

$$\sigma_{abt} = a \cdot \sigma_t \quad \sigma_{ab\omega} = \sigma_\omega / a \quad S_{ab} = (at_0 + b, \omega_0/a)$$

Z hore uvedeného vzťahu je zrejma dôležitá vlastnosť waveletov, že obsah TF okna zostáva **konštantne 4 $\sigma_t \sigma_\omega$** nezávisle od parametrov a a b .

Existencia *nosiča*. Uzavretý interval $\langle a, b \rangle$ nazývame **kompaktný nosič** funkcie (waveletu) ak daný wavelet má nenulové funkčné hodnoty len na danom intervale. Pre wavelety bez kompaktného nosiča sa zvykne uvádzať funkcia zhora ohraničujúca funkčné hodnoty (t.j. charakterizujúca rýchlosť ich klesania) alebo tzv. *efektívny nosič* $\langle a, b \rangle$, mimo ktorého majú iba zanedbateľne malé funkčné hodnoty.

Počet nulových momentov. K-ty moment $\Psi(t)$ definujeme ako $m(k) = \int t^k \psi(t) dt$. Platí, že ak $\Psi(t)$ je K krát *diferencovateľná* a pre $t \rightarrow \pm\infty$ klesá dostatočne rýchlo, potom prvých K-1 momentov bude nulových. Potom ak $f(t)$ je na nejakom intervale polynómom max. K-1 stupňa, pre wavelety $\Psi_{a,b}(t)$ s nosičom na tomto intervale budú príslušné waveletové koeficienty $SWT_f(a, b)$ nulové.

Regularita (Daubechieová 1988) poskytuje mieru hladkosti funkcie $f(t)$. Ak definujeme regularitu vo frekvenčnej oblasti, potom je to také maximálne číslo r pre ktoré platí:

$$|F(\omega)| \leq c / (1 + |\omega|^{r+1})$$

Potom $f(t)$ je r-1 krát spojitě *diferencovateľná* pričom r-tá derivácia môže byť nespojitá.

Spektrum SWT sa znázorňuje vo forme tzv. **škálogramu** (SCG) [32], [30], čo je vlastne istá forma zobrazenia časovo-frekvenčnej roviny s vynesými magnitudami spektrálnych koeficientov. Frekvenčná os je však nahradená parametrom zmeny mierky a , takže ide o zobrazenie v tzv. **TS (z angl. Time-scale) rovine**.¹⁴ V dôsledku posunu TF okien waveletov v závislosti od parametra a (pozri obr. 1.6, vzťah (1.9)) je škálogram a TS rovina oproti spektrogramu a TF rovine „hore nohami“. Ak premapujeme súradnice (t, a) na (t, ω) , stredu TS okien by sa nám zobrazili do stredov TF okien príslušných waveletov.¹⁵ Príklad škálogramu reálneho signálu je na obr. 1.7. Maximálne fluktuácie hodnôt škálogram vyžaduje pri takej hodnote parametra a , pri ktorej sa stredná frekvencia $f(t)$ zhoduje so strednou frekvenciou waveletov $\psi_{[a,b]}$.

¹⁵Prepočet súradnic (t, a) na (t, ω) je triviálny, treba si uvedomiť, že súradnici $a = 1$ zodpovedá $\omega = \omega_0$, t. j. stredná frekvencia základného waveletu. Následne stačí použiť (vzťah 1.9) na posun vo frekvencii.

Waveletové rady a rámce

ako sa odstraňuje redundancia SWT ? + vzorce, skriptá str. 16

Redundancia SWT sa odstraňuje na vzorkovaním a a b . Potom hovoríme o *waveletových rámcoch* (*WF - Wavelet Frames*), ktoré stále môžu byť nadbytočné. Ak nadbytočnosť odstránime, hovoríme o *waveletových radoch* (*WR*).

Štandardná voľba vzorkovania parametra a je $a = a_0^m$ s $m \in \mathbb{Z}$ a $a_0 \neq 1$. T.j. úroveň rozlíšenia (doteraz charakterizovaná spojitým parametrom a) je odteraz charakterizovaná diskretným parametrom m . Parameter b potrebujeme navzorkovať tak, aby wavelety rovnako efektívne pokrývali celú časovú os pri každej úrovni rozlíšenia. Výslednú vzorkovaciu mriežku dostaneme v tvare:

$$a = a_0^m, \quad b = nb_0 a_0^m, \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad a_0 > 1, b_0 > 0$$

Najbežnejšie sa nadbytočnosť reprezentácie SWT odstraňuje *dyadickým vzorkovaním*, t.j. voľbou $a_0 = 2$, $b_0 = 1$ vo vzorkovacej mriežke. Dosadením do predchádzajúcich vzťahov dostávame:

$$a = 2^m \quad b = n2^m \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

m – úroveň rozlíšenia, n – posun v čase.

Čo sú to waveletové rady, vzorec na ich výpočet, ako vyzerajú ich bázové funkcie a ako sú tvorené + vzorce

Kedže reprezentácia signálu spektrom SWT je vysoko nadbytočná (oba parametre a , b sú spojité), vynára sa otázka aká množina zo spektrálnych koeficientov stačí na rekonštrukciu signálu. Odpoveďou je, že stačí vhodne zvolená diskretná množina koeficientov, t. j. parametre a a b vzorkujeme. Potom hovoríme o **waveletových rámcoch** (**WF — Wavelet Frames**), ktoré stále môžu byť nadbytočné. Ak nadbytočnosť odstránime, hovoríme o **waveletových radoch** (**WR**).

Použitím vzťahu 1.9 dostaneme výslednú vzorkovaciu mriežku v tvare:

$$a = a_0^m, \quad b = nb_0 a_0^m, \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad a_0 > 1, b_0 > 0. \quad (1.20)$$

Pre $\psi(t)$ potom dostávame diskretnú množinu funkcií:

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi(a_0^{-m}t - nb_0). \quad (1.21)$$

Dôležitá otázka je, či pre dané a_0 , b_0 a $\{\psi_{m,n}\}$ existuje taká množina $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$, že $\forall f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ platí:

$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \tilde{\psi}_{m,n}(t), \quad (1.22)$$

kde

$$d_{m,n} = \langle f(t), \psi_{m,n}(t) \rangle \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (1.23)$$

Rekonštrukcia funkcie $f(t)$ z koeficientov $d_{m,n}$ (nazývaných **waveletové koeficienty**) pomocou vzťahu (1.22) je možná a numericky stabilná, ak množina $\{\psi_{m,n}\}$ tvorí rámec v $L^2(\mathcal{R})$, t. j. $\forall f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ platí:

$$\exists A > 0, B > 0 : \quad A \|f\|^2 \leq \sum_{m,n} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2. \quad (1.24)$$

Ak sme nadbytočnosť WF vhodným vzorkovaním úplne odstránili, t. j. $\{\psi_{m,n}\}$ ne- tvorí rámeček ale bázu v $L^2(\mathcal{R})$, hovoríme o **waveletových radoch (WR)**. Rozklad signálu a jeho spätná rekonštrukcia pri WR ostáva definovaná vzťahmi (1.22), (1.23) (ku kaž- demu WR existuje duálny rad, ktorý rekonštrukciu umožňuje). Platí:

$$WR_f(m, n) = d_{m,n}. \quad (1.26)$$

Aký je rozdiel medzi WF a WR ?

Waveletové rámečky(WF) môžu byť nadbytočné. Waveletove rady(WR) už majú odstránenú nadbytočnosť.

Čo je to dyadický wavelet + vzorec

Najbežnejšie sa nadbytočnosť reprezentácie SWT odstraňuje *dyadickým vzorkovaním*, t.j voľbou $a_0 = 2$, $b_0 = 1$ vo vzorkovacej mriežke. Dosadním do predchádzajúcich vzťahov dostávame:

$$a = 2^m \quad b = n2^m \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Pre posuny a zmeny mierky základného waveletu platí:

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - n)$$

Funkcie $\psi_{m,n}(t)$ potom nazývame *dyadické wavelety*.

Aký je základný rozdiel medzi ortogonálnymi, biortogonálnymi a semiortogonálnymi waveletmi ? skriptá str. 22

Wavelety môžeme podľa ortogonalít v bázach ktoré generujú rozdeliť na tri základné skupiny:

- Wavelet nazývame **Ψ ortonormálny**, ak platí:

$$\tilde{\psi} \equiv \psi^*$$

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta(j-l)\delta(k-m) \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z}$$

T.j duálny wavelet sa od základného líši iba konjugáciou a báza $\{\Psi_{m,n}\}$ je ortonormálna, t.j. $\Psi_{m,n}$ sú na seba ortogonálne rovnakých úrovniach rozlíšenia a aj medzi rôznymi úrovňami.

- Wavelet $\psi \in L^2(\mathcal{R}) \in \mathbb{Z}$ sa nazýva **semiortogonálny** (nazývaný aj pre-wavelet), ak platí:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta(j-l)$$

t.j. je zachovaná ortogonalita len medzi rôznymi úrovňami rozlíšenia.

- Pár $(\psi, \tilde{\psi})$ spĺňa podmienku **biortogonalita** (hovoríme o biortogonálnych waveletoch), ak množiny $\{\Psi_{m,n}\}$ a $\{\tilde{\Psi}_{m,n}\}$ sú duálne bázy, spĺňajúce podmienku **biortogonalita**:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta(j-l)\delta(k-m) \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z}$$

Analýza signálu viacúrovňovým rozlíšením

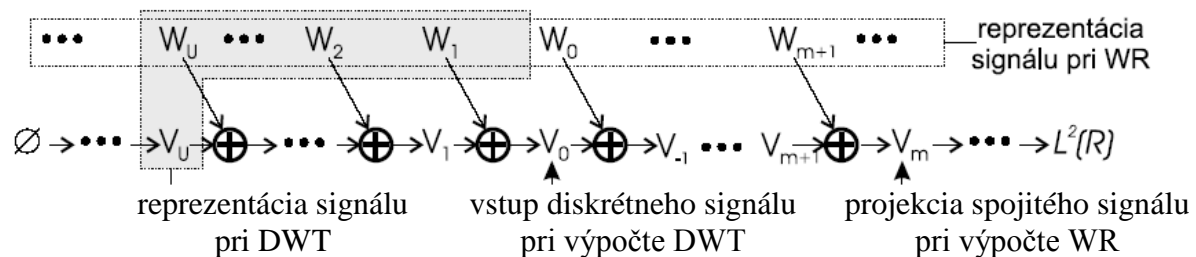
Ako vyzerá hierarchia priestorov pri MRA?

Cieľom pri analýze viacúrovňovým rozlíšením (MRA - z angl. MultiResolution Analysis) je rozložiť ľubovoľný signál $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ do systému hierarchických pod priestorov W_m , pričom každý z pod priestorov charakterizuje rôzne rýchle zmeny v signále. Aby sme to dosiahli definujeme MRA ako postupnosť uzavretých pod priestorov V_m priestoru $\in L^2(\mathbb{R})$ pre ktoré platí:

$$\{0\} \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$$

← horšia aproximácia lepšia →

Aproximačné a diferenčné priestory v MRA, nakreslite a vysvetlite prečo je to tak.



Znázornenie hierarchie aproximačných (V_m) a diferenčných (W_m) pod priestorov v MRA s vyznačeným vstupom a reprezentáciou signálu pri WR a DWT.

Dôsledok 1:

$$\{\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n), n \in \mathbb{Z}\} \text{ je bázou } V_m.$$

Dôsledok 2:

$$\{\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n), n \in \mathbb{Z}\} \text{ je bázou } W_m.$$

Dôsledok 3:

$$V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1}$$

Aproximačnú hierarchiu pod priestorov V_m potom môžeme skombinovaním vzťahov

$$V_\infty = \{0\} \quad V_{-\infty} = \{L^2(\mathbb{R})\}$$

$$V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1}$$

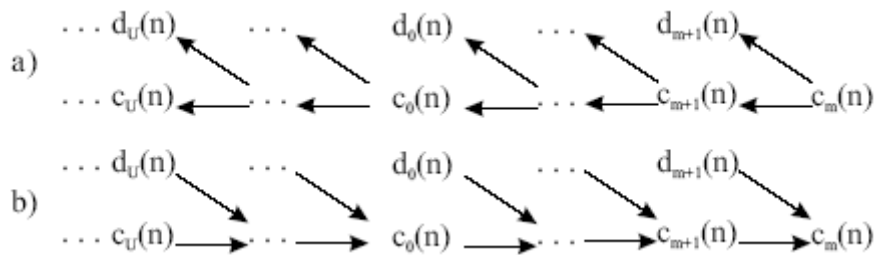
vyjadriť v tvare:

$$L^2(\mathbb{R}) = \dots \underbrace{\oplus W_2 \oplus W_1 \oplus W_0}_{V_1} \oplus W_{-1} \oplus W_{-2} \dots$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{V_0}$$

Z predchádzajúcich vzťahov je zrejmé, že priestorom V_m sa zlepšujú aproximačné schopnosti vďaka pridávaním diferenčných priestorov W_m , ktoré sú schopné vyjadriť detaily na danej úrovni rozlíšenia.

Algoritmus výpočtu Waveletových radov + základne vzorce, obrázky



Rozklad(a) a rekonštrukcia(b) koeficientov mierky pri výpočte WR a DWT

Pri výpočte waveletových radov z $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ rýchlym algoritmom (RWT) postupujeme nasledovne:

1. Začneme s projekciou $s(t)$ do V_m pomocou vzťahu:

$$c_m(n) = \langle s(t), \varphi_{m,n}(t) \rangle$$

V_m môžeme pritom zvoliť tak, aby sme boli schopní pomocou koeficientov $c_m(n)$ aproximovať $s(t)$ s dostatočnou resp. ľubovoľnou presnosťou.

2. Pokračujeme rozkladmi v diskkrétnej oblasti pomocou vzťahov:

$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k-2n)c_m(k)$$

$$d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k-2n)c_m(k)$$

často iba po želanú úroveň rozkladu U .

Spätnú rekonštrukciu signálu $s(t)$ (označme ju $\hat{s}(t)$) z waveletových radov môžeme získať sčítaním získaných detailov signálu a prípadnej zbytkovej aproximácie v priestore V_U

$$\hat{s}(t) = \hat{s}_{W_{m+1}}(t) + \hat{s}_{W_{m+2}}(t) + \dots + \hat{s}_{W_U}(t) \hat{s}_{V_U}(t)$$

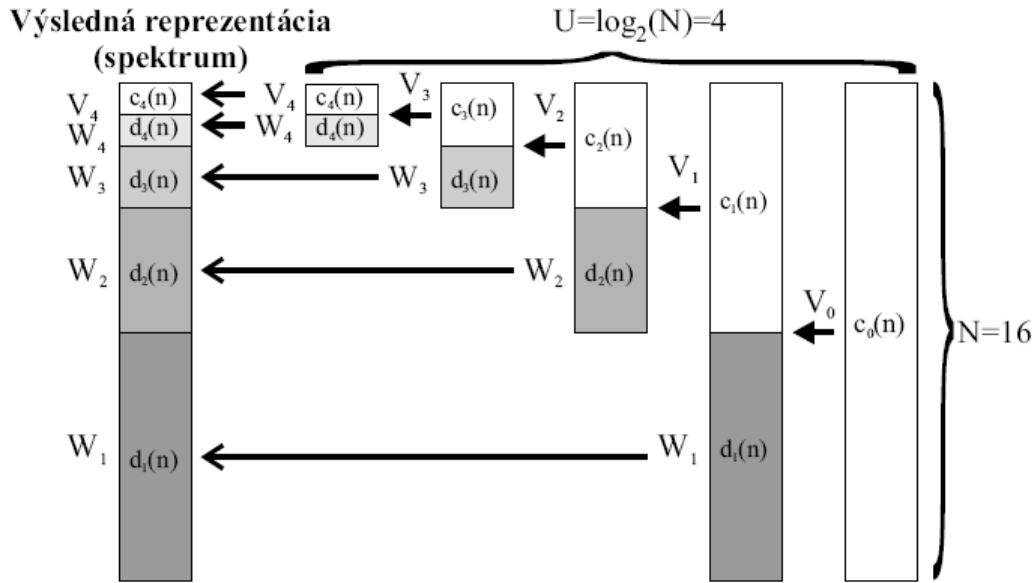
alebo najprv spätnou rekonštrukciou koeficientov $c_m(n)$ pomocou vzťahu:

$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n-2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n-2k)d_{m+1}(k)$$

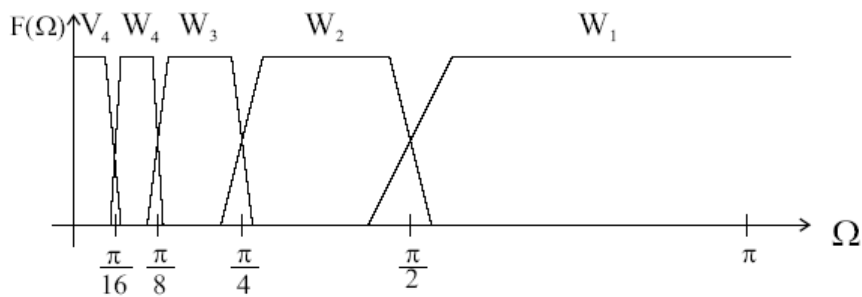
a použitím aproximácie $f(t)$ vo V_m , t.j.:

Delenie spektra analyzovaného diskrétného signálu na subpasma, vysvetliť, nakresliť

Ak maximálny počet úrovní rozkladu dosiahneme, potom hovoríme o **úplnom rozklade**. Príklad takéhoto rozkladu pre pre $N = 16$ je znázornený na obr. 1.18. Výsledkom je reprezentácia v 4 diferencných a jednom aproximačnom priestore. Aké vlastnosti bude mať toto rozdelenie z hľadiska frekvenčného, je schématicky znázornené³¹ na obr. 1.19. Vidíme, že ide o analogické delenie na pásma vo frekvencii, s akým sme sa doteraz stretli pri WR (obr. 1.2b, obr. 1.10d, obr. 1.12).



Obr. 1.18. Rozklad signálu dĺžky $N = 16$ pri DWT a štruktúra výsledného spektra



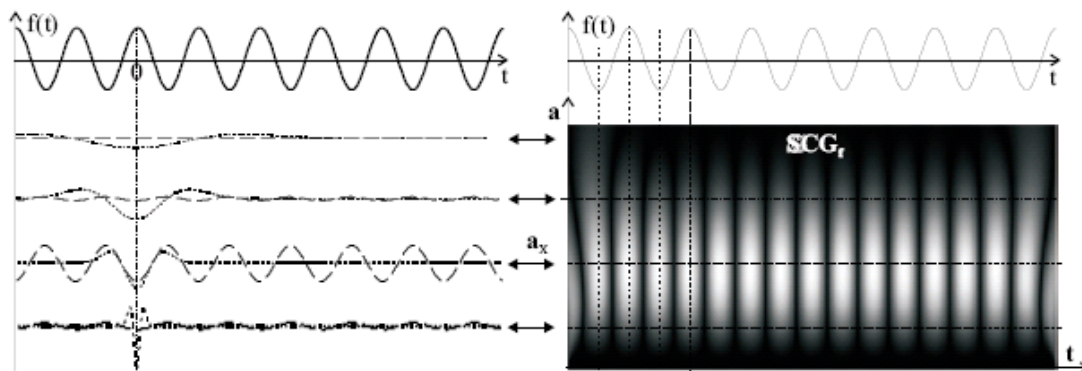
Obr. 1.19. Schématické znázornenie časti frekvenčného spektra zodpovedajúce jednotlivým podpriestorom pri rozklade signálu $f(n)$ pomocou DWT so 4 úrovňami rozlíšenia.

Škálogram v DWT, vlastnosti oproti škálogramu pri SWT

Spektrum SWT sa znázorňuje vo forme tzv. **škálogramu** (SCG) [32], [30], čo je vlastne istá forma zobrazenia časovo-frekvenčnej roviny s vyneseními magnitudami spektrálnych koeficientov. Frekvenčná os je však nahradená parametrom zmeny mierky a , takže ide o zobrazenie v tzv. **TS (z angl. Time-scale) rovine**.¹⁴ V dôsledku posunu TF okien waveletov v závislosti od parametra a (pozri obr. 1.6, vzťah (1.9)) je škálogram a TS rovina oproti spektrogramu a TF rovine „hore nohami“. Ak premapujeme súradnice (t, a) na (t, ω) , stredy TS okien by sa nám zobrazili do stredov TF okien príslušných waveletov.¹⁵ Príklad škálogramu reálneho signálu je na obr. 1.7. Maximálne fluktuácie hodnôt škálogram vykazuje pri takej hodnote parametra a , pri ktorej sa stredná frekvencia $f(t)$ zhoduje so strednou frekvenciou waveletov $\psi_{[a,b]}$.

¹⁴V TS rovine môžeme samozrejme definovať analógiu TF okna — TS okno.

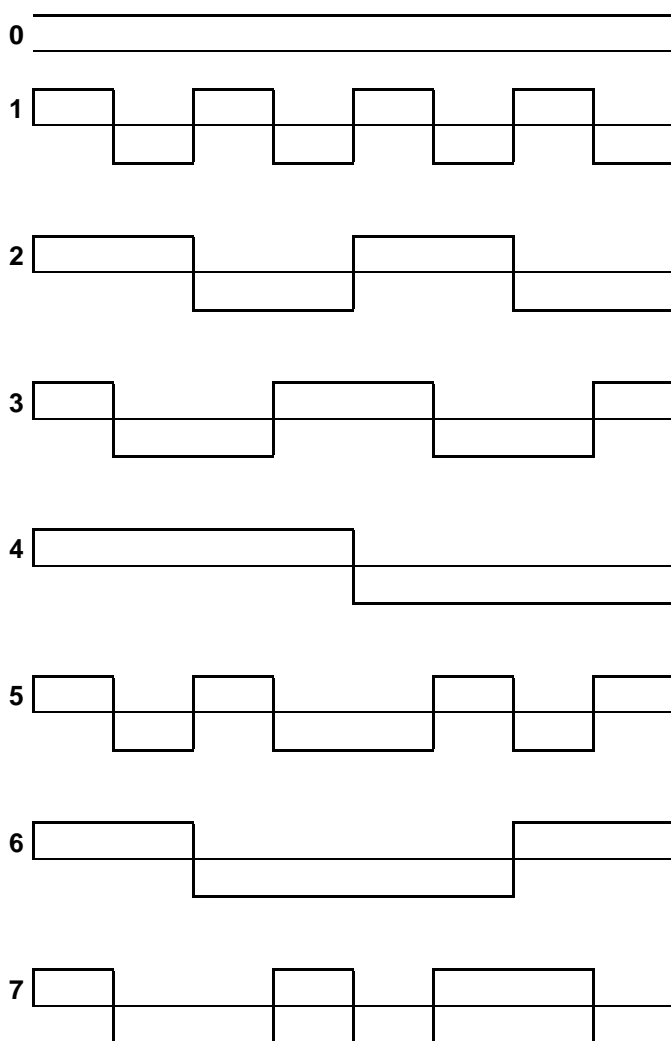
¹⁵Prepočet súradníc (t, a) na (t, ω) je triviálny, treba si uvedomiť, že súradnicí $a = 1$ zodpovedá $\omega = \omega_0$, t. j. stredná frekvencia základného waveletu. Následne stačí použiť (vzťah 1.9) na posun vo frekvenciách.



Obr. 1.7. Škálogram funkcie $f(t) = \cos(t)$ pri použití waveletu „Mexický klobúk“ z obr. 1.6. V ľavej časti sú zobrazené príklady waveletov (čiarkovane) a rezy spektrom SWT (bodkovane) na zodpovedajúcich úrovniach rozlíšenia. Pozn.: škálogram je na krajoch deformovaný kvôli ohraničeniu signálu pri výpočte SWT programom Matlab

Nakreslite bazu Haarovej DWT pre danu dĺžku N.

Podľa Lubky:



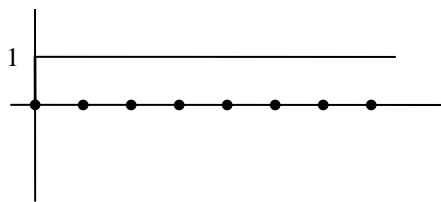
Podľa Matka:

Dĺžka N znamená, že funkcia ide od bodu 0 po bod $N-1$.

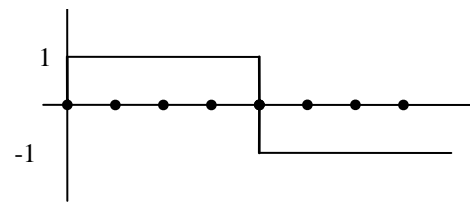
Haar(0,0) v 0. kroku má funkčnú hodnotu v každom bode = 1 (vyplýva to z toho, že odmocnina z 2 na nultú je 1). Potom rozdelím interval na polovicu a funkciu v druhej polovici preklopím. V 1. kroku zúžim funkciu na polovicu. Funkčné hodnoty vzrastú na $\sqrt{2}^1$. Vzniknú nulové body – funkciu posuniem. V 2. kroku opäť zúžim, vzrastie amplitúda na $\sqrt{2}^2=2$, poposúvam po všetkých nulových bodoch.

Príklad pre $N=8$:

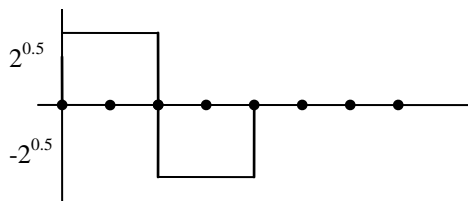
haar(0,0)



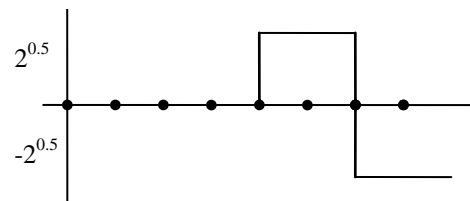
haar(0,1)



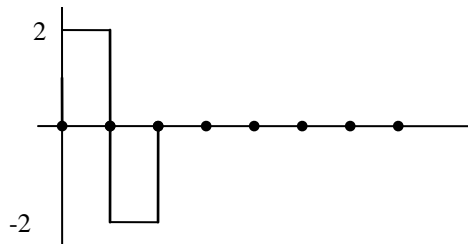
haar(1,1)



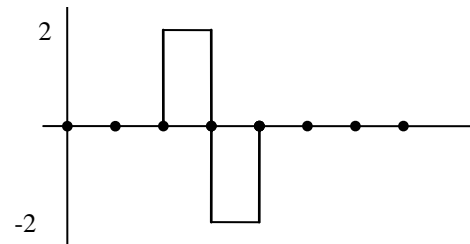
haar(1,2)



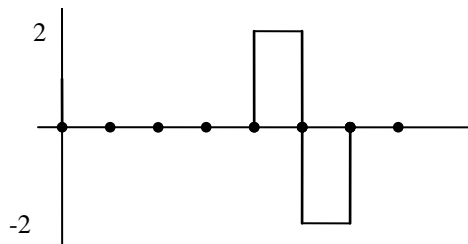
haar(2,1)



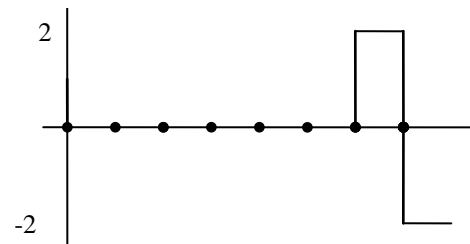
haar(2,2)



haar(3,1)



haar(3,2)



Ako vyzerajú hierarchie priestorov pri biortogonálnych waveletoch, ake su vzťahy medzi podpriestormi + vzorce

rámec, resp. ľubovoľný rámec spĺňajúci (1.25). Pri waveletových radoch môžeme namiesto ortogonálneho riešenia použiť riešenie biortogonálne (pozri časť 1.4.2) s dvomi základnými waveletmi $\psi(t)$ a $\tilde{\psi}(t)$. Pri pomalom výpočte biortogonálnych WR rozkladáme signál pomocou $\tilde{\psi}_{m,n}$ a skladáme pomocou $\psi_{m,n}$ (pozri vzťahy (1.23) a (1.22)). T. j. máme základný wavelet $\psi(t)$ a jeho *duál* $\tilde{\psi}(t)$ ku ktorým existujú funkcie mierky $\varphi(t)$ a $\tilde{\varphi}(t)$ také, že:

- množiny $\{\varphi_{m,n}(t)\}$ a $\{\tilde{\varphi}_{m,n}(t)\}$ tvoria bázy pre podpriestory \mathcal{V}_m resp. $\tilde{\mathcal{V}}_m$
- množiny $\{\psi_{m,n}(t)\}$ a $\{\tilde{\psi}_{m,n}(t)\}$ tvoria bázy pre podpriestory \mathcal{W}_m resp. $\tilde{\mathcal{W}}_m$.

V $L^2(\mathcal{R})$ potom existujú dve AVR s hierarchiami:

$$\dots \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{-1} \subset \mathcal{V}_{-2} \dots \quad (2.17)$$

$$\dots \tilde{\mathcal{V}}_2 \subset \tilde{\mathcal{V}}_1 \subset \tilde{\mathcal{V}}_0 \subset \tilde{\mathcal{V}}_{-1} \subset \tilde{\mathcal{V}}_{-2} \dots, \quad (2.18)$$

pričom platí že \mathcal{W}_{m+1} je síce doplnkom k \mathcal{V}_{m+1} v priestore \mathcal{V}_m , ale nie je to ortogonálny doplnok. \mathcal{W}_{m+1} je namiesto toho ortogonálny doplnok k $\tilde{\mathcal{V}}_{m+1}$ v priestore \mathcal{V}_{m+1} . Analogicky $\tilde{\mathcal{W}}_{m+1}$ je ortogonálny doplnok k \mathcal{V}_{m+1} v priestore $\tilde{\mathcal{V}}_m$. Vzájomné vzťahy medzi podpriestormi sa dajú geometricky znázorniť analogicky⁸ k obr. 6.2b a obr. 6.3. Relácie zmeny mierky môžeme vyjadriť vzťahmi:

$$\tilde{\varphi}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_{mr}(n) \tilde{\varphi}(2t - n) \quad \varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n) \quad (2.19)$$

$$\tilde{\psi}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_{mr}(n) \tilde{\varphi}(n - 2t) \quad \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n) \varphi(n - 2t). \quad (2.20)$$

Vzťahy pre rýchlu implementáciu WR a DWT (porovnaj s (1.60)-(1.62)) sú v tvare:

$$c_{m+1}(n) = \sum_k \tilde{h}_{mr}(k - 2n) c_m(k) \quad d_{m+1}(n) = \sum_k \tilde{g}_{mr}(k - 2n) c_m(k) \quad (2.21)$$

$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n - 2k) c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n - 2k) d_{m+1}(k). \quad (2.22)$$

Druhy waveletov

Poznať druhy waveletov a ich základne charakteristiky a oblasti použitia

- *Haarov wavelet* — triviálny prípad waveletu s minimálnym nosičom. Nespojité v čase, symetrický, s nulovou regularitou, pravý opak Sinc waveletu (pozri tabuľku 1.1 a obr. 1.8), historicky najstarší wavelet
- **Daubechieovej (Db) wavelety** — ortogonálne wavelety, ktoré majú maximálny počet nulových momentov pri danej dĺžke filtra [18], označujú sa ako **maximálne hladké**
- *Battle-Lemarie wavelety* — ortogonalizované Spline wavelety
- **Coiflety** — ortogonálne wavelety [23], ktorých návrh je založený na momentových vlastnostiach φ , ψ . Snažíme sa nulovať momenty waveletu a rovnako aj funkcie mierky. Pre Coiflet L -teho rádu platí
- **Symlety** — ortogonálne wavelety, ktoré majú minimálnu asymetriu a maximálny počet nulových momentov pri danej dĺžke filtra [18]:

$$m_{\varphi}(k) = 0 \quad m_{\psi}(k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, L - 1. \quad (2.32)$$

Vlastnosti funkcie mierky a waveletov

Čo sú to $h_{mra}(n)$? Popíšte 3 ich základne vlastnosti pre ortonormálne wavelety.

- $h_{mr}(n)$ a $g_{mr}(n)$ sú koeficienty pre zmenu rozlíšenia alebo dilatačné koeficienty

- 1) aby mohli byť splnené podmienky pre $h(n)$, treba aby dĺžka $h(n)$ (označme ju N) bola párna
- 2) $h(n)$ a $g(n)$ sa navzájom jednoznačne určujú ($h(n)$ a $g(n)$ – zjednodušené označenie)
- 3) k danému waveletu existuje jediná funkcia mierky (a naopak)

Vlastnosti matematicky (nie sú to tie iste):

$$1) \sum_n h(n) = \sqrt{2} \quad 2) \sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k) \quad 3) \sum_n g(n) = 0$$

Kompaktna podpora $\varphi(t)$ a $h(n)$, čo platí?

(strana 36 veta 2.3)

Existencia **nosiča**. Uzavretý interval (a, b) nazývame **kompaktný nosič** funkcie (waveletu), ak daný wavelet má nenulové funkčné hodnoty len na danom intervale. Pre wavelety bez kompaktného nosiča sa zvykne uvádzať funkcia zhora ohraničujúca funkčné hodnoty (t. j. charakterizujúca rýchlosť ich klesania). Prípadne sa uvádza tzv. **efektívny nosič** (a, b) , mimo ktorého má funkcia iba zanedbateľne malé funkčné hodnoty.¹⁶

Musí platiť nasledujúca veta:

Veta 2.3 Ak $\varphi(t)$ má kompaktný nosič na intervale $(0, N-1)$ a $\varphi(t-k)$ sú lineárne nezávislé, potom $h(n)$ má „kompaktný nosič“ na $0 \leq n \leq N-1$. T. j. dĺžka postupnosti $h(n)$ je N (pozri obr. 1.14).

Súvisí $h(n)$ s $g(n)$ pri ortonormálnych waveletoch? Ako je to v spektre?, skriptá str. 37

- Ano súvisia:

$$g(n) = \pm(-1)^n h(M-n) \quad |G(\Omega)| = |H(\Omega + M\pi)|, M \text{ je nepárne}$$
$$\sum_n h(n)g(n-2k) = 0 \quad |G(\Omega)|^2 + |H(\Omega)|^2 = 2$$
$$\quad \quad \quad |G(\Omega)||H(2\pi - \Omega)| + |H(\Omega)||G(2\pi - \Omega)| = 0$$

Základné vlastnosti $h(n)$ s $g(n)$ pri ortonormálnych waveletoch - popísať z hruba strana 36 a 37.-tabulka

z tabuľky si vyberte vlastnosti len pre $h(n)$ a $g(n)$.

$\psi(t), \varphi(t)$	Vlastnosti		Pozn.
	$h(n), g(n)$	$H(\Omega), G(\Omega)$	
$\int \varphi(t) dt = 1$	$\sum_n h(n) = \sqrt{2}$	$H(0) = \sqrt{2}$	veta 2.1
$\int \varphi(t)\varphi(t-k) dt = \delta(k)$	$\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k)$	$ H(\Omega) ^2 + H(\Omega + \pi) ^2 = 2$	veta 2.2
$\sum_k \varphi(t-k) = \sum_k \varphi(k) = 1$	$\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1)$	$H(\pi) = 0$	
$\int \psi(t) dt = 0$	$\sum_n g(n) = 0$	$G(0) = 0$	
$\int \varphi(t-k)\psi(t-m) dt = 0$	$g(n) = \pm (-1)^n h(M-n)$	$ G(\Omega) = H(\Omega + M\pi) $	
	$\sum_n h(n)g(n-2k) = 0$	$ H(\Omega) ^2 + G(\Omega) ^2 = 2$	
		$H(\Omega)G(2\pi - \Omega) + H(2\pi - \Omega)G(\Omega) = 0$	

Tabuľka 2.1. Základné vlastnosti $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $h(n)$, $g(n)$, $H(\Omega)$, $G(\Omega)$ a ich súvislosti (v riadkoch sú ekvivalentné vlastnosti) pri ortogonálnych waveletových systémoch. Vo vzťahoch platí, $k, n \in \mathcal{Z}$ a M je nepárne.

- aby mohli byť splnené podmienky pre $h(n)$, treba aby dĺžka $h(n)$ (označme ju N) bola párna
- k danému waveletu existuje jediná funkcia mierky (a naopak)
- $h(n)$ a $g(n)$ sa navzájom jednoznačne určujú
- ak $h(n)$ spĺňa uvedené podmienky, sú zaručené iba základné vlastnosti ψ , φ (integrovateľnosť, ortonormalita, ...), pričom ψ , φ môžu mať extrémne neregulárny, prípadne fraktálový charakter
- regularita waveletu a k nemu náležajúcej funkcie mierky je rovnaká (wavelet je konečná lineárna kombinácia $\varphi(2t-n)$, pozri vzťah (1.52))
- pri návrhu $h(n)$ s dĺžkou N , ostáva po splnení nutných $N/2 + 1$ podmienok ešte $N/2 - 1$ stupňov voľnosti. Tieto môžeme využiť tak, aby φ , ψ resp. $h(n)$, $g(n)$, mali požadované vlastnosti, ako napr. istú regularitu, aproximačné vlastnosti atď. Nutných $N/2 + 1$ podmienok je:

- 1. podmienka: $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$ kvôli existencii φ

- $N/2$ podmienok kvôli ortonormalite φ :

$$\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k) \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1. \quad (2.3)$$

Ako vypočítať $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ ak poznáme koeficienty pre zmenu mierky? + vzorec pre výpočet v čase aj frekvencii

- Vychádzame z dilatačných rovníc: [1.51] $\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\varphi(2t - n)$

$$[1.52] \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n)\varphi(2t - n)$$

Tieto rovnice môžeme riešiť iteratívne, pričom ak postupnosť bude konvergovať k pevnému bodu, potom je pevný bod hľadaným riešením. Iterácie sú definované:

$$\varphi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\varphi^{(k)}(2t - n) \text{ a } \psi(t) \text{ podľa [1.52]}$$

Uvedený iteratívny postup sa nazýva aj *kaskádový algoritmus* (v čase)

$$\Phi^{(k+1)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi^{(k)}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

toto je vo frekvencii.

Čo sú spoj. / disk. nulové momenty + vzorec, vysvetliť na čo sú dobre nulové momenty waveletov a funkcií mierky

Strana 15 def momentu, 39-41 definícia K regularity a mierky a pod

Počet nulových momentov. K -ty moment $\psi(t)$ definujeme ako $m(k) = \int t^k \psi(t) dt$. Platí, že ak $\psi(t)$ je K krát diferencovateľná a pre $t \rightarrow \pm\infty$ klesá dostatočne rýchlo, potom prvých $K - 1$ momentov bude nulových. Potom ak $f(t)$ je na nejakom intervale polynómom max. $K - 1$ stupňa, pre wavelety $\psi_{[a,b]}(t)$ s nosičom na tomto intervale budú príslušné waveletové koeficienty $SWT_f(a, b)$ nulové.¹⁷

Spojité k -te momenty φ, ψ sú definované:

$$m_{\varphi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \varphi(t) dt \quad m_{\psi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt. \quad (2.9)$$

Diskrétné k -te momenty $h(n), g(n)$ sú definované:

$$\mu_h(k) = \sum_n n^k h(n) \quad \mu_g(k) = \sum_n n^k g(n). \quad (2.10)$$

¹⁷Napríklad: $H(\Omega)$ v tvare $H(\Omega) = (\Omega - \pi)^K$ má v $\Omega = \pi$ nulu K -teho rádu.

Existencia bázy. Existuje také $\varphi \in \mathcal{V}_0$, že množina $\{\varphi(t - n), n \in \mathcal{Z}\}$ je ortonormálnou bázou \mathcal{V}_0 . Funkciu $\varphi \in \mathcal{V}_0$ nazývame **funkcia mierky**.

Z diskretných momentov μ_h, μ_g môžeme vypočítať spojité momenty pomocou:

$$m_\varphi(k) = \frac{1}{(2^k - 1)\sqrt{2}} \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \mu_h(l) m_\varphi(k-l)$$

$$m_\psi(k) = \frac{1}{2^k\sqrt{2}} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \mu_g(l) m_\varphi(k-l).$$

Na začiatku výpočtu si treba uvedomiť, že $m_\varphi(0) = 1$.

Počet nulových momentov $m_\psi(k)$ dáva informáciu o plochosti $H(\Omega)$ a hladkosti ψ , ktoré rastú priamo úmerne. Okrem toho, čím viac waveletových momentov je nulových, tým lepšiu aproximáciu získame pri projekcii signálu $f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ do \mathcal{V}_m .

Čo najväčší počet nulových momentov $m_\varphi(k)$ je dôležitý vtedy, ak pri počítačovej aproximácii signálu $f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ vo \mathcal{V}_m použijeme priamo vzorky $f(t)$. Takisto sa zlepšuje aj symetria φ .

Dôležitý koncept, ktorý spája momentové vlastnosti, diferencovateľnosť, regularitu a vlastnosti dilatačných koeficientov, je koncept tzv. *K-regulárnych* filtrov. KIO filter s impulzovou odpoveďou $h(n)$, ktorá spĺňa podmienky v tabuľke 2.1 a generuje funkciu mierky $\varphi(t)$ sa nazýva **K-regulárny** vtedy, ak platia nasledovné *ekvivalentné* tvrdenia:

1. $H(\Omega)$ má K -násobnú nulu v $\omega = \pi$
2. prvých K diskretných aj spojitých waveletových momentov sa rovná nule, t. j.:
 $m_\psi(k) = 0, \mu_\psi(k) = 0$ pre $k = 0, 1, \dots, (K - 1)$
3. polynomicke postupnosti stupňa $\leq (K - 1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $h(n)$
4. polynómy stupňa $\leq (K - 1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov φ .

K-regulárny filter, čo je to? Aké má základne vlastnosti?, skriptá str. 41

Dôležitý koncept, ktorý spája momentové vlastnosti, diferencovateľnosť, regularitu a vlastnosti dilatačných koeficientov, je koncept tzv. *K-regularných* filtrov. KIO filter s impulzovou odpoveďou $h(n)$, ktorá spĺňa podmienky v tabuľke 2.1 a generuje funkciu mierky $\varphi(t)$ sa nazýva *K-regulárny* vtedy, ak platia nasledovne *ekvivalentne* tvrdenia:

1. $H(\omega)$ má K - násobnú nulu v $\omega = \pi$
2. prvých K diskretných aj spojitých waveletových momentov sa rovná nule, t. j.:
 $m_\psi(k) = 0, \mu_\psi(k) = 0$ pre $k = 0, 1, \dots, (K - 1)$
3. polynomicke postupnosti stupňa $\leq (K - 1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $h(n)$
4. polynómy stupňa $\leq (K - 1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov φ .

Aký max. K regulárny môže byť ortogonálny filter dĺžky N? Preto?

Ak N je dĺžka filtra $h(n)$, potom polynóm $H(z)$ má stupeň $N-1$ a $L(z)$ stupeň $N-1-K$. Aby $L(z)$ zabezpečilo splnenie nutných $N/2$ podmienok pre ortogonalitu, musí mať aspoň stupeň $N/2-1$.

Potom $1 \leq K \leq N/2$. \leftarrow max reg.

Vyjadrite sa k waveletom a ich možnostiam zisťovať nespojitosti v signále a jeho deriváciách použitím DbK waveletu môžeme spoľahlivo detekovať nespojitosti v prvých K - 1 deriváciách.

Wavelety môžu slúžiť aj ako viacúrovňový derivátor.

Nech $h(n)$ je K - regulárny filter, generujúci $\varphi(t)$ a $\psi(t)$. Potom waveletove koeficienty zodpovedajú K-tej derivácii vyhladenej verzie analyzovaného signálu:

$$\langle f(x), \psi(x-u) \rangle = \partial^K \{ \gamma * f \}(u) \text{ kde } \Gamma(\omega) = \psi * (\omega) / (j\omega)^K$$

Aké poznáte metódy návrhu ortogonálnych waveletov ? Ich základne princípy pár vetami.

skriptá str. 48

Typy návrhov:

- Ortogonalizácia (napr. Battle-Lemarie wavelety)
- Parametrizácia koeficientov mierky
- Spektrálna faktorizácia – návrh waveletov s K nulovými waveletovými momentmi (Db.)
- Návrh waveletov liftingovou schémou

Parametrizácia koeficientov mierky

Jednoduchým využitím stupňov vol'nosti v $\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k)$ môžeme navrhovať

základne ortonormalne wavelety. Splnime nutne podmienky na ortonormalitu a zvysook mozeme parametrizovať

- System 0. radu – dĺžka $h(n)$ je 2. Nema žiadne stupne vol'nosti.

$$\text{Podmienky su : } h(0) + h(1) = \sqrt{2} \quad h(0)^2 + h(1)^2 = 1$$

$$\text{Riesenim je: } h(n) = \{ \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 \}$$

- radu R – dĺžka $h(n)$ je $2R + 2$, ma R stupnov vol'nosti

Parametrizaciou získane riesenia maju zarucenu iba minimalnu regularitu. Vhodnou vol'bou parametrov vsak mozeme dosiahnuť zlepšenie vlastnosti, prípadne ekvivalenciu (pri danej dĺžke $h(n)$) s ľubovol'ným iným ortogonálnym waveletovým systemom.

Spektrálna faktorizácia

Metody návrhu waveletov s K nulovými momentmi využívajú koncept K-regulárnych filtrov. Metoda na výpočet koeficientov mierky, ktoré generujú ortogonálne waveletove systemy s K nulovými momentmi waveletov.

Nech $H(\Omega)$, DTFT postupnosti $h(n)$ s dĺžkou N ma K nulov v $\Omega = \pi$ a je v tvare:

$$H(\Omega) = \sqrt{2} \left(\frac{1 + e^{i\Omega}}{2} \right) L(\Omega) \text{ potom } H(\Omega) \text{ splna podmienku } |L(\Omega)|^2 + |H(\Omega + \pi)|^2 = 2$$

vtedy a len vtedy, ak: $|L(\Omega)|^2 = Q(\sin^2(\Omega/2))$

$$\text{Ak } \sin^2(\Omega/2) = -\frac{1}{4}z + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^{-1}$$

$$\text{potom musime najst } |L(z)|^2 = Q(z)$$

Riesenie vzt'ahu nie je jednoznacne. $L(z)$ získame tzv. spektrálnou faktorizaciou

B spline wavelety – čo je to, na čo je dobré ?, skriptá str. 45

Spline funkcie sú po častiach polynomicke funkcie daného stupňa s plynulým prechodom medzi jednotlivými časťami. B-Spline funkcie $\Phi_{SM}(t)$ stupňa M sú tvorené M-nasobnou konvolúciou „Box“ funkcie:

$$B(t) = \begin{cases} 1 & t \in (0,1) \\ 0 & \text{inde} \end{cases}$$

B-spline funkcie sú *funkciami mierky* pre B-spline wavelety

Pomocou B-spline funkcií môžeme tvoriť iba semiortogonálne, resp. biortogonálne waveletové systémy.

Čím sa líšia semiortogonálne a biortogonálne B-spline wavelety

Semiortogonálne wavelety tvoria neortogonálne bazy W_m , pre ktoré platí:

$$V_m \perp W_m \quad V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1}$$

Prícom pre biortogonálne platí

$$V_m = \tilde{V}_m \quad W_m = \tilde{W}_m$$

Autokorelácia a spektrálna faktorizácia

Čo platí pre nuly (reálnej) autokorelačnej funkcie zo sekvencie $h(n)$?, skriptá str. 50

- * je konjugácia

- ak z_k je nula $P(z)$ potom nula je aj $1/z_k^*$
- nuly sa vyskytujú v dvojiciach $\{z_k, 1/z_k^*\}$
- ak $h(n)$ je reálne a $H(z)$ má nulu v z_k potom nuly sú aj v z_k^* , $1/z_k$ a $1/z_k^*$

Čo sú jej spektrálne faktory a aké majú vlastnosti, čo je to minimálna fáza ?

- Predpokladajme, že pre dane $P(z)$ hľadáme vyhovujúce $H(z)$. Také $H(z)$ nazývame *spektrálny faktor* $P(z)$ a metódu jeho získania *spektrálnou faktorizáciou*. Spektrálne faktory nie sú jednoznačne určené a získame ich priradením vždy iba jednej nuly z dvojíc nul.

Možné výsledné $H(z)$ majú rovnakú magnitudovú charakteristiku, líšia sa iba vo fázovej charakteristike. Dôležité je riešenie s *minimálnou fázou*, kde pri vytváraní $H(z)$ použijeme iba nuly v a na jednotkovej kružnici.

Aké sú všeobecné pravidlá pri spektrálnej faktorizácii (reálne filtre, lin fáza, ortogonálne riešenie) skriptá str. 68

Predpokladajme všeobecné riešenie spektrálnej faktorizácie $P(z)$ v tvare:

$$P(z) = \tilde{H}(z) H(z) \quad (3.61)$$

Nulové body $P(z)$ označme z_k . Potom platia nasledovné pravidlá pre vytváranie spektrálnych faktorov [14]:

1. aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie reálnych filtrov musíme z_k a z_k^* použiť v pároch
2. aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie filtrov s *lineárnou fázou* musíme z_k a $1/z_k$ použiť v pároch
3. Aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ mohli tvoriť ortogonálne wavelety, musíme z_k a $1/z_k$ použiť oddelene.

Vidíme, že pravidlá 2 a 3 sa navzájom vylučujú, okrem jedného prípadu:

Symetrický ortogonálny KIO filter s prenosovou funkciou $H(z)$, môže mať maximálne 2 nenulové koeficienty, pričom platí:

$$H(z) = (1 + z^{-N}) / \sqrt{2} \quad N \text{ je nepárne} \quad (3.62)$$

Ako by ste navrhli ortogonálne wavelety pomocou spekt. Faktorizácie?

Veta 2.4 Nech $H(\Omega)$, DTFT postupnosti $h(n)$ s dĺžkou N má K núl v $\Omega = \pi$ a je v tvare:

$$H(\Omega) = \sqrt{2} \left(\frac{1 + e^{i\Omega}}{2} \right)^K L(\Omega) \quad (2.38)$$

Potom $H(\Omega)$ spĺňa podmienku $|H(\Omega)|^2 + |H(\Omega + \pi)|^2 = 2$ vtedy a len vtedy, ak

$$|L(\Omega)|^2 = Q(\sin^2(\Omega/2)) \quad (2.39)$$

kde

$$Q(y) = \sum_{k=0}^{K-1} \binom{K-1+k}{k} y^k + y^K R(1/2 - y) \quad (2.40)$$

a $R(y)$ je antisymetrický polynóm taký, že $Q(y) \geq 0$ pre $y \in (0, 1)$.

$$\sin^2(\Omega/2) = -\frac{1}{4}z + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^{-1}.$$

Tým sa dostávame k ťažisku metódy a to je, ako nájsť $L(z)$ pri danom $Q(z)$, ak platí:

$$|L(z)|^2 = Q(z). \quad (2.42)$$

T. j. $P(\Omega)$ je reálna nezáporná funkcia. Vyjadrením v z -rovine dostaneme:

$$P(z) = H_*(z^{-1}) H(z), \quad (2.45)$$

kde dolný index $*$ znamená konjugáciu koeficientov, nie celej funkcie. Zo vzťahu (2.45) vidíme, že ak z_k je nula $P(z)$, potom nula je aj $1/z_k^*$, t. j. nuly sa vyskytujú iba v dvojiciach:

$$\{z_k, 1/z_k^*\}. \quad (2.46)$$

Naviac, ak $h(n)$ je reálne a $H(z)$ má nulu v z_k , potom nuly sú aj v z_k^* , $1/z_k$, $1/z_k^*$. Pre zobrazenie uvedených závislostí v z -rovine pozri obr. 2.10.

Predpokladajme, že pre dané $P(z)$ hľadáme vyhovujúce $H(z)$. Také $H(z)$ nazývame **spektrálny faktor** $P(z)$ a metódu jeho získania **spektrálnou faktorizáciou** [21], [22]. Spektrálne faktory nie sú jednoznačne určené a získame ich priradením vždy iba jednej nuly z dvojíc núl (2.46) do $H(z)$. Prepíšme $P(z)$ do tvaru [21]:

$$P(z) = \alpha \prod_{k=1}^{N_a} \left((1 - z_{k_a} z^{-1}) (1 - z_{k_a}^* z) \right) \prod_{k=1}^{N_b} \left((1 - z_{k_b} z^{-1}) (1 - z_{k_b}^* z) \right), \quad (2.47)$$

kde N_a je počet párov núl na jednotkovej kružnici (platí $|z_{a_k}| = 1$) a N_b je počet párov núl *vnútri* jednotkovej kružnice (používame $|z_{b_k}| < 1$). Do $H(z)$ priradíme po jednej nule z každého z uvedených párov. Možné výsledné $H(z)$ majú rovnakú magnitúdovú charakteristiku, líšia sa iba vo fázovej charakteristike. Dôležité je riešenie s **minimálnou fázou** [7], kde pri vytváraní $H(z)$ použijeme iba nuly v a na jednotkovej kružnici. Potom:

$$H(z) = \sqrt{\alpha} \prod_{k=1}^{N_a} (1 - z_{a_k} z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_b} (1 - z_{b_k} z^{-1}). \quad (2.48)$$

Aby koeficienty $h(n)$ boli reálne, musia sa vybrané nuly vyskytovať v komplexne združených pároch. Táto podmienka je pri návrhu ortogonálnych waveletových systémov zahrnutá vo vete 2.4, t. j. v tvare vstupného polynómu na faktorizáciu.

Doporučujem pozrieť si riešený príklad 2.1 zo skript str. 51 alebo z cvik!!!

Ako by ste navrhli biortogonálne wavelety pomocou spekt. Faktorizácie?

Pri návrhu biortogonálnych spline(CDF) waveletov faktorizujeme $P(z)$ tak, aby jeden faktor obsahoval iba nuly v $z = -1$ a nič iné, t.j. aby bol maximálne K-regulárny:

$$H(z) = H_{S_M}(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^{M/2+1} \left(\frac{1+z}{2} \right)^{M/2} \quad (3.63)$$

DWT v maticovom tvare.

Štruktúra a rozmery transformačných matíc pre analýzu a syntézu v ortogonálnom a biortogonálnom prípade, skriptá str. 33

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{G}_m \end{pmatrix} \mathbf{C}_m \quad \mathbf{C}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_m^T & \mathbf{G}_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix}$$

,kde \mathbf{C}_m resp. \mathbf{D}_m sú stĺpcové vektory (matice) :

$$\mathbf{C}_m = (c_m(0), c_m(1), \dots, c_m(N_m - 1))^T$$

$$\mathbf{D}_m = (d_m(0), d_m(1), \dots, d_m(N_m - 1))^T$$

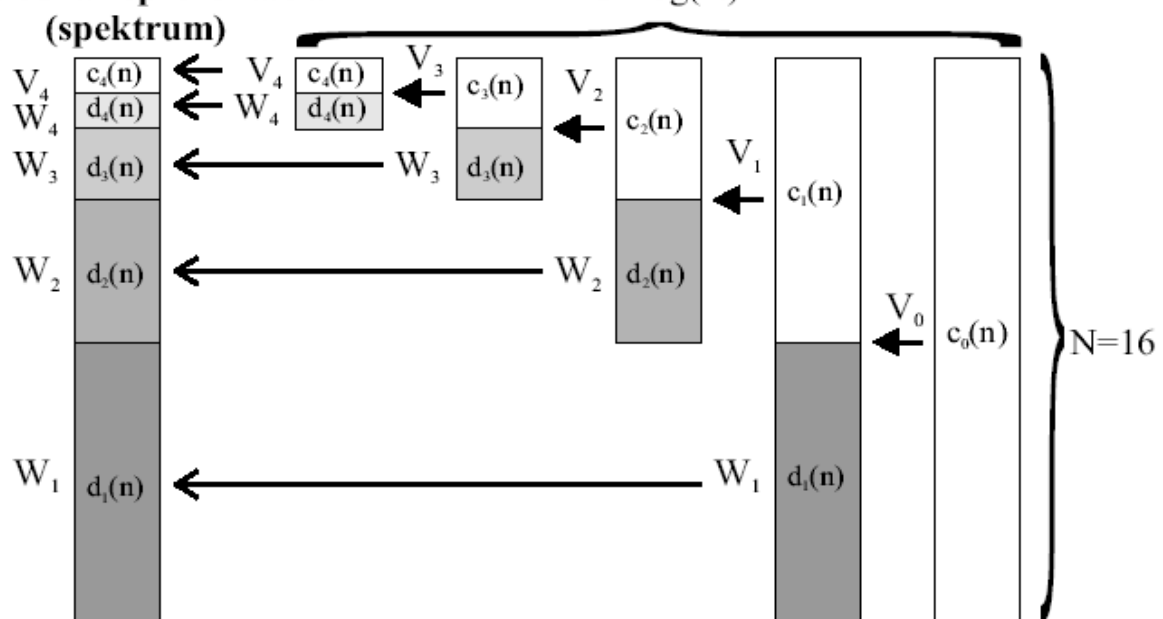
$$\mathbf{H}_m = \begin{pmatrix} \overbrace{h(0) \quad h(1) \quad h(2) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad h(-1)}^{2N_m} \\ \dots \quad h(-1) \quad h(0) \quad h(1) \quad h(2) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ h(2) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad h(-1) \quad h(0) \quad h(1) \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \end{pmatrix}} \right\} N_m \quad (1.78)$$

$$\mathbf{G}_m = \begin{pmatrix} \overbrace{g(0) \quad g(1) \quad g(2) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad g(-1)}^{2N_m} \\ \dots \quad g(-1) \quad g(0) \quad g(1) \quad g(2) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ g(2) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad g(-1) \quad g(0) \quad g(1) \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \end{pmatrix}} \right\} N_m \quad (1.79)$$

Rozmery matíc sú: $2N_m$ stĺpcov a N_m riadkov, kde $N_m = 2^{-m}N_0$, N_0 je dĺžka vstupného signálu $c_0(n)$.

Ukázať, ako sa pomocou takých matíc rozloží signál na $c(n)$ a $d(n)$ a opäť zloží., skriptá str. 30

Obr. 1.18: Rozklad signálu dĺžky $L = 16$ pri DWT a štruktúra výsledného spektra
Výsledná reprezentácia $U = \log(N) = 4$



$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{m+1} \\ \mathbf{G}_{m+1} \end{pmatrix} \mathbf{C}_m \quad \mathbf{C}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{m+1}^T & \mathbf{G}_{m+1}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix}, \quad (1.74)$$

kde \mathbf{C}_m resp. \mathbf{D}_m sú stĺpcové vektory (matice) :

$$\mathbf{C}_m = (c_m(0), c_m(1), \dots, c_m(N_m - 1))^T, \quad (1.75)$$

$$\mathbf{D}_m = (d_m(0), d_m(1), \dots, d_m(N_m - 1))^T, \quad (1.76)$$

veľkosť vektorov je:

$$N_m = 2^{-m} N_0 \quad (1.77)$$

Čo robiť pri DWT na kraji signálu:

prehľad metód, skriptá str. 76

periodické rozšírenie signálu:

- zachováva ortogonalitu
- vnáša do signálu body ne spojivosti
- parná dĺžka signálu pri každom rozklade

symetrické rozšírenie signálu:

- k signálu dĺžky N pridávame jeho zrkadlový obraz a až túto dvojicu následne speriodifikujeme
- vstupný signál môže mať ľubovoľnú dĺžku
- rozšírením nevznikajú v signále body ne spojivosti ale iba v jeho prvej derivácii
- neredundantná reprezentácia je možná, iba ak sú bazové funkcie symetrické (biortogonálne systémy)
- bazové funkcie v spojitom aj diskretnom prípade sú na okraji signálu preložené späť a sčítané sami zo sebou

doplnenie nulami

- Doplnenie signálu nulami na jeho okrajoch je najpriamočiarejším riešením problému reprezentácie časovo ohraničeného signálu. Vnáša ale výrazné diskontinuity na okrajoch singlu.

Opatrenia: prestriedanie prvkov matice signálu, vynechanie prvého riadku. To je jednoduchý prípad extrapolácie.

aké je to symetrické rozšírenie a prečo ho nemôžeme použiť pri ortogonálnych waveletoch vid' prehľad metód – symetrické rozšírenie.

wavelety na intervale, prečo, vlastnosti, spôsob výpočtu, skriptá str. 77

Problém: Ak máme diskretný signál konečnej dĺžky a chceme počítať DWT (1.60, 1.61), tak sa nám bude veľkosť reprezentácie postupne zväčšovať. Toto je nežiaduce.

Existuje viacero prístupov k riešeniu problému:

- periodické rozšírenie signálu (str. 74)
- symetrické rozšírenie signálu (str. 75)
- doplnenie nulami a priama extrapolácia signálu (str. 76)
- okrajové filtre (str. 77)

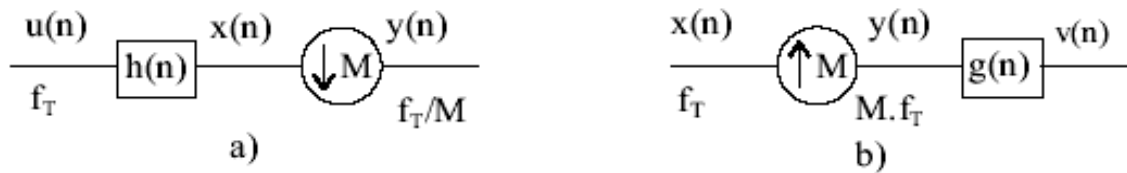
Tieto spôsoby manipulácie so signálom vedú k spojitým prípadom waveletovej analýzy na nejakom intervale. T. j. okrem neovplyvnených waveletov a funkcií v „strede“ intervalu máme okrajové funkcie, ktoré nám riešia problém ohraničenosti analýzy v $L^2(\mathbb{R})$. Ak sú pri tom zachované pôvodné vlastnosti ako ortogonalita alebo regularita, hovoríme o **waveletoch na intervaloch**.

Spôsob výpočtu:

Vo forme v akej sa vyskytujú v „strede“ intervalu ich môžeme nájsť **kaskádovými algoritmi**. **Pri krajoch**, kde sú dilatačné rovnice výrazne ovplyvnené, ich môžeme korektne získať použitím **inverznej transformácie zo spektra**, kde bude príslušný spektrálny koeficient jednotkový a ostatné nulové.

Banky filtrov

Čo je to decimácia a interpolácia, ich vzorce, vysvetliť ako fungujú, načo sú dobré, schémy



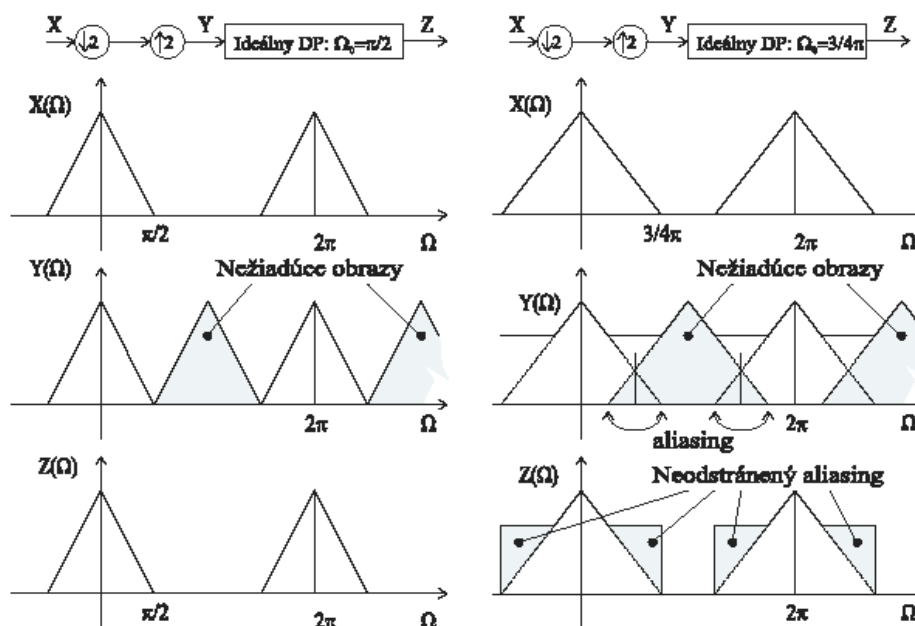
Obr. 3.1: Schématické označenie operácií v SRT a) decimácia b) interpolácia
decimácia je proces redukcie vzorkovacej frekvencie celočíselným faktorom M . Najprv je signál $u(k)$ frekvenčne obmedzený *antialiasingovým*¹ prípadne ideálnym DP filtrom s hranicou prepúšťania $\Omega_0 = \pi/M$ a impulzovou charakteristikou $h(n)$ a potom je *podvzorkovaný*. Výsledok po decimácii je:

$$y(n) = \sum_k h(Mn - k)u(k) \quad (3.3)$$

interpolácia je proces zvýšenia taktovacej frekvencie signálu celočíselným faktorom M . Signál $x(k)$ je najprv *nadvzorkovaný* a následne vyhladený filtrom (napr. ideálnym DP s $\Omega_0 = \pi/M$) s impulzovou charakteristikou $g(n)$. Výsledný signál po interpolácii je:

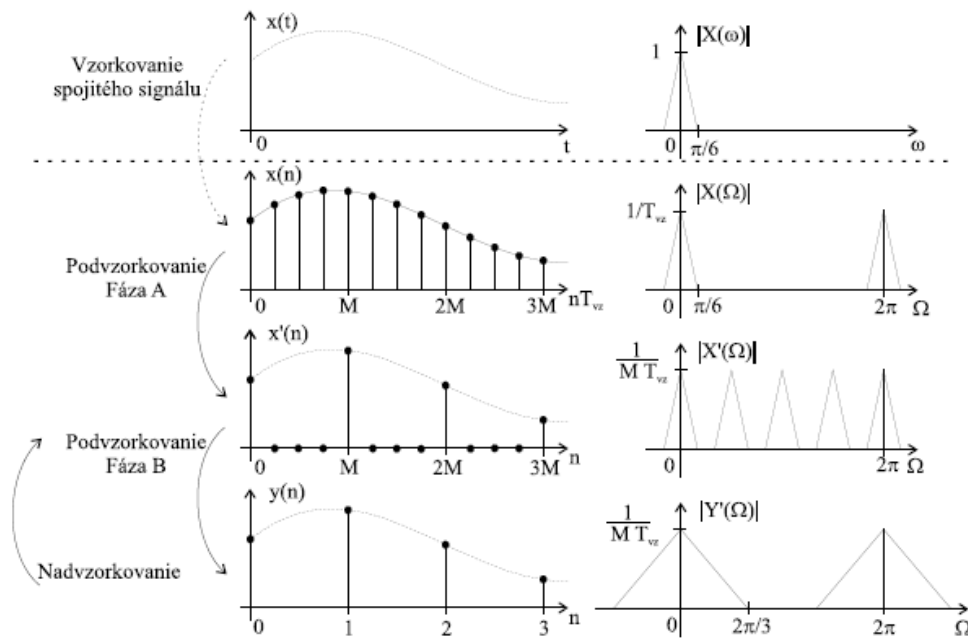
$$v(n) = \sum_k g(n - Mk)x(k) \quad (3.4)$$

Decimacia a interpolacia, nakresliť, čo sa deje zo signalom vo frekvencii a čase, vysvetliť, 55.



Obr. 3.4: Decimácia a interpolácia signálu pri $M=2$ ak signál $X(\Omega)$ je dostatočne a nedostatočne obmedzený decimačným filtrom. Pri nedostatočne obmedzenom signále vznikne aliasing, ktorý nevieme bez dodatočnej informácie eliminovať.

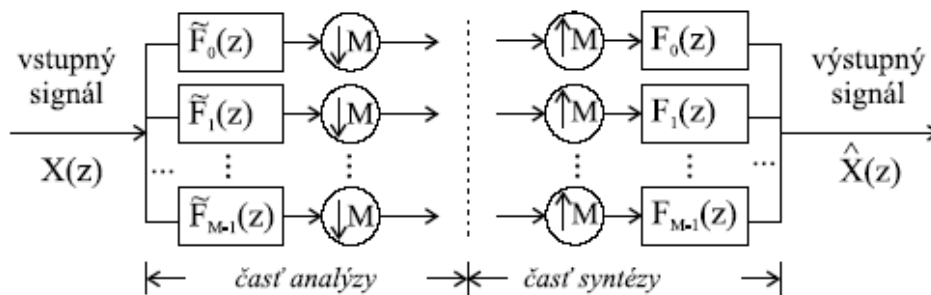
Vidíme, že po decimácii a následnej interpolácii vieme bezchybne zrekonštruovať iba signál ktorý bol pred podvzorkovaním frekvenčne ohraničený po $\Omega_0 = \pi/M$. Ináč vzniká, ktorý nevieme (ak nemáme k dispozícii ďalšiu informáciu) odstrániť. Celá situácia je zobrazená na Obr.3.4. Ako zrekonštruovať signál, keď nemáme k dispozícii ani ideálne filtre na jeho ohraničenie? Riešením je Banka filtrov (BF).



Obr. 3.3. Vplyv podvzorkovania a nadvzorkovania s faktorom $M = 4$ vo frekvenčnej oblasti. Vidíme, že ak by signál pred podvzorkovaním nebol frekvenčne obmedzený minimálne na $\Omega_{max} = \pi/4$ dochádzalo by k zlietaniu obrazov spektra signálu — **aliasingu**. Hore je zobrazený aj prechod zo spojitaj do diskretnaj oblasti pomocou vzorkovania. Platí $\Omega = \omega T_{vz}$, kde T_{vz} je vzorkovacia perióda.

Čo je banka filtrov, nakresliť schému BF a popísať jej časti, vysvetliť základne pojmy – subpásma, analyzáčnáj časť,...

Banka filtrov (BF) je sústava, v ktorej filtre, použité v operáciach decimácie a interpolácie, umožňujú signál rozložiť (tzv. **analýza**) na **subpásma** a spätne zložiť (tzv. **syntéza**).



Obr. 3.5. Všeobecnáj schéma M -pásmovej banky filtrov s **kritickým podvzorkovaním** (v každom pásme je použité podvzorkovanie faktorom M , t. j. celkový počet vzoriek ostáva stále rovnaký)

- Signál je rozdelený filtermi pre analýzu \tilde{F}_k na M častí (**subpásiami**) a následne podvzorkovaný – **analýza signálu**
- Signál zrekonštruujeme spätným nadvzorkovaním týchto dvoch častí, interpoláciou filtermi pre syntézu F_k nakoniec sčítaním – **syntéza signálu**

Aký signál a ako sa dá preniesť použitím iba DP časti banky filtrov bezstratovo? (čo platí pre signál, čo platí pre filtre, ...)

Interpolovať treba s DP charakterom, ak si mal DP aj pri rozklade (aby sa to vyhladilo).

Prečo vo BF vzniká aliasing, pri akých filtroch vobec nevzniká aliasing, ako je principiálne možné už vzniknutý aliasing pri syntéze zrušiť?

Str. 57 dolu o aliasingu, str 60 príklad jeho odstránenie

Ak je výstupný signál identický so vstupným, potom hovoríme, že BF má vlastnosť **perfektnéj (úplnej) rekonštrukcie**. Keďže v BF používané filtre nie sú ideálne, vzniká pri analýze aliasing. Ten je však možné v konečnom súčte pri syntéze eliminovať, ak prenosové funkcie filtrov pre analýzu $\tilde{F}_k(z)$ a syntézu $F_k(z)$ spĺňajú isté podmienky (pozri ďalšiu časť).

Akým spôsobom sa aliasing eliminuje? Zoberme si najjednoduchší príklad, ktorým je Haarov wavelet (elementárny hrebeňový filter). Na základe (1.54), (1.55) a (3.17) môžeme v z -rovine písať:

$$\tilde{H}(z) = \tilde{H}_{mr}(z^{-1}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+z) \quad H(z) = H_{mr}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+z^{-1}) \quad (3.19)$$

$$\tilde{G}(z) = \tilde{G}_{mr}(z^{-1}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-z) \quad G(z) = G_{mr}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-z^{-1}) \quad (3.20)$$

Zodpovedajúce prenosové charakteristiky sú znázornené na obr. 3.9. Pokúsme sa teraz zistiť, aký bude prenos signálu $X(\Omega)$ sústavou v bode $X(a)$. Označme $F(\Omega) = \tilde{H}(\Omega)$. Z toho vyplýva:

$$H(\Omega) = F^*(\Omega) \quad G(\pi/2 \pm \delta) = F(\pi/2 \mp \delta) \quad \tilde{G}^*(\pi/2 \pm \delta) = F(\pi/2 \mp \delta) \quad (3.21)$$

Potom platí (overte si, že to tak skutočne je):

	Po 1. filtrácii	po pod- a nadzorkovaní	po 2. filtrácii
DP vetva	$X(a)F(a)$	$\frac{1}{2}[X(a)F(a) + X(a)F^*(b)]$	$\frac{1}{2}F^*(a)[X(a)F(a) + X(a)F^*(b)]$
HP vetva	$X(a)F^*(b)$	$\frac{1}{2}[X(a)F^*(b) + X(b)F(a)]$	$\frac{1}{2}F^*(b)[X(a)F(a) + X(a)F^*(b)]$

Po konečnom sčítaní bude výsledkom:

$$\hat{X}(a) = X(a) \underbrace{\frac{1}{2}[F^*(a)F(a) + F^*(b)F(b)]}_{\text{prenos signálu}} + X(b) \underbrace{\frac{1}{2}[F^*(a)F^*(b) + F(a)F(b)]}_{\text{prenos aliasingu}} \quad (3.22)$$

Prenos signálu bude jednotkový, lebo platí $|F(a)|^2 + |F(b)|^2 = 2$, pozri obr. 3.9. Aký je prenos aliasingu ľahko zistíme jeho vyjadrením v exponenciálnom tvare:

$$\text{aliasing} = X(b) \frac{1}{2} \left[|F_a|e^{-j(\pi/2-\delta)} * |F_b|e^{-j(\pi/2+\delta)} + |F_a|e^{j(\pi/2-\delta)} * |F_b|e^{j(\pi/2+\delta)} \right] \quad (3.23)$$

$$= X(b) \frac{1}{2} \left[|F_a||F_b|e^{-j\pi} + |F_a||F_b|e^{j\pi} \right] = 0, \quad (3.24)$$

t. j. dostali sme výsledok v súlade so vzťahmi v tabuľke 2.1. To, za akých podmienok sa aliasing eliminuje a banka filtrov dosahuje úplnú rekonštrukciu je analyzované v časti 3.3.2. Najskôr však objasníme pojem *polpásmový filter*, ktorý budeme pri riešení týchto podmienok potrebovať.

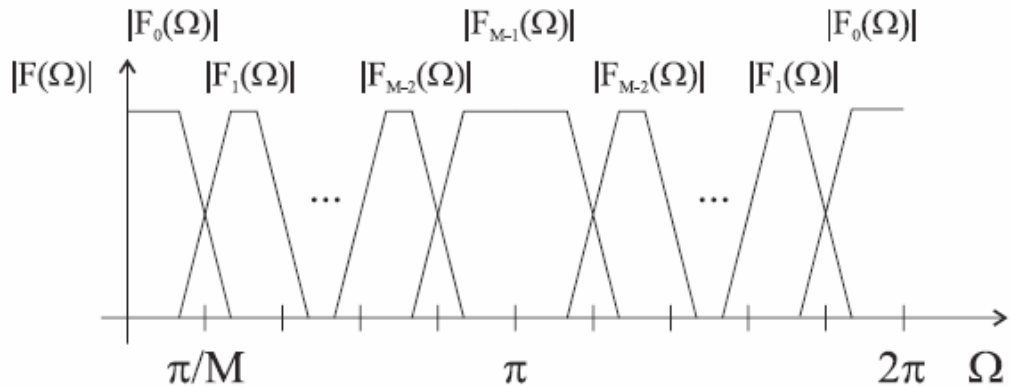
Z tohto vyplýva že musia platiť nasledovné vzorce:

$$\tilde{H}(z) = H_0(z) \quad H(z) = \pm z^{2l-1} \tilde{G}(-z) = \tilde{H}(z^{-1})$$

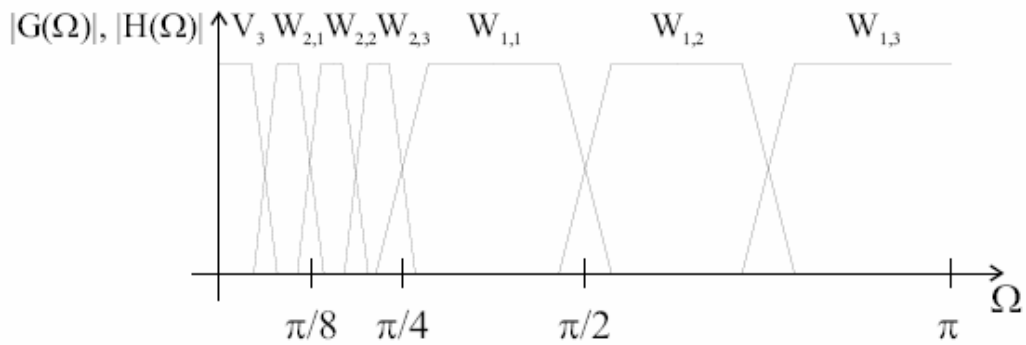
$$\tilde{G}(z) = \mp z^{-(2l-1)} \tilde{H}(-z^{-1}) \quad G(z) = \mp z^{2l-1} \tilde{H}(-z) = \tilde{G}(z^{-1})$$

Nakreslite príklad (v závislosti od OMEGY) rovnomerného a dyadického delenia pásiem v Banke filtrov pre $M=8$

Rovnomerné delenie - prepočítať na 8 – miesto ... dať 4 malé sopky:

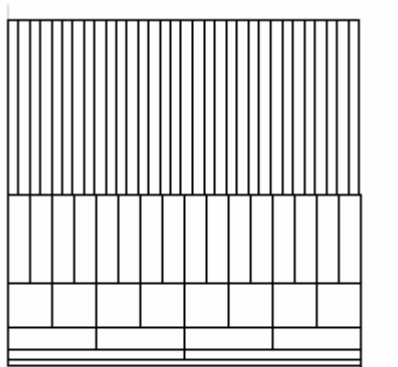


Dufam, že dyadická, prepočítať na 8 – teda po $\pi/8$ sa musí zmestiť 8 kopčekov:



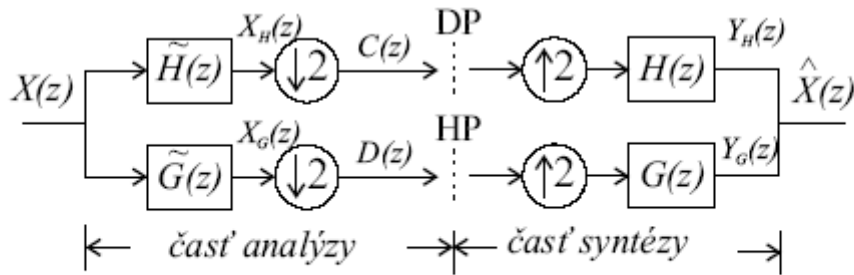
Obr. 4.12. M -pásmová DWT, schématické znázornenie častí frekvenčného spektra zodpovedajúce jednotlivým podpriestorom v AVR pre $M = 4$

Pre istotu v TF rovine:



a) dyadické wavelety

Nakreslite 2 pásmovú banku filtrov a popíšte (nie vzorce) podmienky na úplnú rekonštrukciu (Čo je úplná rekonštrukcia?)



Obr. 3.7. Základná schéma dvojpásmovej banky filtrov

Ak je výstupný signál identický so vstupným, potom hovoríme, že BF má vlastnosť **perfektnej (úplnej) rekonštrukcie**. Keďže v BF používané filtre nie sú ideálne, vzniká pri analýze aliasing. Ten je však možné v konečnom súčte pri syntéze eliminovať, ak prenosové funkcie filtrov pre analýzu $\tilde{F}_k(z)$ a syntézu $F_k(z)$ spĺňajú isté podmienky (pozri ďalšiu časť).

Postačujúce podmienky na úplnú rekonštrukciu sú:

- 1) eliminácia aliasingu $R_a(z) = 0, \forall z$
- 2) prenos je nanajvyš oneskorením $R_p(z) = 2z^{-l}, l \in Z$

Čo je to polpásmový filter? Popíšte ho v Z rovine a čase. Ako formujú filtre vo FB polpásmové filtre?

Polpásmový filter je taký KIO filter s impulzovou charakteristikou $p(n)$ a prenosovou funkciou $P(z)$, pre ktoré platia nasledovné podmienky:

- v z -rovine

$$P(z) = P(z^{-1}) \quad P(z) + P(-z) = 2 \quad (3.25)$$

- vo frekvenciách

$$P(e^{j\Omega}) = P(e^{-j\Omega}) \quad P(e^{j\Omega}) + P(e^{j(\Omega+\pi)}) = 2 \quad (3.26)$$

- v čase

$$p(n) = p(-n) \quad p(n) + (-1)^n p(n) = 2\delta(n) . \quad (3.27)$$

Filtre v BF formujú polpásmový filter z nasledovne:

Celkový prenos signálu BF sa dá vyjadriť v tvare:

$$R_p(z) = \tilde{H}(z)H(z) + \tilde{G}(z)G(z) \quad R_a(z) = \tilde{H}(-z)H(z) + \tilde{G}(-z)G(z) . \quad (3.34)$$

kde R_p je celkový prenos sústavou a R_a aliasing.

Postačujúce podmienky na úplnú rekonštrukciu sú:

- aliasing musí byť eliminovaný

$$R_a(z) = 0 \quad (3.35)$$

- prenos je konštantný, pričom je povolené oneskorenie signálu

$$R_p(z) = 2z^{-l} \quad l \in Z . \quad (3.36)$$

Riešením podmienky eliminácie aliasingu (3.35) dostaneme riešenie v tvare:

$$H(z) = \pm cz^m \tilde{G}(-z) \quad G(z) = \mp cz^m \tilde{H}(-z), \quad (3.37)$$

t. j. podmienky platia pre páry filtrov „do križa“. Hľadáme teraz riešenie podmienky na prenos (3.36). Označme $P_H(z) = \tilde{H}(z)H(z)$ a pomocou riešenia (3.37) vyjadríme podmienku (3.36) v závislosti od $P_H(z)$:

$$P_H(z) - P_H(-z)(-1)^m = 2z^{-l}. \quad (3.38)$$

Normovaním (centrovaním) $P_H(z)$ pomocou $P(z) = z^l P_H(z)$ dostávame výsledný tvar podmienky na celkový prenos sústavou:

$$P(z) + P(-z)(-1)^{m+l+1} = 2, \quad (3.39)$$

kde

$$P(z) = z^l \tilde{H}(z)H(z) \quad P(-z) = z^l \tilde{G}(z)G(z). \quad (3.40)$$

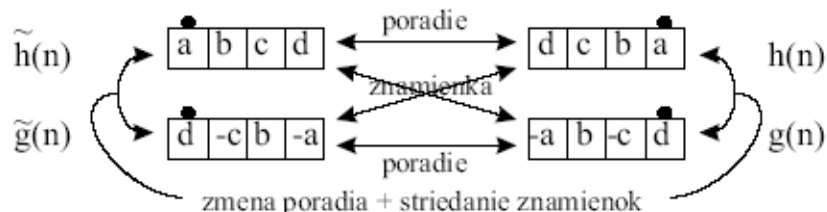
Rovnica 3.39– filtre v BF formujú polpásmový filter.

Aká je podmienka eliminácie aliasingu vo 2 pásmovej FB ? (vzorec) Ak je splnená ako vlastne môže byť výstupný signál ešte deformovaný ? Nakreslite príklad vo frekvencii. podmienka: $R_a(z)=0$, kde

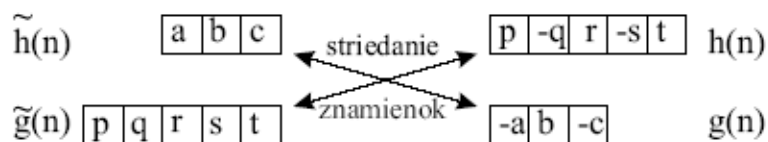
$$R_a(z) = \tilde{H}(-z)H(z) + \tilde{G}(-z)G(z)$$

Ak je výstupný signál identický so vstupným, BF má vlastnosť úplnej rekonštrukcie (perfektnej). Analyzujme teraz bližšie za akých podmienok nám v dvojpásmovej BF dochádza k úplnej rekonštrukcii. Predpokladajme, že máme k dispozícii (reálne neexistujúce) ideálne DP a HP filtre. Filtráciami vždy odstránime nepotrebnú polovicu spektra a pri pod- a nadvzorkovaní sa spektra akurát zaplnia, takže nevznikajú žiadne problémové situácie. ”Väčšinou” však máme k dispozícii **reálne filtre**, ktoré po podvzorkovaní **vytvárajú väčší či menší aliasing**. Po nadvzorkovaní signály v oboch vetvách zostanú zliate, t.j. drobná deformácia signálu v oboch vetvách ostane aj po interpolačnom filtrovaní. Ak má mať BF úplnú rekonštrukciu, tak požadujeme, aby sa tieto deformácie pri konečnom súčte navzájom eliminovali. Filtre musia vytvárať deformácie vhodným spôsobom, ktorý elimináciu zaručuje.

Koľko filtrov a ktoré stačí poznať v ortogonálnej / biortogonálnej banke filtrov aby sme vyrátali ostatne? A PREČO PRAVE TOĽKO A PRAVE TIE ?



Obr. 3.10. Príklad impulzových charakteristík filtrov a ich vzájomných závislostí v ortogonálnej BF s nulovým oneskorením. Bodkou sú označené koeficienty pri $n = 0$.



Obr. 3.11. Príklad impulzových charakteristík filtrov a ich vzájomných závislostí v biortogonálnej BF.

ortogonálna: stačí poznať 1 filter: $\hat{H}(z)$ - ostatné sa dajú vypočítať z neho.

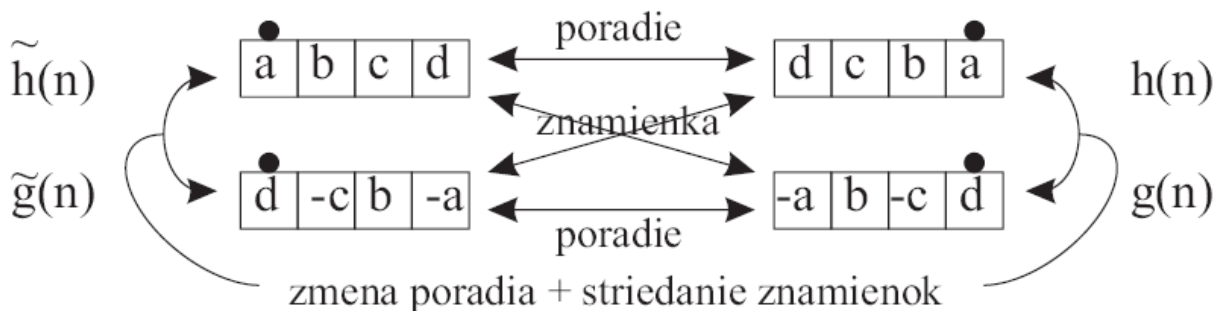
biortogonálna: treba 2 filtre: $H(z), \hat{H}(z)$ - ostatné sa dajú vypočítať z nich.

Ak sú filtre pre analýzu a syntézu kauzálné/nekauzálné čo z toho vyplýva pre syntetizačné filtre a pre celkový prenos sústavou? Načrtnite nejaké príklady.

Má nulové oneskorenie avšak obsahuje *nekauzálnu* časť - filtre pre analýzu a syntézu v oboch vetvách majú impulzové charakteristiky časovo obrátené. Oneskorením nekauzálnych filtrov (vynásobením členom $z^{-(2l-1)}$) dostaneme kauzálnu BF s oneskorením $2 \cdot l - 1$

Filtre pre analýzu sú ortogonálne navzájom a aj voči svojim párnym posunom.

Ak sústavu začneme navrhovať od syntézy, t.j. $H(z) = H_0(z)$, výsledkom je zámena analyzátnej a syntetizačnej časti BF, t.j. vo vzťahoch na výpočet filtrov sa iba zmení označenie duálnosti.



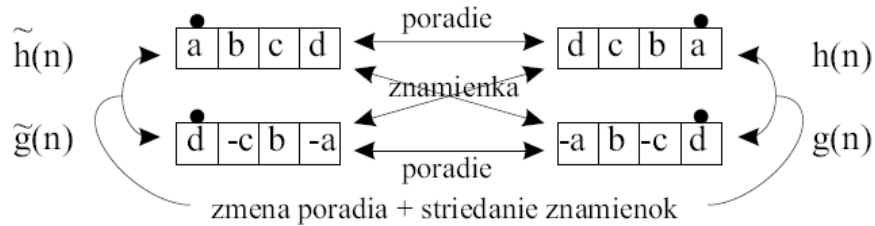
Príklad impulzových charakteristík filtrov v ortogonálnej BF s nulovým oneskorením. Bodkou sú označené koeficienty v $n=0$.

Aké sú vzájomné vzťahy medzi filtermi v ortogonálnej banke filtrov? (nakreslite obrázok). Vysvetlite prečo je časové otočenie nutné.

Prečo sú filtre $H(z) = \tilde{H}(z^{-1}), G(z) = \tilde{G}(z^{-1})$, na rozdiel od QMF filtrov, navzájom časovo otočené? Je to potrebné, lebo ináč by filtre v DP a HP vetve netvorili polpásmové filtre ($p(n)$ by nebolo symetrické) a úplná rekonštrukcia by sa nedala dosiahnuť.

$$\tilde{H}(z) = H_0(z) \quad H(z) = \pm z^{2l-1} \tilde{G}(-z) = \tilde{H}(z^{-1})$$

$$\tilde{G}(z) = \mp z^{-(2l-1)} \tilde{H}(-z^{-1}) \quad G(z) = \mp z^{2l-1} \tilde{H}(-z) = \tilde{G}(z^{-1})$$



Obr. 3.10. Príklad impulzových charakteristík filtrov a ich vzájomných závislostí v ortogonálnej BF s nulovým oneskorením. Bodkou sú označené koeficienty pri $n = 0$.

Napište a popíšte matice vyjadrujúce decimáciu a interpoláciu vo FB. Ukážte ako sa používajú v transformačných maticiach. Čo pre ne znamená podmienka biortogonalita? vzorce na str. 65, 62 63, biortogonalita: str, 63 biortogonálne riešenie.

Matice \hat{H}, \hat{G} sú decimáčnne a majú rozmery $N \times N/2$. H, G interpolačné matice s rozmermi $N/2 \times N$.

Pre dvojpásmovú banku filtrov podľa obr. 3.7 sme analýzu a syntézu v banke filtrov popísali vzťahmi (3.15), (3.16). Celý postup môžeme prepísať v maticovom tvare ako transformáciu, analogicky maticovému tvaru DWT v časti (1.7):

$$\bar{X} = T_a \bar{x} \quad \bar{x} = \hat{T}_s \bar{X}, \quad (3.48)$$

kde $\bar{x}, \bar{X}, \hat{x}$ sú stĺpcové vektory vstupného, transformovaného, výstupného signálu a T_a, T_s sú transformačné matice pre analýzu, resp. pre syntézu. Predpokladajme konečnú dĺžku vstupného signálu a kruhovú konvolúciu v BF. Potom $\bar{x}, \bar{X}, \hat{x}, T_a, T_s$ môžeme vyjadriť v tvare:

$$\bar{x} = (x(0), x(1), \dots, x(N-1))^T \quad (3.49)$$

$$\bar{X} = (c(0), c(1), \dots, c(N/2-1), d(0), d(1), \dots, d(N/2-1))^T \quad (3.50)$$

$$T_a = \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) & \dots & \dots & \dots & \tilde{h}(1) \\ \dots & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) \\ \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) & \dots & \dots & \dots & \tilde{g}(1) \\ \dots & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(0) & \vdots & \dots & \vdots & g(0) & \vdots & \dots & \vdots \\ h(1) & h(-1) & \dots & \vdots & g(1) & g(-1) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(0) & & \vdots & \vdots & g(0) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(1) & \dots & h(-1) & \vdots & g(1) & \dots & g(-1) \\ \vdots & \vdots & \dots & h(0) & \vdots & \vdots & \dots & g(0) \\ h(-1) & \vdots & \dots & h(1) & g(-1) & \vdots & \dots & g(1) \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Pri úplnej rekonštrukcii bez oneskorenia platí $\hat{x} = \bar{X}$. Potom platí:

$$\mathbf{T}_a \mathbf{T}_s = \mathbf{I}_N = \mathbf{T}_s \mathbf{T}_a.$$

Biortogonálne riešenie umožňuje návrh dvojpásmových bánk filtrov s KIO filtermi s lineárnou fázou a rôznymi dĺžkami impulzovej charakteristiky filtrov pri analýze a syntéze. Toto riešenie je limitované „iba“ tým, aby filtre spĺňali podmienku eliminácie aliasingu (3.37), ktorá je zvyčajne v tvare:

$$H(z) = z^m \tilde{G}(-z) \quad G(z) = -z^m \tilde{H}(-z) \quad (3.45)$$

a podmienku konštantného prenosu formulovanú vzťahmi (3.39), (3.40):

$$P(z) + P(-z)(-1)^{m+l+1} = 2,$$

kde

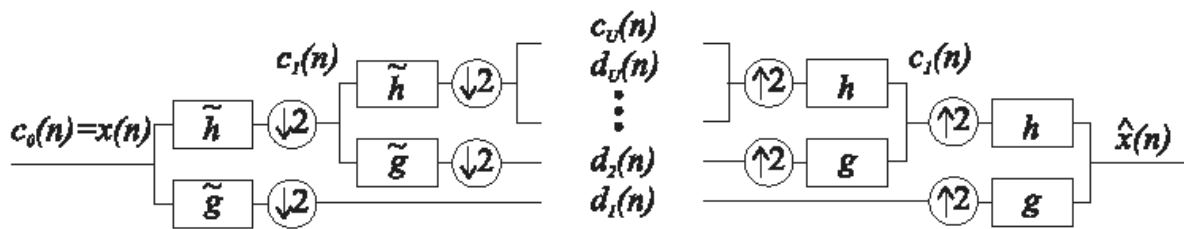
$$P(z) = z^l \tilde{H}(z) H(z) \quad P(-z) = z^l \tilde{G}(z) G(z).$$

Čiže biortogonálne riešenie znamená možnosť návrhu BF.

Banky filtrov, časť 2

Realizácia výpočtu dyadickej DWT a IDWT pomocou bánk filtrov – schéma, str.66

Podmienky na úplnú rekonštrukciu v ortogonálnom riešení banky filtrov sú zahrnuté v Tab.1.2. Analogicky môžeme konštatovať že biortogonálne riešenie banky filtrov vyhovuje podmienkam v časti 1.9. Uvedomme si, že na to, aby dvojpásmové banky filtrov mohli počítať WR a DWT musia mať oba filtre v DP vetve aspoň jednou nulou pri $\Omega = \pi$ a naopak oba filtre v HP vetve jednu nulou pri $\Omega = 0$. Táto podmienka je nutná, jej postačujúcosť je však na hranici. To rýchlo zistíme pri výpočte WR a DWT. Doteraz sme totiž uvažovali iba rozklad na jednej úrovni rozlíšenia a pri výpočte WR a DWT potrebujeme opakovane rozkladať koeficienty v DP časti.



Obr. 3.13: Princíp realizácie výpočtu diskretnej (dyadickej) waveletovej transformácie bankou filtrov.

Aký majú súvis hmra(n) a h(n) v analyzačnej časti. Prečo?.

Str 58. su to vzťahy vyjadrujúce vztah medzi bankou filtrov a DWT

Vzťahy sú si podobné už na prvý pohľad. Pri podrobnejšom porovnaní zistíme, že analýza a syntéza v dvojpásmovej banke filtrov je *ekvivalentná* jednému stupňu rozkladu a rekonštrukcii signálu pri WR a DWT, ak platí:

$$\tilde{h}(n) = \tilde{h}_{mr}(-n) \quad h(n) = h_{mr}(n) \quad (3.17)$$

$$\tilde{g}(n) = \tilde{g}_{mr}(-n) \quad g(n) = g_{mr}(n) . \quad (3.18)$$

T. j. pri analýze je treba použiť časovo obrátené postupnosti duálnych dilatačných koeficientov. Potom budú vzťahy matematicky ekvivalentné. To ale znamená že podmienky na úplnú rekonštrukciu v banke filtrov formulované v kontexte ČSS musia mať svoj ekvivalent, formulovaný v podmienkach pre waveletové systémy.

Aký je rozdiel medzi BF s úplnou rekonštrukciou a BF ktoré realizujú wavelety?

Ak normovaný súčet prenosových funkcií DP filtrov v dvojpásmovej BF tvorí prenosovú funkciu polpásmového filtra a súčet $m+l$ je nepárny, potom BF dosahuje úplnú rekonštrukciu.

$$P(z) + P(-z)(-1)^{m+l+1} = 2, \quad (3.39)$$

kde

$$P(z) = z^l \tilde{H}(z) H(z) \quad P(-z) = z^l \tilde{G}(z) G(z) . \quad (3.40)$$

Musí platiť daná podmienka, a teda BF s úplnou rekonštrukciou je podmnožinou BF tvorenou waveletmi, lebo obe sú tvorené waveletmi ale nie vždy sa dá dosiahnuť úplná rekonštrukcia, musí byť splnená vyššie spomínaná podmienka.

DLT a ich implementácie bankami filtrov + základne vzorce

Zmena reprezentácie signálu je zväčša uskutočnená transformáciou.

Najbežnejší spôsobom rozkladu - *diskrétna lineárna transformácia (DLT)*

Najznámejšie prevedenia sú:

- *blokové transformácie (BT)* - pracujú so signálom v dávkach resp. po blokoch neodstraňujú medziblokovú koreláciu a navyše vzniká rušivý "blokový efekt"
- *prekrývne transformácie (Lapped transforms)*
- *transformácie pracujúce na princípe viacúrovňového rozlíšenia signálu.*

Každá DLT je ekvivalentná rozkladu v M-pásmovej BF, v ktorej časovo reverzné impulzné odpovede jednotlivých filtrov pre analýzu a syntézu odpovedajú jednotlivým bázovým vektorom DLT.



Implementácia Blokových transformácií (BT) bankami filtrov

Rozdelíme vstupný signál $x(n)$ na neprekrývajúce sa bloky $\{x_b(n)\}$ veľkosti M (b je číslo bloku). Transformáciu $x_b(n)$ pomocou transformačnej matice \tilde{F} veľkosti $M \times M$ na bloky $X_b(n)$ zapíšeme v maticovom tvare ako:

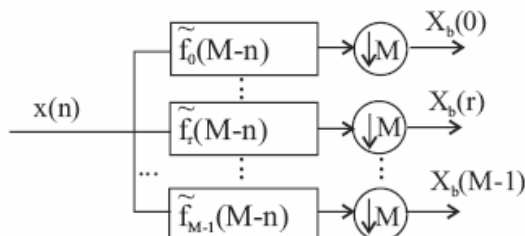
$$\bar{X}_b = \tilde{F} \bar{x}_b$$

, kde $\bar{x}_b = (x_b(0), x_b(1), \dots, x_b(M-1))^T$, $\bar{X}_b = (X_b(0), X_b(1), \dots, X_b(M-1))^T$. Riadkové vektory matice \tilde{F} označme \tilde{f}_r : $\tilde{f}_r = (\tilde{f}_r(0), \tilde{f}_r(1), \dots, \tilde{f}_r(M-1))$, kde $r = 0, 1, \dots, M-1$ je číslo riadku. Transformáciu môžeme implementovať nasledovnou M-pásmovou bankou filtrov, kde sú impulzové charakteristiky jednotlivých filtrov časovo otočené riadky transformačnej matice:

Platí:

$$y_r(n) = \tilde{f}_r(M-1-n) * x(n)$$

$$X_b(r) = y_r(M(b-1))$$



Čo je polyfázový rozklad a polyfázove filtre, prečo to robíme, základne obrázky (blokové diagramy) vzorce

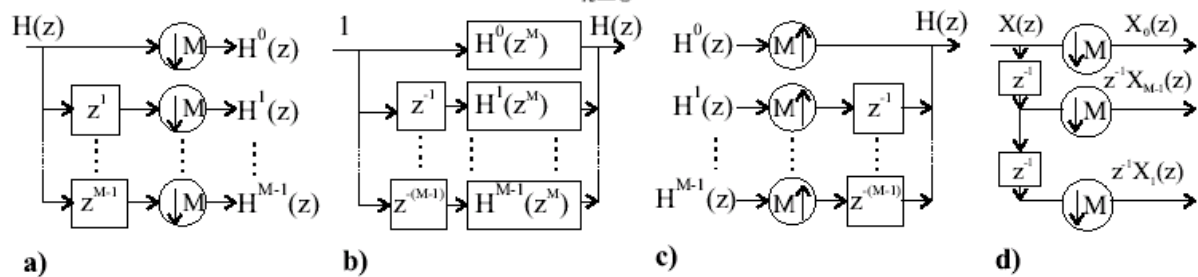
Pri systémoch s rôznym taktovaním je často vhodné reprezentovať filtre (ale aj signály) ich tzv. *polyfázovými komponentmi*. Filter s prenosovou funkciou $H(z)$ a impulzovou charakteristikou $h(n)$ môžeme rozložiť na M polyfázových zložiek $H_k(z)$ pomocou vzťahu:

$$H^k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(k + Mn) z^{-n}, \quad k = 0, 1, \dots, M - 1$$

Potom hovoríme o *polyfázovej reprezentácii* $H(z)$ pomocou jeho polyfázových zložiek $H_k(z)$.

prenosovú funkciu z nich môžeme späť zložiť pomocou:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} H^k(z^M)$$



Obr. 5. 1: Polyfázová reprezentácia prenosovej funkcie $H(z)$: a) rozklad na M polyfázových komponentov $H_k(z)$ b) späť zloženie prenosovej funkcie odpovedajúce vzťahu (EQ: POLY: ZLOZENIE) c) ekvivalent (b), avšak v tvare, keď vyniká jeho dualita s rozkladom d) Tvar polyfázového rozkladu, ak chceme použiť iba oneskorenia (porovnaj s (a))

Polyfázová matice a ich komponenty, finalny tvar banky filtrov so zlucenými polyfazovými maticami. Ako su zlucene matice? Podmienka uplnej rekonstrukcie.

Polyfázove matice a komponenty – str. 94,95. schema asi str.96, a vzorce pod tým

Pri systémoch s rôznym taktovaním je často vhodné reprezentovať filtre (ale aj signály) ich tzv. *polyfázovými zložkami*. Filter s prenosovou funkciou $H(z)$ a impulzovou charakteristikou $h(n)$ môžeme rozložiť na M polyfázových zložiek $H^k(z)$ pomocou vzťahu:

$$H^k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(k + Mn) z^{-n}, \quad k = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (5.1)$$

resp. prenosovú funkciu z nich môžeme späť zložiť pomocou:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} H^k(z^M). \quad (5.2)$$

Potom hovoríme o *polyfázovej reprezentácii* $H(z)$ pomocou jej polyfázových zložiek $H^k(z)$.

Skúsme pomocou polyfázového rozkladu zapísať M -pásmovú banku filtrov (obr. 3.5). Každú vetvu v analyzačnej časti môžeme reprezentovať pomocou obr. 5.2a2. Pre signály v jednotlivých vetvách po filtrácii ($X_r(z)$), platí:

$$\begin{pmatrix} Y_0(z) \\ Y_1(z) \\ \vdots \\ Y_{M-1}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_0^0(z^M) & \tilde{F}_0^1(z^M) & \dots & \tilde{F}_0^{M-1}(z^M) \\ \tilde{F}_1^0(z^M) & \tilde{F}_1^1(z^M) & \dots & \tilde{F}_1^{M-1}(z^M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{F}_{M-1}^0(z^M) & \tilde{F}_{M-1}^1(z^M) & \dots & \tilde{F}_{M-1}^{M-1}(z^M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-(M-1)} \end{pmatrix} X(z) =$$

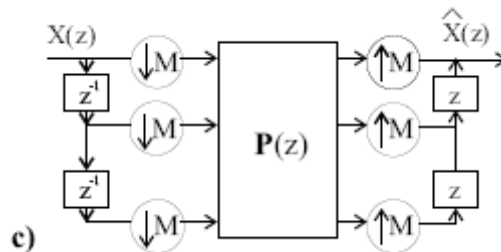
$$= \tilde{\mathbf{F}}_P(z^M) \tilde{\mathbf{Z}}_M \mathbf{X}(z), \quad (5.3)$$

kde $\tilde{\mathbf{F}}_P$ je **polyfázová matica** pre analýzu a $\tilde{F}_r^k(z)$ je k -ta polyfázová zložka r -teho filtra pre analýzu. Tvar matice $\tilde{\mathbf{Z}}_M$ vyplýva z reprezentácie na obr. 5.1d. Po decimácii, môžeme signály $Y_r(z)$ na základe obr. 5.2a3 vyjadriť v jednotlivých vetvách pomocou polyfázovej matice a polyfázových zložiek signálu $X(z)$ takto:

$$\begin{pmatrix} Y_0(z) \\ \vdots \\ Y_{M-1}(z) \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{F}}_P \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & z^{-1} \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & z^{-1} & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0(z) \\ \vdots \\ X^{M-1}(z) \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Polyfázová matica pre syntézu F_P má rovnaký tvar ako $\tilde{\mathbf{F}}_P$, sú v nej však použité polyfázové zložky $F_{r,k}(z)$ filtrov pre syntézu. Celú banku filtrov môžeme použitím tohoto prístupu prepísať do tvarov schématicky znázornených na obr. 5.3. Z vlastností BF vyplýva, že F_P je treba v syntéze používať v transponovanom tvare. Podmienku úplnej rekonštrukcie potom môžeme formulovať v tvare:

$$\tilde{\mathbf{F}}_P(z) \mathbf{F}_P^T(z) = \mathbf{P}(z) = \mathbf{I} z^l \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (5.5)$$



Matice sú zlúčené pomocou podľa vzorca 5.2.

Prečo je polyfazova matica pre syntezu pouzita v transponovanom tvare ? Chodtena to logicky, co sa deje pri nasobei matic ...

Podľa vzťahu 5.13 na str.97

Invertovaním vzťahu pre analýzu dostaneme:

$$\mathbf{X}(z) = \mathbf{Z}(z) \left(\tilde{\mathbf{F}}_P(z) \right)^{-1} \mathbf{Y}(z). \quad (5.13)$$

Teda sne vychádzali zo vzťahu pre analýzu a keď si to odvodíme pre syntézu dostaneme transponovanú maticu.

Vzorec pre analýzu:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(z) &= \begin{pmatrix} C(z) \\ D(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\tilde{H}(z) X(z) \right]_e \\ \left[\tilde{G}(z) X(z) \right]_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_e(z) X_e(z) + z^{-1} \tilde{H}_o(z) X_o(z) \\ \tilde{G}_e(z) X_e(z) + z^{-1} \tilde{G}_o(z) X_o(z) \end{pmatrix} = \\ &= \tilde{\mathbf{F}}_p(z) \tilde{\mathbf{Z}}(z) \mathbf{X}(z), \end{aligned} \quad (5.9)$$

Porovnaním vzťahov (5.11) a (5.13) zistíme, že pre úplnú rekonštrukciu bez oneskorenia $\hat{\mathbf{X}}(z) = \mathbf{X}(z)$, treba aby platilo:

$$\left(\tilde{\mathbf{F}}_p(z) \right)^{-1} = \mathbf{F}_p^T(z). \quad (5.14)$$

2 pasmova BF v polyfazovom tvare. Matematicky popis C(z) a D(z), t.j. vzorce. Vysvetlit podmienku uplnej rekonstrukcie.

Str.96. , veta 5.1

$$C(z) = \tilde{H}_e(z) X_e(z) + z^{-1} \tilde{H}_o(z) X_o(z)$$

A D(z) si určíme pozriem a vidím☺ zo vzorca

$$\mathbf{Y}(z) = \begin{pmatrix} C(z) \\ D(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\tilde{H}(z) X(z) \right]_e \\ \left[\tilde{G}(z) X(z) \right]_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_e(z) X_e(z) + z^{-1} \tilde{H}_o(z) X_o(z) \\ \tilde{G}_e(z) X_e(z) + z^{-1} \tilde{G}_o(z) X_o(z) \end{pmatrix} =$$

Úplná rekonštrukcia:

Porovnaním vzťahov (5.11) a (5.13) zistíme, že pre úplnú rekonštrukciu bez oneskorenia $\hat{\mathbf{X}}(z) = \mathbf{X}(z)$, treba aby platilo:

$$\left(\tilde{\mathbf{F}}_p(z) \right)^{-1} = \mathbf{F}_p^T(z). \quad (5.14)$$

Platí nasledovná veta [17]:

Veta 5.1 Pre kriticky vzorkovanú Banku filtrov s KIO filtrami je úplná rekonštrukcia možná vtedy a len vtedy, keď $\det \left(\tilde{\mathbf{F}}_p(z) \right)$ je mononóm.

Co je unitarna a paraunitarna matica, + príklady matic

Definícia 5.1 na str. 97, príklady

Definícia 5.1 Matica $\mathbf{F}(z)$ je **unitárna**, ak sa jej inverzná matica rovná transponovanej konjugovanej matici (rozštrnente ortonormality). **Paraunitarita** znamená, že matica $\mathbf{F}(z)$ je unitárna pre všetky $|z| = 1$.

Potom platí:

$$\mathbf{F}_p(z) = \tilde{\mathbf{F}}_p(z^{-1}). \quad (5.19)$$

V triviálnom prípade, keď platí $\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \mathbf{I}$, je realizovaná tzv. „lenivá“ waveletová transformácia, ktorá signál iba rozdelí na párne a nepárne zložky.

Príklady: niečo podobne ako na str 96, konkrétne s číslami asi treba vymyslieť a nič ma teraz nenapadá☺

$$\mathbf{F}_p(z) = \begin{pmatrix} H_e(z) & H_o(z) \\ G_e(z) & G_o(z) \end{pmatrix}$$

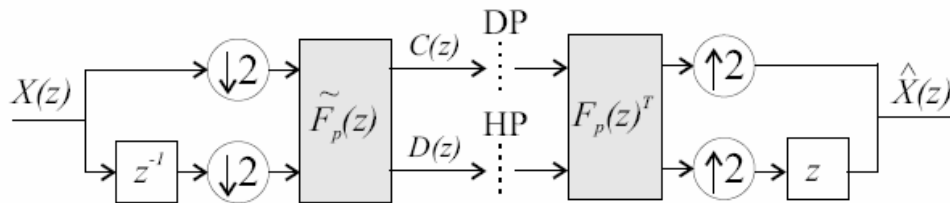
$$\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \begin{pmatrix} \tilde{H}_e(z) & \tilde{H}_o(z) \\ \tilde{G}_e(z) & \tilde{G}_o(z) \end{pmatrix}$$

Čo je lenivá DWT, nakreslite jej BF

$$\mathbf{F}_p(z) = \tilde{\mathbf{F}}_p(z^{-1})$$

Triviálny prípad, keď $\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \mathbf{I}$ realizuje tzv. "lenivú" waveletovú transformáciu, ktorá signál iba rozdelí na párne a nepárne zložky.

S touto transformáciou sme sa už stretli v časti 5.1.1. Vstupný signál je pri nej iba rozdelený na párne a nepárne zložky, pričom charakter oboch zložiek signálu je rovnaký. Rekonštrukcia je síce úplná, ale o nejakých vylepšeniach v zmysle predikcie a aktualizácie nemôže byť ani reč.



Obr. 5.4. Polyfázová reprezentácia dvojpásmovej banky filtrov

t.j. na úplnú rekonštrukciu bez oneskorenia $\hat{\mathbf{X}}(z) = \mathbf{X}(z)$, treba: $(\tilde{\mathbf{F}}_p(z))^{-1} = \mathbf{F}_p^T(z)$.

Potom napr. pri $\det(\tilde{\mathbf{F}}_p(z)) = 1$ (determinant musí byť mononóm, napr. 1) platí:

Ortogonalne riešenie FB dostaneme ak je matica $\tilde{\mathbf{F}}_p(z)$ *paraunitárna*, t.j.:

$$(\tilde{\mathbf{F}}_p(z))^{-1} = \tilde{\mathbf{F}}_p^T(z^{-1}).$$

Pozn.: matica je *unitárna*, ak jej inverzná matica je rovná transponovanej konjugovanej matici (rozšírenie *ortonormality*). Paraunitarita znamená, že matica $\mathbf{H}(z)$ je unitárna pre všetky $|z| = 1$.

Potom platí

$$\mathbf{F}_p(z) = \tilde{\mathbf{F}}_p(z^{-1})$$

V triviálnom prípade, keď platí $\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \mathbf{I}$, je realizovaná tzv. „lenivá“ waveletová transformácia, ktorá signál iba rozdelí na párne a nepárne zložky.

Komplementárne filtre, vlastnosti existencie

Komplementárne filtre

Filtre $\tilde{H}(z)$ a $\tilde{G}(z)$ nazývame **komplementárne** ak pri ich použití v analyzačnej resp. syntetizačnej časti FB je možné dosiahnuť **úplnú rekonštrukciu**.

Veta1: Keď sú komplementárne $\tilde{H}(z)$ a $\tilde{G}(z)$, potom sú komplementárne aj $H(z)$ a $G(z)$.

Veta2: K danému kauzálnemu FIR filteru $\tilde{H}(z)$ existuje komplementárny filter $\tilde{G}(z)$ vtedy a len vtedy, ak polyfázové komponenty $\tilde{H}(z)$ sú nesúdeliteľné.

Dôkaz2: Nutná a postačujúca podmienka na úplnú rekonštrukciu FB je aby determinant ich polyfázovej matice $\tilde{F}_p(z)$ bol **mononóm**. Nesúdeliteľnosť $\tilde{H}_e(z)$ a $\tilde{H}_o(z)$ je nutná, ináč by sa ich spoločný faktor vyskytoval v determinante. Postačujúciosť vyplýva s Euklidovho algoritmu:

Ak máme nesúdeliteľné polynómy $a(z)$ a $b(z)$, potom $a(z)p(z) + b(z)q(z) = c(z)$ má jednoznačné riešenie. Voľbou $c(z) = z^{-k}$ získané riešenie $\{p(z), q(z)\}$ predstavuje polyfázové komponenty $\tilde{G}(z)$.

Co je Stupeň Laurentovho polynómu, mononóm, podiel Laurentovych polynomov – vlastnosti, nesúdeliteľnosť

Na prenosové funkcie filtrov sa môžeme pozerat' ako na Laurentove polynómy [40]. Prenosová funkcia $H(z)$ KIO filtra s impulzovou charakteristikou $h(k)$ je **Laurentov polynóm** daný ako:

$$H(z) = \sum_{k=k_b}^{k_e} h(k) z^{-k}, \quad (6.4)$$

kde k_b a k_e sú najmenšie, resp. najväčšie čísla, pre ktoré $h(k) \neq 0$. **Stupeň** $L\{H(z)\}$ Laurentovho polynómu je potom definovaný ako:

$$L\{H(z)\} = k_e - k_b. \quad (6.5)$$

Mononóm je polynóm v tvare z^p . Ako klasický polynóm má sice stupeň p , avšak ako Laurentov polynóm má stupeň $L\{z^p\} = 0$. Platí:

- Podiel dvoch Laurentových polynómov existuje, avšak nie je jednoznačný: T. j. nech $A(z)$ a $B(z)$ sú Laurentove polynómy, pričom $L\{A(z)\} \geq L\{B(z)\}$. Potom vždy existuje $Q(z)$ (kvocient) stupňa $L\{Q(z)\} = L\{A(z)\} - L\{B(z)\}$ a $R(z)$ (zvyšok) stupňa $L\{R(z)\} \leq L\{B(z)\}$ taký, že platí:

$$A(z) = B(z)Q(z) + R(z), \quad (6.6)$$

t. j.:

$$Q(z) = A(z)/B(z) \quad R(z) = A(z) \bmod B(z). \quad (6.7)$$

- Laurentove polynómy $A(z)$ a $B(z)$ nazývame **nesúdeliteľné** ak $NSD(A(z), B(z)) = z^p$ (t. j. NSD je mononóm).

Rozšírenia waveletov:

separovateľná 2D waveletova transformácia, druhy, spôsob výpočtu, vlastnosti

Rozšírenie waveletov do viacerých rozmerov je úzko zviazané s konceptom viacrozmerných bánk filtrov [21]. Vo všeobecnosti môžeme viacrozmerné waveletové systémy riešiť buď priamym návrhom, alebo transformáciou z jednorozmerného (1D) prípadu. Triviálne, **separovateľné prípady** viacrozmerných waveletov môžeme vytvoriť pomocou tenzorového súčinu použitím 1D prototypov týmito spôsobmi [8]:

- *Štandardný prípad* — tenzorovým súčinom 1D bázových funkcií. Výsledná 2D báza bude teda tvorená súčinními $\varphi_{i,n}$ a $\psi_{j,n}$, $i, j, n \in \mathcal{Z}$. Napr. pri počiatočnej úrovni rozlíšenia 0 a pri U úrovniach rozkladu bude výsledkom $(U + 1)^2$ množín funkcií, pomocou ktorých bude signál reprezentovaný:

$$\begin{array}{ll} \varphi_{U,n}(x) \times \varphi_{U,n}(y) & \psi_{j,n}(x) \times \varphi_{1,n}(y) \\ \varphi_{1,n}(x) \times \psi_{i,n}(y) & \psi_{j,n}(x) \times \psi_{i,n}(y) \end{array} \quad n \in \mathcal{Z}, \quad i, j = 1 \dots U. \quad (4.8)$$

- *Neštandardný prípad* — tenzorovým súčinom analýz s viacúrovňovým rozlíšením (AVR) [18]. V 2D prípade sú potom bázové funkcie tvorené zmenami mierky a posunmi troch základných waveletov $\psi\varphi(x, y)$, $\varphi\psi(x, y)$, $\psi\psi(x, y)$ a funkcie mierky $\varphi\varphi(x, y)$:

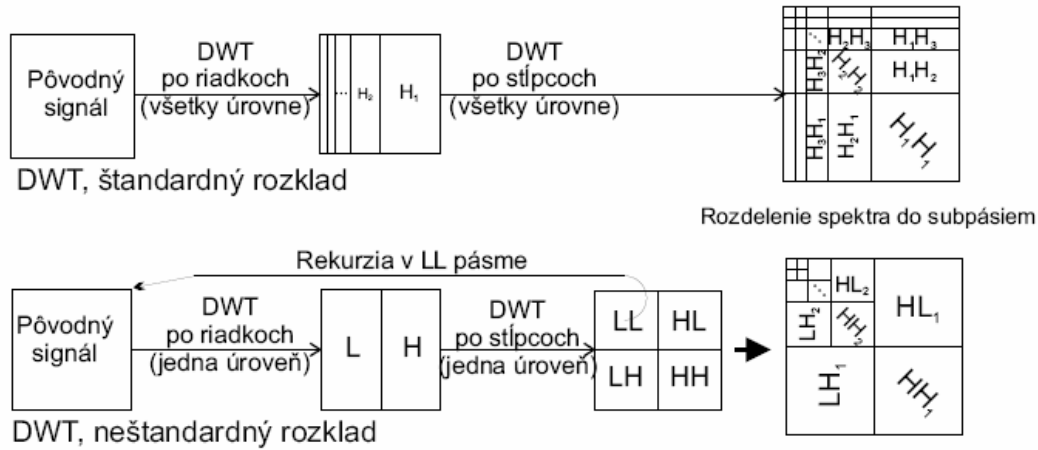
$$\varphi\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \psi\varphi(x, y) = \psi(x)\varphi(y) \quad (4.9)$$

$$\varphi\psi(x, y) = \varphi(x)\psi(y) \quad \psi\psi(x, y) = \psi(x)\psi(y). \quad (4.10)$$

Prí štandardnom rozklade najprv spravíme úplnú transformáciu (t. j. všetky rozklady) v jednom smere (napr. v riadkoch) a následne úplnú transformáciu v druhom smere (t. j. v stĺpcoch).

Prí neštandardnom rozklade vykonáme v jednom a následne aj druhom smere iba jeden rozklad a potom tento postup opakujeme, ale iba v ľavej hornej štvrtine. Príklad neštandardného rozkladu aplikovaného na obrazové dáta je znázornený na obr. 4.5. Pri práci s 2D signálmi sa častejšie používa neštandardný prípad, ktorý má oproti štandardnému viaceré výhody, ako napríklad rýchlejší výpočet a efektívnejšiu reprezentáciu.

Prí neseparovateľných prípadoch viacrozmerných waveletov môžeme dosiahnuť vyššiu anizotropiu bázových funkcií a tým aj lepšie zachytiť lokálnu koncentráciu energie v signáli, pozri obr. 4.6a. Cenou za neseparovateľnosť systému je vyšší počet operácií pri transformácii. Transformácia sa obvykle rieši [41], [8] 2D filtráciou signálu vzorkovaného pomocou neseparovateľnej vzorkovacej mriežky (v 2D prípade zvyčajne tzv. *Quincunx* [17]). Príkladom neseparovateľných filtrov vhodných na 2D DWT sú tzv. Nevillove interpolačné filtre [41]. Príklady základných waveletov v separovateľnom neseparovateľnom systéme sú znázornené na obr. 4.6a (jednorozmerné ekvivalenty dvoch z nich sú znázornené na obr. 4.1). Akým spôsobom sa prejaví anizotropia v separovateľnom systéme pri aproximácii obrazu je znázornené na obr. 4.6b.



Obr. 4.4. Štandardný a neštandardný rozklad 2D signálu pomocou separovateľnej 2D DWT — výsledné tvary spektier a spôsoby ich výpočtu

M pásmové wavelety, princíp, popis, relácia medzi mierkami, vlastnosti

Koncept M -pásmových waveletov predstavuje zovšeobecnenie systémov dyadických waveletov. V AVR pri dyadických waveletoch bola dilatačná rovnica pre funkciu mierky daná vzťahom (1.51). Jej M -pásmovým zovšeobením je vzťah:

$$\varphi(t) = \sqrt{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(Mt - n) \quad M \in \mathcal{Z} \quad M > 2. \quad (4.13)$$

Čo platí pre $h_{mr}(n)$, ak báza tvorená pomocou takýchto $\varphi(t)$ je ortonormálna? Označme $h_{mr}(n) = h(n)$. Analogicky ako pri vlastnostiach ortonormálnych DWT platí [23]:

$$\sum_n h(n) = \sqrt{M} \quad (4.14)$$

$$\sum_n h(Mn + m) = 1/\sqrt{M} \quad H(2\pi l/M) = 0 \quad l = 0, 1, \dots, M-1 \quad (4.15)$$

$$\sum_n h(n + Mm) h(n) = \delta(m) \quad \sum_n h(n)^2 = 1 \quad (4.16)$$

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + 2\pi/M)|^2 + \dots + |H(\omega + 2\pi(M-1)/M)|^2 = M. \quad (4.17)$$

Aká je situácia so zodpovedajúcimi waveletmi? Nemáme jeden základný wavelet, ale $M-1$ základných waveletov $\psi_k(t)$:

$$\psi_k(t) = \sqrt{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_k(n) \varphi(Mt - n) \quad k = 0, 1, \dots, M-1. \quad (4.18)$$

Čomu na každej úrovni rozlíšenia zodpovedá $M-1$ diferenčných priestorov $\mathcal{W}_{m,l}$. T. j. pre AVR platí:

$$\mathcal{V}_m = \mathcal{V}_{m+1} \oplus \mathcal{W}_{m+1,1} \oplus \mathcal{W}_{m+1,2} \oplus \dots \oplus \mathcal{W}_{m+1,M-1}. \quad (4.19)$$

Všetky základné wavelety sú ortogonálne k funkcii mierky, t. j. :

$$\int \varphi(t-n) \psi_k(t-m) = 0 \quad \sum_n h(n) g_k(n - Mk) = 0 \quad k = 0, 1, \dots, M-1. \quad (4.20)$$

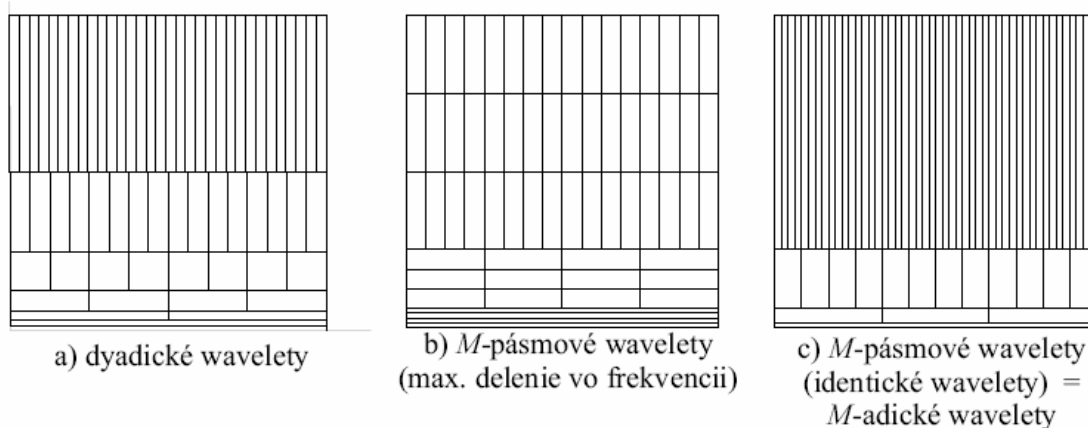
Casovo-frekvenčne vlastnosti M-waveletov, Co su to M-adicke wavelety, prikklad rozlozenia subpasim a rozdelenia TF roviny pre dany stupen M

Co sme získali zovšeobecnením dyadických waveletov na M -pásmové ?

- Stupne voľnosti — je veľa rôznych ortogonálnych waveletov k danej funkcii mierky
- Časovo-frekvenčnú rovinu môžeme deliť lineárne aj logaritmicky (prípadne kombináciou oboch)

M-adické wavelety dostaneme, ak pri M-pásmových waveletoch zvolíme M – 1 waveletov rovnakých. Vznikne čisto logaritmické delenie TF roviny vo frekvencii pri najhustejšom delení v čase.

- Čisto logaritmické delenie je ekvivalentné *M-adickým waveletom*, t.j. máme iba jeden wavelet (M-1 waveletov je rovnakých) s hustejšou vzorkovacou mriežkou



Obr. 4.13. Porovnanie delenia TF roviny pri dyadických a štvorpásmových waveletoch: **a)** dyadické wavelety **b)** štvorpásmové wavelety (3 rôzne wavelety zaberajúce svojimi posunmi rôzne frekvenčné pásma) **c)** štvorpásmové wavelety a ich špeciálny prípad 4-adické wavelety — všetky 3 wavelety sú rovnaké, získali sme najlepšie rozlíšenie v čase.

Pre nás je z tohto dôležité iba písmeno „c“, zvyšné som nechal iba pre porovnanie.

Čo platí pre $h_{mr}(n)$, ak báza tvorená pomocou takýchto $\varphi(t)$ je ortonormálna? Označme $h_{mr}(n) = h(n)$. Analogicky ako pri vlastnostiach ortonormálnych DWT platí [23]:

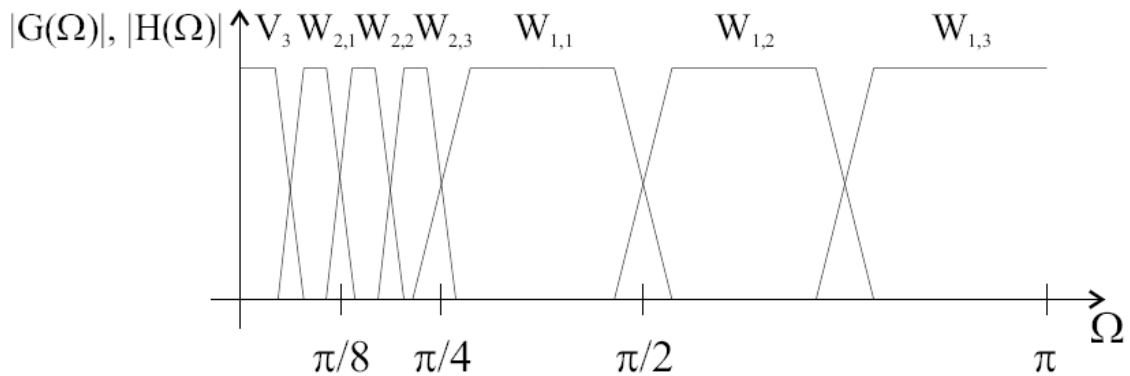
$$\sum_n h(n) = \sqrt{M} \tag{4.14}$$

$$\sum_n h(Mn + m) = 1/\sqrt{M} \quad H(2\pi l/M) = 0 \quad l = 0, 1, \dots, M - 1 \tag{4.15}$$

$$\sum_n h(n + Mm) h(n) = \delta(m) \quad \sum_n h(n)^2 = 1 \tag{4.16}$$

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + 2\pi/M)|^2 + \dots + |H(\omega + 2\pi(M - 1)/M)|^2 = M. \tag{4.17}$$

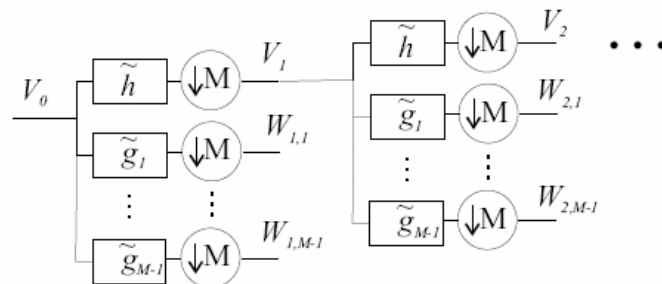
Príklad rozdelenia subpásiem pre 4-pásmovú DWT



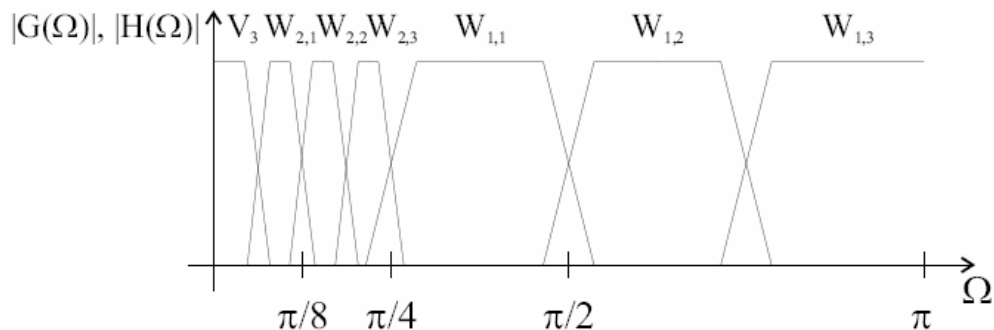
Obr. 4.12. M -pásmová DWT, schématické znázornenie častí frekvenčného spektra zodpovedajúce jednotlivým podpriestorom v AVR pre $M = 4$

V com su M -wavelety lepsie ako ortogonalne wavelety, nakreslit banku filtrov, ktora pocita M -DWT

- Stupne voľnosti – je veľa rôznych ortogonálnych waveletov k danej funkcii mierky
- Časovo-frekvenčnú rovinu môžeme deliť lineárne aj logaritmicky (mix oboch)
- Čisto logaritmické delenie je ekvivalentné M -adickým waveletom, t.j. máme iba jeden wavelet ($M-1$ waveletov je rovnakých) s hustejšou vzorkovacou mriežkou



Obr. 4.11. Realizácia M -pásmovej DWT bankami filtrov (schématické znázornenie analyzickej časti) pre $M = 4$



Obr. 4.12. M -pásmová DWT, schématické znázornenie častí frekvenčného spektra zodpovedajúce jednotlivým podpriestorom v AVR pre $M = 4$

V čom sa líšia Multiwavelety od M-waveletov a od ortonormálnych waveletov, Nakresliť hierarchie priestorov v MRA.

MRA = AVR

Multiwavelety [36], [37], nazývané aj **R-wavelety** sú zovšeobecnením M -pásmových waveletov v tom zmysle, že síce máme v AVR jednu hierarchiu aproximačných pod-

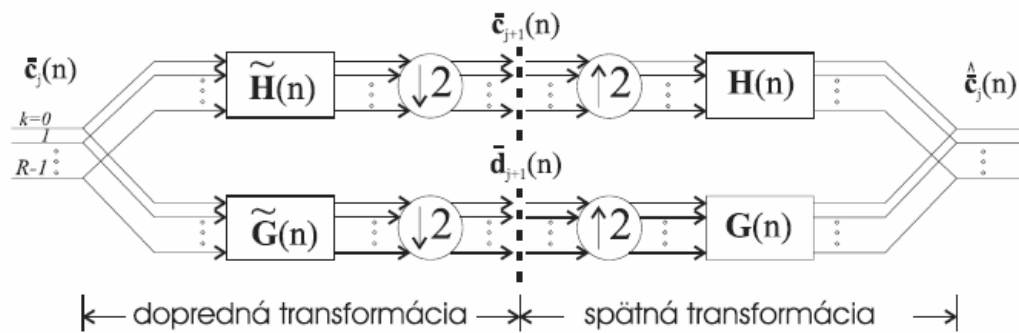
priestorov:

$$\{0\} \dots \subset \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{-1} \subset \mathcal{V}_{-2} \dots L^2(\mathcal{R}), \quad (4.21)$$

avšak bázy priestorov \mathcal{V}_m sú tvorené pomocou R funkcií mierky $\varphi_k(t)$:

$$\{\varphi_{k,m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi_k(2^{-m}t - n), n \in \mathcal{Z}\} \quad k = 0, \dots, R-1. \quad (4.22)$$

Vypocet Multiwaveletovej transformacie, princip, vlastosti.



Obr. 4.14. Princíp výpočtu multiwaveletovej transformácie vektorovou bankou filtrov
Ako vypočítame **diskrétnu multiwaveletovú transformáciu** (MDWT)? Pomocou tzv. vektorových bánk filtrov, pozri obr. 4.14. Prítom platí:

- signál spracúvame paralelne v dávkach o veľkosti R
- pri inicializácii nemôžeme jednoducho zobrať susedné vzorky signálu ako vstup pre jednu dávku (ako pri klasických waveletoch), lebo naše $\varphi_k(t)$ existujú v čase naraz, takže je potrebná predfiltrácia zodpovedajúca projekcii.

Ako príklad praktickej realizácie multiwaveletov si uvedme Geronimo-Hardin- Masopust (GHM) multiwavelety (pozri, obr. 4.15). Ich vlastnosti môžeme zhrnúť takto:

- množiny $\{\varphi_0(t-n), \dots, \varphi_{R-1}(t-n)\}, \{\psi_0(t-n), \dots, \psi_{R-1}(t-n)\}, n \in \mathcal{Z}$ sú ortogonálne
- báзовé funkcie sú symetrické
- funkcie mierky sú schopné reprodukovať lineárne funkcie.

Pri multiwaveletových radoch a diskrétnej multiwaveletovej transformácii je možné symetrické a zároveň ortogonálne riešenie.

Multiwavelety - Čím sú tvorené koeficienty pre zmenu rozlíšenia a čo by bolo výsledkom kaskádového algoritmu – iterovaním medziskalovej relácie

$$C_{m+1}(k) = \sqrt{2} \sum_n \tilde{H}(n) C_m(2k+n) \quad D_{m+1}(k) = \sqrt{2} \sum_n \tilde{G}(n) C_m(2k+n), \quad (4.27)$$

kde

$$\tilde{H}(n) = H(-n) \quad \tilde{G}(n) = G(-n). \quad (4.28)$$

Pri rekonštrukcii platí:

$$C_m(n) = \sqrt{2} \sum_k [H(k) C_m(2k+n) + G(k) D_m(2k+n)]. \quad (4.29)$$

Iterácie:

avšak bázy priestorov V_m sú tvorené pomocou R funkcií mierky $\varphi_k(t)$:

$$\left\{ \varphi_{k,m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi_k(2^{-m}t - n), n \in \mathcal{Z} \right\} \quad k = 0, \dots, R-1. \quad (4.22)$$

Keďže $V_1 \subset V_0$, pre vektor funkcií mierky $\Phi(t) = [\varphi_0(t), \dots, \varphi_{R-1}(t)]^T$ platí:

Kaskádový algoritmus:

Keďže $V_1 \subset V_0$, pre vektor funkcií mierky $\Phi(t) = [\varphi_0(t), \dots, \varphi_{R-1}(t)]^T$ platí:

$$\Phi(t) = \sqrt{2} \sum_n H(n) \Phi(2t-n), \quad (4.23)$$

kde $H(n)$ je postupnosť štvorcových matic rozmeru $R \times R$. Z vlastností AVR vyplýva, že existuje vektor základných waveletov $\Psi(t) = [\psi_0(t), \dots, \psi_{R-1}(t)]^T$, pre ktorý platí:

$$\Psi(t) = \sqrt{2} \sum_n G(n) \Phi(2t-n), \quad (4.24)$$

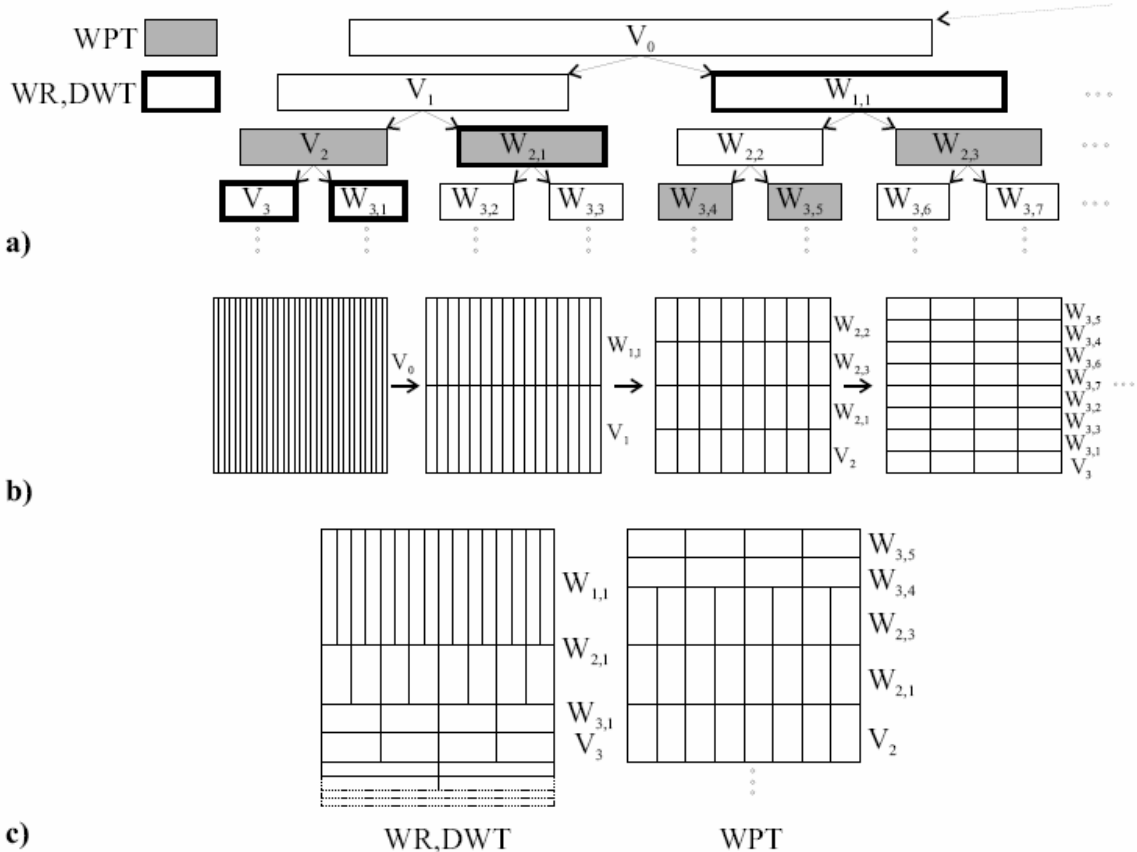
kde $G(n)$ je postupnosť štvorcových matic rozmeru $R \times R$.

Waveletové pakety, princíp, rozdiel od ortogonálnej DWT, možné výhody

- v klasickom prípade waveletov rozkladáme v MRA iba sumačné podpriestory V_m
- waveletové pakety rozklad zovšeobecňujú aj na diferenčné priestory W_m
- sú možným rozšírením všetkých doteraz uvedených typov waveletov
- umožňujú adaptívnu, podrobnejšiu a flexibilnejšiu analýzu signálov

Výpočet Waveletovej paketovej transformácie (WPT) – v MRA je dovolené deliť aj diferenčné podpriestory, nielen sumačné.

Vzniká kompletný waveletový paketový strom. Reprézencia kompletným stromom je *redundantná* - stačí použiť iba *vhodnú časť stromu*.



Optimalizácia paketovej DWT – sposoby princíp.

časovo-frekvenčnej roviny, pozri obr. 4.16b. WPT umožňuje adaptívne resp. optimalizované delenie časovo-frekvenčnej roviny a teda použitie iba istej, optimalizovanej časti kompletného waveletového paketového stromu na reprezentáciu signálu, pozri 4.16c. Výber najvhodnejšej stromovej štruktúry je ekvivalentný s hľadáním **najlepšej bázy** [35]. Najbežnejšie kritérium pre výber najlepšej reprezentácie signálu, formulované pomocou tzv. *nákladovej funkcie* λ , je minimalizácia entropie reprezentácie signálu (Wickerhauser, Coifman). Ak dĺžka signálu je N , potom pre α , počet možných WPT báz platí:

$$\alpha \geq 2^{N/2}. \quad (4.31)$$

Ako teda vyberať najlepšiu bázu, keď ich je tak veľa? Najjednoduchšie je rozhodovať sa priamo počas rozkladov. T. j. pomocou nákladovej funkcie λ sa rozhodujeme, či rozklad realizujeme alebo nie, podľa toho, či by náklady rozložením vzrástli alebo klesli. Kritériom musí byť taká nákladová funkcia, ktorej aditivita sa rozkladom pri DWT zachováva, napríklad Shannonova entropia E [34]. Označme $s(n)$ ako vstupný signál, potom:

$$E(s) = - \sum_n s(n)^2 \log [s(n)^2] \quad (4.32)$$

s konvenciou $0 \log(0) = 0$. Kritérium teda je:

Ak suma Shannonových entropií 2 subpásiev, ktoré vznikli rozdelením pôvodného subpásma, je menšia ako entropia pôvodného subpásma, je výhodné rozdelenie uskutočniť.

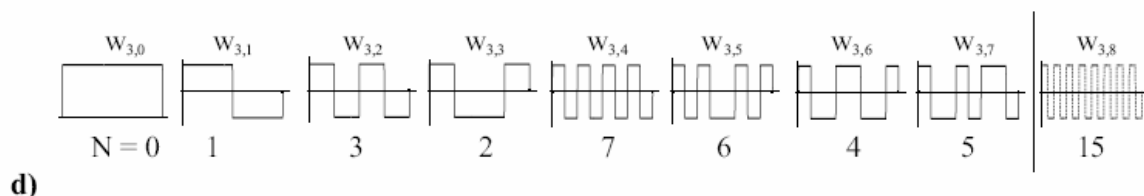
Co platí pre bazové funkcie paketovej DWT s úplným rozkladom stromu?

Aká je situácia s bázovými funkciami pri WPT? Tým že rozkladáme aj diferenčné priestory, vznikajú bázové funkcie poskladané viacerými spôsobmi z waveletov a funkcií mierok, ktoré sa nazývajú **waveletové pakety**. Označme ich $w(t)$. Bázy priestorov $\mathcal{W}_{m,k}$ sú potom tvorené posunmi $w_{m,n}(t)$. Ďalej stotožníme priestor \mathcal{V}_m s priestorom $\mathcal{W}_{m,0}$. Uvedomme si, že platí:

$$w_{m,0}(t-n) = \varphi_m(t-n) \quad w_{m,1}(t-n) = \psi_m(t-n). \quad (4.33)$$

Waveletové pakety sa môžu od waveletov a funkcií mierky podstatne líšiť. Situácia je najvypuklejšia pri *úplnom rozklade*, pozri obr. 4.16d. Vidíme, že všetky bázové funkcie majú nosič na celom intervale, čo je ekvivalentné úplnej strate rozlíšenia v čase v TF rovine (analogicky ako je to pri DFT). Ak si vyjadríme počet prechodov nulou pre Haarove $w_{m,k}$ v závislosti od k , dostaneme postupnosť 0, 1, 3, 2, 7, 6, 4, 5. Z počtu prechodov nulou môžeme usúdiť na polohu frekvenčného pásma, ktoré približne zodpovedá posunom $w_{m,k}$. Vidíme, že pri úplnom rozklade vo WPT nie sú frekvenčné pásma zoradené vzostupne, t. j. v prirodzenom poradí. Ich poradie sa nazýva Palleyho a späť do prirodzeného poradia ich môžeme preusporiadať pomocou Grayovho kódu a reverziou bitov. V prípade Haarovej WPT s úplným rozkladom dostávame transformáciu ekvivalentnú s Walshovou transformáciou v Palleyho poradí [6].

Na obr. 4.16d je znázornený aj paket $w_{3,8}$. Vidíme, že jeho znázornenie v TF rovine by bolo mimo oblasti zobrazenej na obr. 4.16a a na obr. 4.16b. Je dôležité si uvedomiť, že rastom indexu k , sa hýbeme horizontálnym rezom v celom binárnom strome priestorov $\mathcal{W}_{m,k}$. Pri aktuálnej polohe v reze teda môžeme mať predchodcov, ktorým zodpovedá v TF rovine úplne iná poloha.



Obr. 4.16. Princíp delenia podpriestorov v AVR pri dyadickej waveletovej paketovej transformácii: **a)** Umiestnenie podpriestorov v binárnom strome podpriestorov pri WR resp. DWT a príkladu WPT **b)** Spôsob delenia TF roviny zodpovedajúce zobrazenej časti binárneho stromu **c)** Reprezentácia priestorov v TF rovine pre WR a príklad WPT z časti (a) **d)** príklad Haarových waveletových paketov a rast počtu N ich prechodov nulou

Lifting schéma

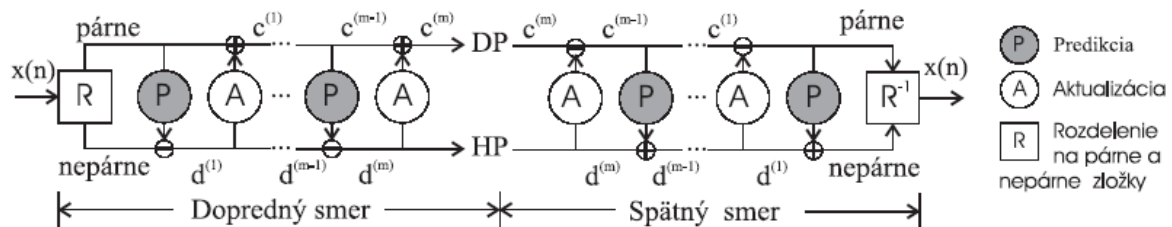
Vlastnosti + princíp + základná schéma

- Lifting schéma umožňuje jednoducho zlepšiť špecifické vlastnosti danej WT – odiaľ názov „*lifting*“
- Jednoducho opisuje závislosti medzi párnymi filtrov, ktoré zdieľajú ten istý HP, resp. DP filter. Takto môžeme začať z triviálneho prípadu "lenivého" waveletu a postupne vybudovať pár filtrov s požadovanými vlastnosťami, t.j. postupujeme podľa tzv. *Lifting schémy*
- Umožňuje efektívne realizovať klasické WT s nasledovnými výhodami:
 - urýchlenie implementácie WT (napr. v 1D prípade až dvojnásobne)
 - možnosť vykonať výpočty bez použitia prídavnej pamäte (t.j. "in-place")
 - jednoduchý dizajn vlastných WT (naviac so zaručenou invertovateľnosťou)
- Umožňuje jednoducho rozširovať klasickú WT, zaujímavé su napr.
 - konštrukcia nelineárnych WT (napr. adaptívnych, celočíselných)
 - použitie WT pre nerovnomerne navzorkované signály
 - konštrukcia WT na intervaloch, krivkách, povrchoch

Konštrukcia lifting schémy je založená na koncepte polyfázového rozkladu bánk filtrov:

- každú FB, môžeme rozložiť (faktorizovať jej filtre) na jednoducho invertovateľnú postupnosť krokov
- Tieto kroky tvoria v algoritme priečkovú štruktúru, ktorú môžeme interpretovať ako postupnosť *predikcií* a *aktualizácií* dvoch množín v obraze až po ich vzájomnú dekorreláciu

Principiálne môžeme waveletovú transformáciu implementovanú lifting schémou prekresliť podľa nasledovného obrázku. Sú vyznačené základné bloky lifting schémy: *rozdelenie*, *predikcia* a *aktualizácia*:



- cieľom predikcie je získanie čo najmenších hodnôt v HP časti po doprednej transformácii.
- aktualizáciou sa snažíme zachovať v DP časti čo najviac vlastností pôvodného obrazu, čo sa stáva dôležitým najmä pri rekurzii v DP časti (aby bola predikcia aj naďalej účinná)

prediktory v lifting schéme, vlastnosti, princíp, možnosti

- Vlastnosti výslednej transformácie sú určené vlastnosťami a spôsobom aplikácie prediktorov
- Teoreticky môžeme použiť ľubovoľné prediktory. Priečková štruktúra nám zaručuje biortogonalitu a tým aj úplnú rekonštrukciu. Môžeme použiť nelineárne prediktory, napr. adaptívne alebo celočíselné. Celočíselné prediktory dostaneme napr. jednoduchým zaokrúhlením hodnoty (nelineárna operácia).

Koncept prediktorov predstavuje silný vzťah medzi *transformačným* a *prediktívnym* kódovaním, kde sa snažíme predpovedať (aproximovať) signál a kódovať iba prípadnú diferenciu od originálneho signálu

Lifting schéma takto principiálne umožňuje dvojaký prístup k dekorelácii dát:

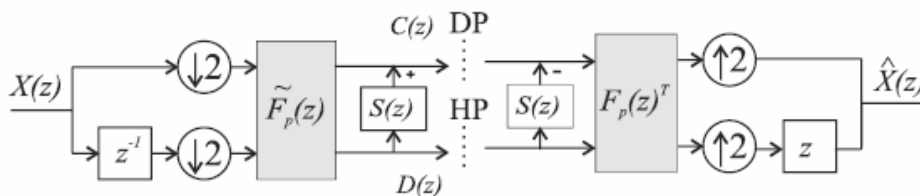
- a) použiť transformačný princíp (t.j. WT) a celý postup faktorizovať na kroky liftingu
- b) využiť priamo predikčný princíp a snažiť sa data dekorelovať priamo dizajnom sústavy prediktorov použitých v lifting schéme

Krok liftingu a dualneho liftingu + vzorec a zmysel, znázorniť na schéme banky filtrov

Nech $\tilde{H}(z)$ a $\tilde{G}(z)$ v FB sú komplementárne, t.j. $\det(\tilde{\mathbf{F}}_p(z)) = z^{-1}$. Potom platí:

- každý nový FIR filter $\tilde{H}^{new}(z)$ resp. $G^{new}(z)$ komplementárny k $\tilde{G}(z)$ resp. $H(z)$ môžeme vyjadriť tzv. *liftingom* z pôvodného filtra ($\det(\tilde{\mathbf{F}}_p(z)) = z^{-1}$ sa zachová, lebo $|AB| = |A||B|$) ako

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{new}(z) &= \tilde{H}(z) + S(z^2)\tilde{G}(z) & G^{new}(z) &= G(z) - S(z^{-2})H(z) \\ \tilde{\mathbf{F}}_p^{new}(z) &= \begin{pmatrix} 1 & S(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_p & \mathbf{F}_p^{new}(z) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -S(z^{-1}) & 1 \end{pmatrix} \mathbf{F}_p \end{aligned}$$



- 1) Uvedomme si, že $[S(z^2)\tilde{G}(z)]_o = \tilde{G}_o(z)S(z)$, $[S(z^2)\tilde{G}(z)]_e = \tilde{G}_e(z)S(z)$
- 2) $\mathbf{P}(z) = \mathbf{F}_p^T(z)\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \mathbf{F}_p^T \begin{pmatrix} 1 & -S(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & S(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -S(z^{-1}) & 1 \end{pmatrix} \mathbf{F}_p^T \begin{pmatrix} 1 & S(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_p$
- 3) Uvedomme si, že liftingom zmodifikujeme $\tilde{H}(z)$ avšak pri rekonštrukcii to odpovedá modifikácii $G(z)$
- 4) Uvedomme si, že analýzu a syntézu môžeme zameniť keďže sú vzájomne inverzné.

- každý nový FIR filter $\tilde{G}^{new}(z)$ resp. $H^{new}(z)$ komplementárny k $\tilde{H}(z)$ resp. $G(z)$ môžeme vyjadriť tzv. **duálnym liftingom** z pôvodného filtra ako

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{new}(z) &= \tilde{G}(z) + T(z^2)\tilde{H}(z) & H^{new}(z) &= H(z) - T(z^{-2})G(z) \\ \tilde{\mathbf{F}}_p^{new}(z) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T(z) & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_p & \mathbf{F}_p^{new}(z) &= \begin{pmatrix} 1 & -T(z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{F}_p \end{aligned}$$

, kde

$$S(z) = \sum_n s(n)z^{-n} \quad T(z) = \sum_n t(n)z^{-n}$$

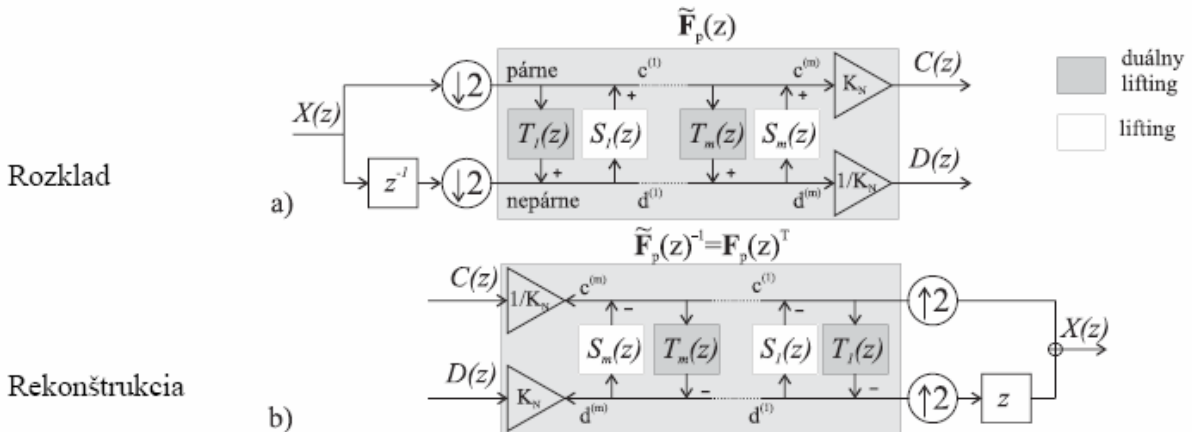
sú prenosovými funkciami FIR filtrov a môžu byť interpretované ako *prediktory*.

Vidíme, že determinanty $\tilde{\mathbf{F}}_p$ a \mathbf{F}_p po liftingu resp. duálnom liftingu zostávajú konštantné.

Striedaním krokov liftingu a duálneho liftingu začínajúc s "lenivým" waveletom, pre ktorý platí $\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \mathbf{I}$, t.j.

$$\begin{pmatrix} C(z) \\ D(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_e(z) \\ z^{-1}X_o(z) \end{pmatrix}$$

môžeme postupne konštruovať wavelet s lepšími a lepšími vlastnosťami:



Každá polyfázová matica reprezentujúca FB s FIR filtermi a úplnou rekonštrukciou môže byť zapísaná v tvare:

Analýza

$$\mathbf{F}_p(z) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix} \prod_{i=m}^1 \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & S_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\text{lifting}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_i(z) & 1 \end{pmatrix}}^{\text{duálny lifting}} \right\}$$

Rekonštrukcia

$$\mathbf{F}_p^{-1}(z) = \prod_{i=1}^m \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T_i(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -S_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

Čím je zaručená úplná rekonštrukcia pri liftingu?

Teoreticky môžeme použiť ľubovoľné prediktory. Priečková štruktúra nám zaručuje biortogonalitu a tým aj úplnú rekonštrukciu. Môžeme použiť nelineárne prediktory, napr. adaptívne alebo celočíselné.

Čo sú Interpoláčn  filtre, ak  majú vlastnosti, príklad interpoláčn ho filtra

DP Filter $\tilde{H}(z)$ nazývame *interpoláčn *, ak je schopn  interpolovať koeficienty prestriedané nulami (najradšej ako polynómy R-tého rádu).

Ak je filter *polp smov * tak je aj interpoláčn :

Prečo?

Lebo interpoluje párne koeficienty z nep rných, resp. naopak (polp smov  filter m  v impulzovej charakteristike okrem počiatku párne koeficienty nulové)

Ako vypo t me koeficienty interpoláčn ch filtrov? -> T.z.v Nevillov m algoritmom.

Príklady Interpoláčn ch filtrov: Haarov wavelet – konštantn  interpolácia $h(n)=\{1,1\}$, CDF 2,2 – lineárna intarpol cia, $h(n)=\{1/2, 1, 1/2\}$, 4-bodov  schéma $h(n)=\{-1/16, 0, 9/16, 1, 9/16, 0, -1/16\}, \dots$

Ak  je ich polyf zov  reprezentácia? Keďže pre polp smov  filtre $\tilde{H}_e(z) = 1$, faktorizácia liftingu sa dá urobiť v dvoch krokoch:

$$\tilde{F}_p(z) = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{H}_o \\ \tilde{G}_e & \tilde{G}_o \end{pmatrix} \xrightarrow{\det=1} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{H}_o \\ \tilde{G}_e & 1 + \tilde{G}_e \tilde{H}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{G}_e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{H}_o \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Odstraňovanie šumu pomocou waveletov – princíp.

Stanový sa Treshold.

Delí sa na Soft a Hard.

Hard – tie koeficienty, ktoré sú pod Treshold, tie vynulujem, tie si už nemusím pamätať =
KOMPRESIA

Soft – nad Treshold vynásobím 1.

pod Treshold vynásobím postupne *0.9 *0.8 *0.7...

- Lepšie výsledky, nevznikajú také výrazné prechodové javy

a mam k tomu ze "matlab"



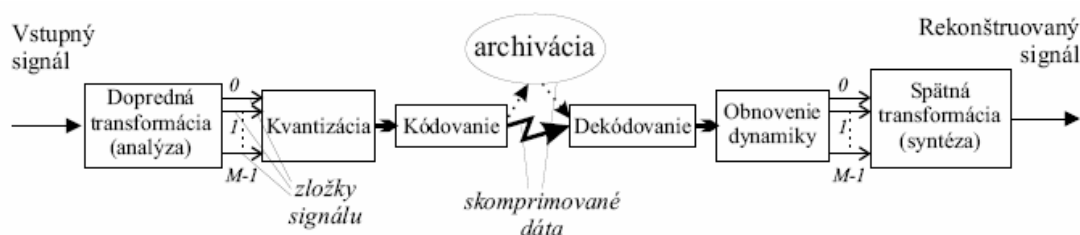
Kompresia obrazu pomocou waveletov

SPIHT [49] a JPEG 2000 [50]. Hierarchie s nevýznačnými koeficientmi sa nazývajú **stromy núl** [48]. Algoritmy využívajúce hierarchické závislosti sa snažia stromy núl vyhľadávať a následne ich obchádzať pri kódovaní (zakódovať iba ich polohu).

Algoritmus SPIHT (Set Partitioning In Hierarchical Trees) z r. 1996 [49] je progresívny kóder umožňujúci stratovú aj bezstratovú kompresiu. Pri stratovej používa biortogonálnu DWT s FBI 9/7 filtrami a pri bezstratovej celočíselnú S+P DWT (pozri časť 5.2.5). SPIHT je založený na troch konceptoch:

1. čiastočné zoradenie koeficientov podľa magnitúdy s prenosom pozičnej informácie pomocou algoritmu na triedenie do množín (algoritmus je duplikovaný v dekóderi)
2. postupný prenos zoradených bitových rovín
3. využitie hierarchickej štruktúry spektra DWT

DLHÁ VERZIA:



Obr. 4.7. Všeobecná schéma transformačného kompresného/dekompresného postupu

Dvojmerná waveletová transformácia sa dá efektívne využiť pri kompresii obrazu. V tejto oblasti je momentálne najúspešnejšia a je štandardizovaná v kompresnom postupe JPEG 2000. Všeobecná schéma kompresného postupu využívajúceho transformáciu je znázornená na obr. 4.8. Najprv je vykonaná transformácia vstupného signálu (obrazu), aby sme ho mohli reprezentovať množinou jeho spektrálnych koeficientov, ktoré potom môžeme efektívne kvantovať (t. j. mapovať do menšej množiny diskretných symbolov, čo má za následok stratu informácie). Úlohou transformácie je predovšetkým dekorelovať obraz (oddeliť významnú zložku od nevýznamnej) a uľahčiť zohľadnenie percepčných kritérií pri následnej kvantizácii. Signál treba transformovať

tak, aby kvantizátor mohol odstrániť pokiaľ možno iba nepodstatnú resp. nadbytočnú informáciu. Posledným stupňom transformačného kódera je kóder symbolov, ktorý vykonáva reverzibilné mapovanie zdrojových symbolov do výstupného prúdu symbolov resp. bitov, pri súčasnom minimalizovaní bitovej náročnosti. Tento stupeň sa snaží odstrániť zbytkové korelácie prítomné medzi zdrojovými symbolmi. 2D DWT transformáciu zvyčajne interpretujeme ako rozklad na subpásma. Najdôležitejšie požiadavky na filtre resp. banku filtrov, ktorá implementuje danú transformáciu, môžeme potom zhrnúť [8]:

1. *Maximalizácia kompaktie energie* — keď transformácia rozkladá signál na M subpásiami, ktoré majú disperzie σ_j^2 , môžeme definovať **zisk transformačného kódovania** ako [17]:

$$G_{TC} = \frac{\frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \sigma_j^2}{(\prod_{j=0}^{M-1} \sigma_j^2)^{1/M}}. \quad (4.11)$$

G_{TC} udáva pomer rekonštrukčných chýb pri PCM kódovacej schéme a aktuálnom transformačnom kódovaní (TC) pri rovnakom objeme výstupných dát. Vyšší zisk kódovania podmieňuje spravidla vyššia K -regularita filtrov.

2. *Minimalizácia energie aliasingu* — v BF sú za normálnych okolností zaručené podmienky na elimináciu aliasingu. Ak sa však pri syntéze nepoužijú všetky subpásma, alebo v subpásmach je rôzny kvantizačný šum, bude rekonštruovaný signál naďalej obsahovať nežiaduce komponenty.
3. *Dĺžka filtrov a „efekt zvonenia“* - dobré oddelenie subpásiami alebo vysoká regularita vyžaduje dlhé filtre. Ich nevýhodou je, že šíria kódovacie chyby, čo na hranách v obraze spôsobuje tzv. „**efekt zvonenia**“ (dôsledok striedania znamienok v impulzových charakteristikách filtrov). Hrany v obrázku reprezentujeme jednotkovým skokom [21]. Potom je cieľom minimalizovať rozdiel medzi jednotkovým skokom a odpoveďou filtra na jednotkový skok.

Pri kódovaní obrazu treba relatívne krátke a „hladké“ filtre s určitou regularitou [8]. Ak v biortogonálnych systémoch nie je možné dosiahnuť regularitu pri analýze aj syntéze, je lepšie použiť regulárnu syntézu, čím zabránime tzv. „šachovnicovému“ efektu.

V čom spočíva výnimočnosť waveletovej transformácie? Oproti transformáciám Fourierovského typu má štrukturovanú bázu. Následkom toho umožňuje reprezentáciu signálu na rôznych úrovniach rozlíšenia a postupný prenos tejto informácie až po želanú kvalitu reprezentácie. Navyše existujú v 2D waveletovom spektre hierarchie koeficientov, ktoré zodpovedajú približne rovnakej priestorovej oblasti v obraze,

SPIHT [49] a JPEG 2000 [50]. Hierarchie s nevýznačnými koeficientmi sa nazývajú **stromy núl** [48]. Algoritmy využívajúce hierarchické závislosti sa snažia stromy núl vyhľadávať a následne ich obchádzať pri kódovaní (zakódovať iba ich polohu).

Algoritmus SPIHT (Set Partitioning In Hierarchical Trees) z r. 1996 [49] je progresívny kóder umožňujúci stratovú aj bezstratovú kompresiu. Pri stratovej používa biortogonálnu DWT s FBI 9/7 filtrami a pri bezstratovej celočíselnú S+P DWT (pozri časť 5.2.5). SPIHT je založený na troch konceptoch:

1. čiastočné zoradenie koeficientov podľa magnitúdy s prenosom pozičnej informácie pomocou algoritmu na triedenie do množín (algoritmus je duplikovaný v dekóderi)
2. postupný prenos zoradených bitových rovín
3. využitie hierarchickej štruktúry spektra DWT

Vysvetlenie k značeniam:

Hotové – ale to neznamená, že to popripade netreba doplniť

Chýba

Podľa mňa treba určite doplniť

NEPOTREBNÉ:

Dilatačne rovnice – ich vzorce + vysvetlite princíp (prečo je to tak?)

Relácie zmeny rozlíšenia resp. dilatačné rovnice:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

Postupnosti h_{mr} a g_{mr} charakterizujú vzťahy medzi bázami na susedných úrovniach rozlíšenia zzacnime uz zajtra vecer a to co mas tam ajjjja jfuja nazývajú sa *koeficienty pre zmenu rozlíšenia* resp. *dilatačné koeficienty*.