
Príklad

3.3 Určte prenosové funkcie modelov na obr.3.13 a dokážte, že majú rovnaké póly.

Prenosovú funkciu $H_1(z)$ modelu na obr.3.13a môžeme vyjadriť z diferenčnej rovnice tejto sústavy

$$y(n) = x(n) + 2r \cdot \cos \theta \cdot y(n-1) - r^2 \cdot y(n-2) \quad (3.36)$$

Transformáciou Z rov. (3.36) dostaneme

$$Y(z) = X(z) + 2r \cdot \cos \theta \cdot Y(z)z^{-1} - r^2 \cdot Y(z) \cdot z^{-2} \quad (3.37)$$

Z rov.(3.37) vyjadrieme $H_1(z)$

$$H_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 2r \cdot \cos \theta \cdot z^{-1} + r^2 \cdot z^{-2}} \quad (3.38)$$

Pre model 3.13b diferenčná rovnica má tvar

$$y(n) = r \cdot \cos \theta \cdot y(n-1) + r \cdot \sin \theta \cdot s(n) \quad (3.39)$$

pričom $s(n)$ je stavová premenná

$$s(n) = x(n-1) - r \cdot \sin \theta \cdot y(n-2) + r \cdot \cos \theta \cdot s(n-1) \quad (3.40)$$

Z rov.(3.39) vyjadrieme stavovú premennú

$$s(n) = \frac{(y(n) - r \cdot \cos \theta \cdot y(n-1))}{r \cdot \sin \theta} \quad (3.41)$$

z ktorej môžeme napísať, že platí

$$s(n-1) = \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \cdot (y(n-1) - r \cdot \cos \theta \cdot y(n-2)) \quad (3.42)$$

Dosadením (3.41) a (3.42) do rov.(3.40) dostaneme diferenčnú rovnicu bez stavových premenných

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \cdot \sin \theta} (y(n) - r \cos \theta \cdot y(n-1)) &= x(n-1) - r \sin \theta \cdot y(n-2) + \\ &+ \frac{1}{\sin \theta} \cos \theta (y(n-1) - r \cos \theta y(n-2)) \end{aligned} \quad (3.43)$$

a zjednodušením dostaneme výslednú diferenčnú rovnicu, z ktorej po transformácii Z dostaneme prenosovú funkciu modelu na obr.3.13b

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{r \cdot \sin \theta \cdot z^{-1}}{1 - 2r \cdot \cos \theta \cdot z^{-1} + r^2 \cdot z^{-2}} \quad (3.44)$$

Porovnaním menovateľov rov.(3.44) a rov.(3.38) vidíme, že majú obe sústavy totožné póly.

Príklad

3.4 Pre mnohé aplikácie je užitočné mať generátor harmonických signálov. Jedno z možných riešení návrhu takéhoto generátora je diskretný systém, ktorého impulzová charakteristika je

$$h(n) = e^{j\Omega n}$$

Reálna časť impulzovej charakteristiky je potom $\cos(n\Omega)$ a imaginárna $\sin(n\Omega)$.

a) Napíšte komplexnú diferenčnú rovnicu, ktorá generuje požadovanú impulzovú odpoveď.
b) Z rovníc pre reálnu a imaginárnu časť nakreslite model tohoto systému. Model má obsahovať iba reálne násobičky.

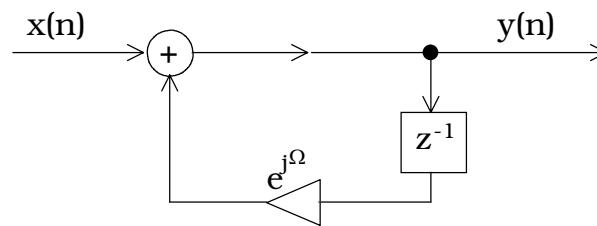
Impulzová charakteristika má mať nasledujúce členy

$$\mathbf{h}(n) = \{1, e^{j\Omega}, e^{2j\Omega}, e^{3j\Omega}, \dots\} \quad (3.45)$$

Takúto impulzovú charakteristiku bude mať zrejme diferenčná rovnica

$$y(n) = x(n) + e^{j\Omega} \cdot y(n-1) \quad (3.46)$$

Na obr.3.14 je nakreslený model tejto diferenčnej rovnice, samozrejme násobička je komplexná.



Obr.3.14 Model s komplexnou násobičkou

Vyjadríme si teraz prenosovú funkciu

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - e^{j\Omega} \cdot z^{-1}} \quad (3.47)$$

Oddelíme reálnu a imaginárnu zložku $H(z)$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1} \cos \Omega - j \cdot z^{-1} \sin \Omega} \cdot \frac{1 - z^{-1} \cos \Omega + j \cdot z^{-1} \sin \Omega}{1 - z^{-1} \cos \Omega + j \cdot z^{-1} \sin \Omega} = \\ &= \frac{1 - z^{-1} \cos \Omega}{1 - 2z^{-1} \cos \Omega + z^{-2}} + j \cdot \frac{z^{-1} \sin \Omega}{1 - 2z^{-1} \cos \Omega + z^{-2}} \end{aligned} \quad (3.48)$$

a z toho prenosová funkcia generátora kosínusového signálu je

$$H_{\cos}(z) = \frac{1 - \cos \Omega \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cos \Omega \cdot z^{-1} + z^{-2}} \quad (3.49)$$

a generátora sínusového signálu

$$H_{\sin}(z) = \frac{\sin \Omega \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cos \Omega \cdot z^{-1} + z^{-2}} \quad (3.50)$$

Inverznou transformáciou Z dostaneme odpovedajúce diferenčné rovnice:

-pre generátor cosínusového signálu

$$y(n) = x(n) - \cos \Omega \cdot x(n-1) + 2 \cos \Omega \cdot y(n-1) - y(n-2) \quad (3.51)$$

a model tohoto systému je na obr.3.15a

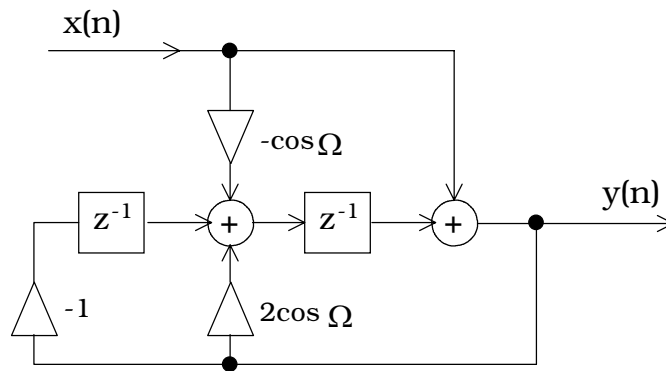
-pre generátor sínusového signálu

$$y(n) = \sin \Omega \cdot x(n-1) + 2 \cos \Omega \cdot y(n-1) - y(n-2) \quad (3.52)$$

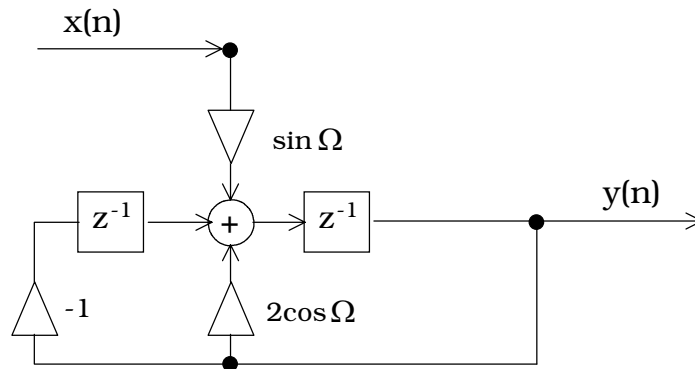
a model je zobrazený na obr.3.15b.

Diferenčná rovnica pre generátor cosínusového aj sínusového signálu bude pre $n \geq 2$ rovnaká a má tvar:

$$y(n) = 2 \cos \Omega y(n-1) - y(n-2) \quad (3.53)$$



a/



b/

Obr. 3.15. Model generátorov