Príklady

2.2. Určte transformáciu Z jednotkového skoku a oblasť jeho konvergencie.

Jednotkový skok je definovaný

$$u(n) = \begin{cases} 1 & pre \quad n \geq 0 \\ 0 & pre \quad n < 0 \end{cases}$$

čo je postupnosť z príkladu 2.1, za prepokladu, že $a = 1$. Transformáciu Z tejto postupnosti dostaneme:

$$U(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-N} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

Ak do vzťahu (2.13) dosadíme za $a = 1$ a $|z^{-1}| < 1$, platí:

$$U(z) = \lim_{N \to \infty} U_N(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \tag{2.31}$$

Funkcia konverguje pre $|z| > 1$ a diverguje pre $|z| < 1$.

Nech rov.(2.31) predstavuje prenosovú funkciu sústavy, ktorej impulzová charakteristika je diskrétny jednotkový skok. Takúto sústavu nazývame generujúcou sústavou diskrétneho jednotkového skoku a môžeme napísať:

$$U(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \tag{2.32}$$

Príslušnú diferenčnú rovnicu vyjadrime po úprave rov.(2.32) do tvaru:

$$Y(z) \cdot (1 - z^{-1}) = X(z) \tag{2.33}$$

a po aplikácii spätnej transformácie Z

$$y(n) = x(n) + y(n-1) \tag{2.34}$$

Odpoveď sústavy $y(n)$ opísanej touto diferenčnou rovnicou sa v každom takte rovná aktuálnemu súčtu hodnôt vzoriek ľubovoľného vstupného signálu $x(n)$, napr.:

$$y(3) = x(3) + y(2) = x(3) + x(2) + y(1) = x(3) + x(2) + x(1) + x(0)$$

Takúto sústavu nazývame sumátorom v časovej oblasti, resp. akumulátorom.

2.3. Určte transformáciu Z Kroneckerovho impulzu a posunutého Kroneckerovho impulzu o k taktov

Diskrétny jednotkový (Kroneckerov) impulz je definovaný

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & pre \quad n = 0 \end{cases}$$

$$0 \qquad pre \quad n \neq 0$$

Transformáciou Z dostaneme

$$Z\{\delta(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) z^{-n} = 1$$

Posunutý Kroneckerov impulz je definovaný

$$\delta(n-k) = \langle \begin{matrix} 1 & pre \quad n = k \\ 0 & pre \quad n \neq k \end{matrix}$$

Transformáciou Z dostaneme

$$Z\{\delta(n-k)\} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n-k) z^{-n} = z^{-k}$$

2.4 Prenosová funkcia diskrétneho systému má tvar:

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

kde a je reálna konštanta. Určte pre aké a je tento systém stabilný.

Prenosová funkcia má jeden pól, ktorý leží v bode

$$z = a$$

zároveň je zrejmé, že funkcia má jeden nulový bod, ktorý leží v začiatku.
Spätnou transformáciou Z zistíme, že systém opísaný touto prenosovou funkciou generuje postupnosť (má impulzovú charakteristiku)

$$a^n \qquad pre\, n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots \tag{2.35}$$

Ak využijeme poznatky z príkladu 2.1, vidíme, že oblasť konvergencie tejto postupnosti je

$$|z| \rangle\ a$$

Hodnota a predstavuje reálny pól v komplexnej z rovine. Vzhľadom na jeho polohu máme nasledujúce možnosti:

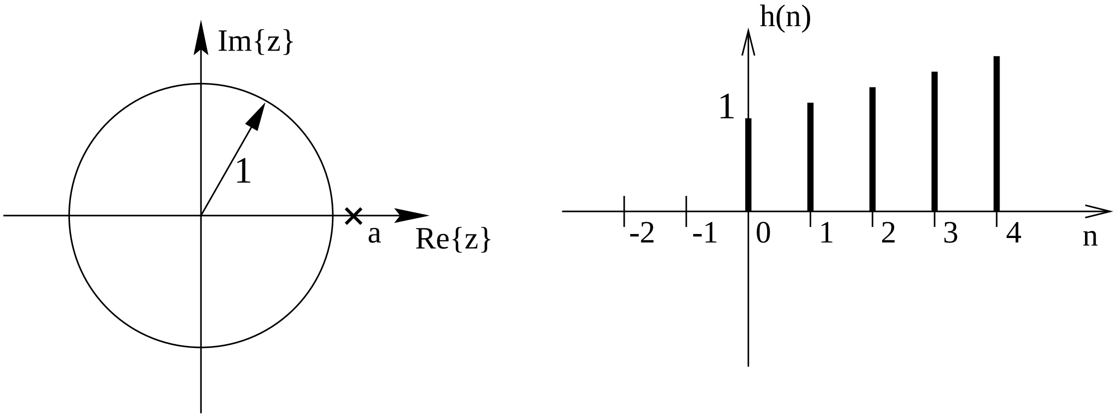
a) Ak $a \rangle\ 1$ (pól leží mimo jednotkovej kružnice), systém je nestabilný. Poloha pólu prenosovej funkcie v z rovine a priebeh impulzovovej charakteristiky je na obr.2.4 a,b.

b)Ak $a \langle -1$ systém je nestabilný. Poloha pólu prenosovej funkcie v z rovine a odpovedajúca impulzová charakteristika je na obr.2.5 a, b.

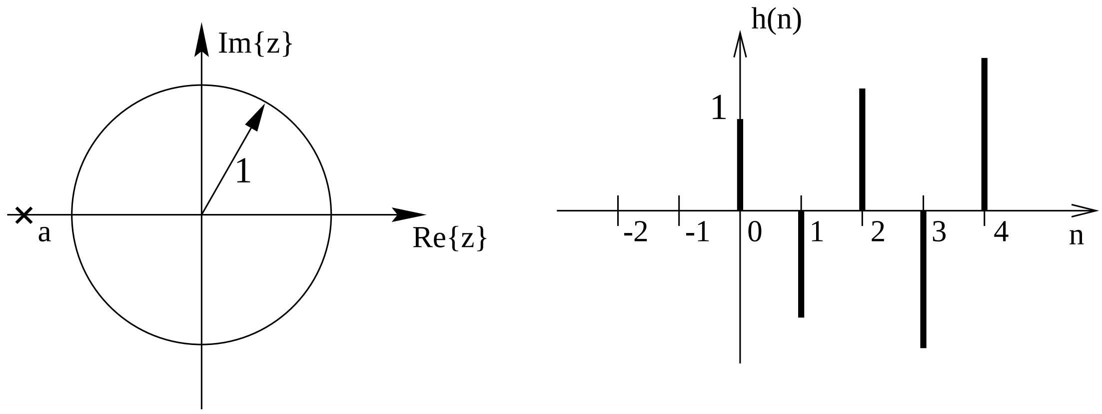
c) Ak $a = 1$, resp. $a = -1$, systém pracuje na hranici stability. Poloha pólov prenosovej funkcie v z rovine a odpovedajúce impulzové charakteristiky sú na obr.2.6 a, b a 2.7 a, b.

d) Ak $0 \langle a \langle\ 1$, resp. $-1 \langle\ a \langle\ 0$, systém je stabilný. Poloha pólov prenosovej funkcie v z rovine a odpovedajúce impulzové charakteristiky sú na obr.2.8 a, b a 2.9 a, b.

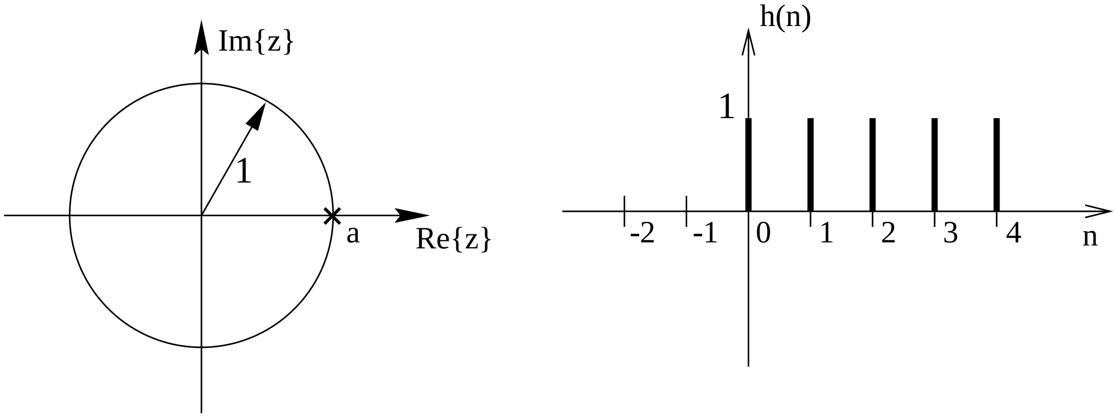
Záverom môžeme napísať, že lineárny diskrétny časovo-invariantný systém je stabilný vtedy a len vtedy, ak póly prenosovej funkcie ležia vo vnútri jednotkovej kružnice. To sa následne prejaví tým, že impulzová charakteristika, ktorá je neobmedzená v čase, má klesajúcu tendenciu a je teda obmedzená v hodnote.



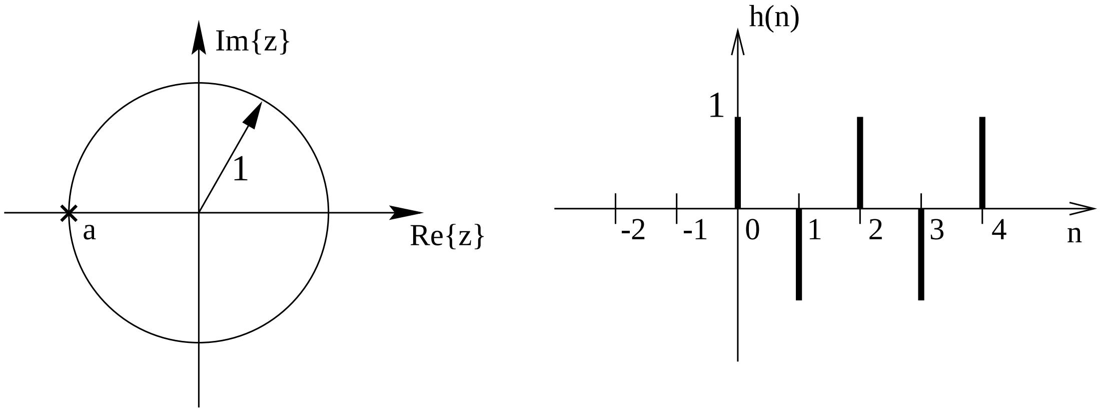
Obr.2.4.a, b *Poloha pólu v z rovine a impulzová charakteristika systému s prenosovou funkciou* $H(z)=\dfrac{1}{1-a.z^{-1}}$ *pre* $a\rangle 1$



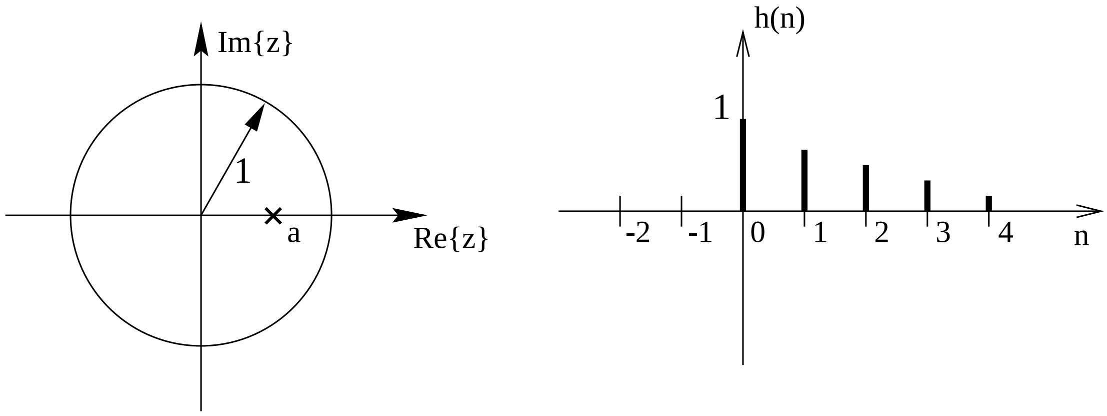
Obr.2.5. a,b *Poloha pólu v z rovine* a *impulzová charakteristika systému s prenosovou funkciou* $H(z)=\dfrac{1}{1-a.z^{-1}}$ *pre* $a\langle -1$



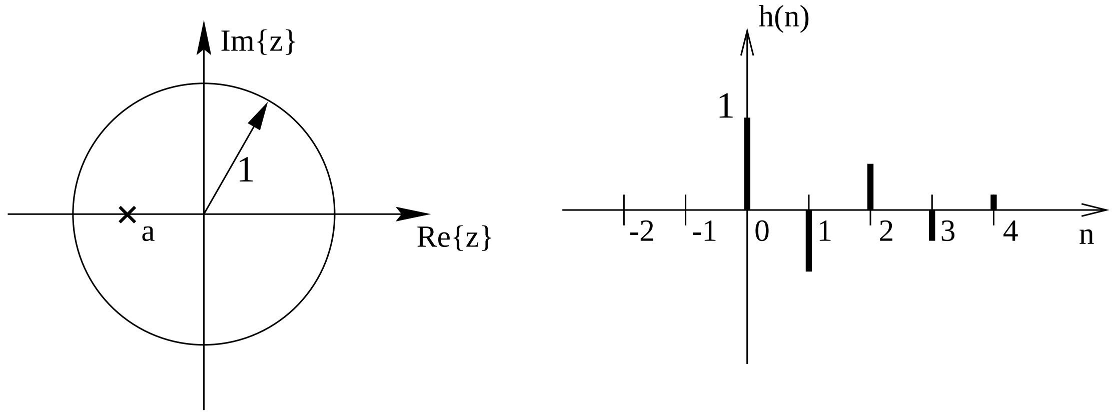
Obr.2.6. a,b *Poloha pólu v* z *rovine a impulzová charakteristika systému s prenosovou funkciou* $H(z) = \frac{1}{1 - a.z^{-1}}$ *pre* $a = 1$



Obr.2.7 a,b Poloha pólu *v* z *rovine a impulzová charakterisktika systému s prenosovou funkciou* $H(z) = \frac{1}{1 - a.z^{-1}}$ *pre* $a = -1$



Obr.2.8. a, b *Poloha pólu v* z *rovine a impulzová charakteristika systému s prenosovou funkciou* $H(z) = \frac{1}{1 - a.z^{-1}}$ *pre* $0\langle a \langle 1$



Obr.2.9. a, b *Poloha pólu v* z *rovine a impulzová charakteristika systému s prenosovou funkciou* $H(z) = \dfrac{1}{1 - a.z^{-1}}$ *pre* $-1 \langle a \langle 0$