7.2 Stabilizácia pomocou planárneho algoritmu

Pomocou planárneho inverzného algoritmu najmenších štvorcov je možné aproximovať vlastnosti magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky nestabilnej sústavy aj keď póly prenosovej funkcie ležia na jednotkovej kružnici roviny z alebo ležia v jej blízkosti.

Podstata metódy spočíva v nájdení takého polynómu $A(z)$, ktorý aproximuje inverzný polynóm k polynómu $B(z)$. Dvojnásobným invertovaním polynómu menovateľa prenosovej funkcie IIR systému dostaneme stabilný polynóm, ktorý aproximuje menovateľ prenosovej funkcie IIR sústavy.

Uvažujme polynóm menovateľa prenosovej funkcie IIR sústavy

$$B(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot z^{-k} \tag{7.11}$$

Nájdime polynóm $A(z)$ stupňa m

$$A(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot z^{-k} \tag{7.12}$$

ktorý aproximuje polynóm $\hat{A}(z)$, pre ktorý platí

$$B(z) \cdot \hat{A}(z) = 1 \tag{7.13}$$

Súčinom polynómov $A(z)$ a $B(z)$ dostaneme polynóm $C(z)$ rádu $m+n$

$$C(z) = B(z) \cdot A(z) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k \cdot z^{-k} \tag{7.14}$$

Aby polynóm $A(z)$ spĺňal podmienku optimálne inverzného polynómu k $B(z)$, musíme jeho koeficient navrhnúť tak, aby sme minimalizovali vzťah

$$J = (1 - c_0)^2 + \sum_{k=1}^{m+n} c_k^2 \tag{7.15}$$

ktorý možno jednoducho upraviť na tvar

$$J = 1 - 2 \cdot c_0 + \sum_{k=0}^{m+n} c_k^2 \tag{7.16}$$

Ak koeficienty a_k pre $k = 0, 1, \ldots m$ sú navrhnuté tak, že J vykazuje minimum, potom polynóm $A(z)$ nazývame planárne inverzným metódou najmenších štvorcov k polynómu $B(z)$. Aby sme minimalizovali funkciu J, musíme vyriešiť sústavu m rovníc o m neznámych

$$\frac{\partial J}{\partial a_k} = 0 \tag{7.17}$$

pre $k = 0, 1, \ldots, m$.

Parciálne derivácie môžeme spočítať po substitúcii

$$c_0 = a_0 \cdot b_0 \tag{7.18}$$

$$c_k = \sum_{r=0}^{m} a_r \cdot b_{(k-r)} \tag{7.19}$$

pre $k = 1, 2, \ldots, m+n$.

Tieto substitučné vzťahy sú odvodené z definície koeficientov c_k. Príslušné parciálne derivácie potom nadobudnú tvar

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = -2 \cdot b_0 + \sum_{k=0}^{m+n} 2\left(\sum_{r=0}^{m} a_r \cdot b_{(k-r)}\right) b_k = 0 \tag{7.20}$$

a

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = \sum_{k=0}^{m+n} 2\left(\sum_{r=0}^{m} a_r \cdot b_{(k-r)}\right) b_{(k-i)} = 0 \tag{7.21}$$

pre $i = 1, 2, \ldots, m$.

Ak zadefinujeme

$$q_{-r+s} = \sum_{k=0}^{m+n} b_{(k-r)} \cdot b_{(k-s)} \tag{7.22}$$

pre $s = 0, 1, \ldots, m$ a za predpokladu, že $b_i = 0$ pre $i < 0$ a pre $i > n$ potom sústavu rovníc môžeme zapísať v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} q_0 & q_{-1} & q_{-2} & \cdots & q_{-m} \\ q_1 & q_0 & q_{-1} & \cdots & q_{-m+1} \\ q_2 & q_1 & q_0 & \cdots & q_{-m+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_m & q_{m-1} & q_{m-1} & \cdots & q_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.23}$$

štvorcová matica koeficientov rádu $m+1$ v predchádzajúcom vzťahu je tzv. Toeplitzova matica.

Pre prvky Toeplitzovej matice platí

$$q_{ij} = q_{(i-j)} \tag{7.24}$$

pre $1 \le i, j \le m+1$, pričom q_{ij} je prvok Toeplitzovej matice v i-tom riadku a j-tom stĺpci.

Toeplitzovu maticu nazývame symetrickou ak

$$q_{ij} = q_{|i-j|} \tag{7.25}$$

pre $1 \le i,j \le m+1$.
Podľa definície prvkov q v našom prípade sa zrejme jedná o symetrickú Toeplitzovu maticu, lebo

$$q_{-r} = q_r \tag{7.26}$$

pre $r = 1, 2, \ldots, m$

Riešením sústavy rovníc v maticovom zápise dostávame koeficienty hľadaného polynómu. Na riešenie tejto sústavy rovníc sa úspešne používa Levinsonov algoritmus [Levins47].

Príklad:

1.1 Majme polynóm

$$B(z^{-1}) = 6 + 17z^{-1} + 11z^{-2} + 2z^{-3}. \tag{7.27}$$

Nájdime planárny polynóm k tomuto polynómu v tvare

$$A(z^{-1}) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}. \tag{7.28}$$

Najprv spočítame hodnoty q_k

$$q_0 = b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 450$$

$$q_1 = b_1 b_0 + b_2 b_1 + b_3 b_2 = 311 \tag{7.29}$$

$$q_2 = b_2 b_0 + b_3 b_1 = 100 .$$

Teraz vyriešime sústavu rovníc

$$\begin{bmatrix} 450 & 311 & 100 \\ 311 & 450 & 311 \\ 100 & 311 & 450 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.30}$$

Riešenie tejto sústavy rovníc vedie na tvar

$$A(z^{-1}) = 0.0335 - 0.0345z^{-1} + 0.0164z^{-2} \tag{7.31}$$

Nakoniec potrebujeme nájsť polynóm

$$\hat{A}(z^{-1}) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 z^{-1} + \hat{a}_2 z^{-2} \tag{7.32}$$

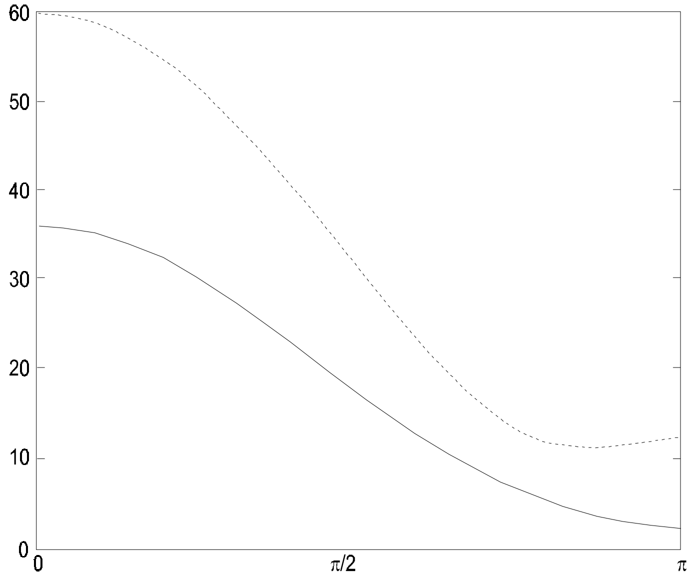
ktorý bude planárne inverzný k polynómu $A(z^{-1})$. Teraz, po výpočte koeficentov q_k riešime sústavu rovníc

$$\begin{bmatrix} 0.00260 & -0.00170 & 0.00055 \\ -0.00170 & 0.00260 & -0.00170 \\ 0.00055 & -0.00170 & 0.00260 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0335 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.33}$$

Riešenie tejto sústavy rovníc vedie na tvar

$$\hat{A}(z^{-1}) = 26.24 + 23.63z^{-1} + 9.90z^{-2} \tag{7.34}$$

Na obr.7.5 vidíme priebeh magnitúdových frekvenčných charakteristík polynómov $B(z^{-1})$ a $\hat{A}(z^{-1})$.



Obr.7.5: *Priebeh magnitúdových charakteristík polynómov*
a. $B(z^{-1})$ *(plná čiara),*
b. $\hat{A}(z^{-1})$ *(bodkovaná čiara)*