
KAPITOLA 7

STABILIZÁCIA SYSTÉMOV IIR

Stabilita systémov je jednou zo základných vlastností, ktorú treba sledovať pri realizácii navrhnutých systémov. V tomto prípade sa jedná iba o systémy s nekonečnou impulzovou odpoveďou, ktorých prenosové funkcie majú póly mimo vnútri jednotkovej kružnice komplexnej roviny z . Existuje niekoľko spôsobov, ako stabilizovať nestabilné digitálne sústavy, pričom sa snažíme zachovať magnitúdovú frekvenčnú charakteristiku pôvodnej sústavy. Na tomto mieste treba poznamenať, že nestabilita sústavy sa nijako neprejavuje na priebehu magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky. Je pozorovateľná iba vo fázovej frekvenčnej charakteristike a najlepšie je viditeľná v priebehu impulzovej charakteristiky, resp. v rozložení koreňov prenosovej funkcie danej sústavy.

7.1 Stabilizácia pomocou fázovacích článkov

Stabilizácia pomocou fázovacích článkov vychádza z predpokladu, že komplexný koreň z_x prenosovej funkcie má na magnitúdovú charakteristiku rovnaký vplyv ako komplexný koreň

$$z_x = \frac{1}{z_x^*} \quad (7.1)$$

kde z_x^* je komplexne združený koreň k z_x .

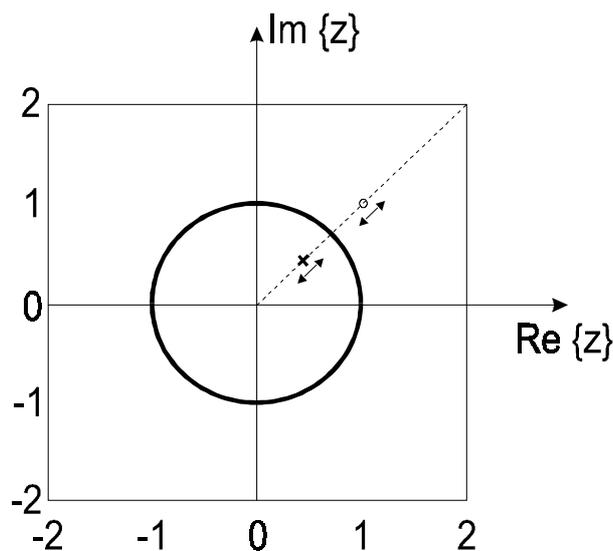
Uvažujme prenosovú funkciu ako racionálnu funkciu

$$H_{1k}(z) = \frac{z^{-1} + a_k}{1 + z^{-1} a_k^*} \quad (7.2)$$

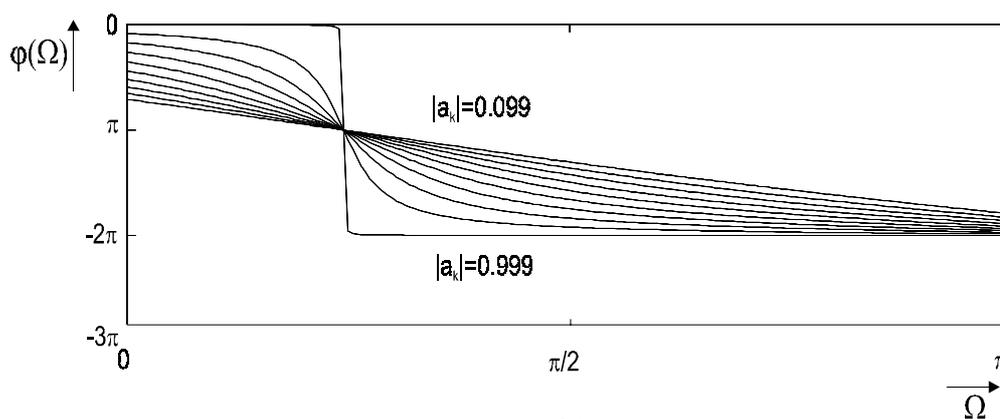
pričom a_k je komplexné číslo a $|a_k| < 1$. Táto funkcia má nulový bod v bode $-1/a_k$ a pól v bode $(-a_k)^*$. Poloha pólu sa nazýva recipročná proti polohe nuly v rovine z a pól leží vo vnútri jednotkovej kružnice tejto roviny. Magnitúdová frekvenčná charakteristika prenosovej funkcie (7.2) bude

$$|H_{1k}(\Omega)| = \left| \frac{a_k - e^{j\Omega}}{1 + e^{-j\Omega} a_k^*} \right| = \left| \frac{(1 + a_k e^{j\Omega}) e^{-j\Omega}}{1 + (a_k e^{j\Omega})^*} \right| = 1 \quad (7.3)$$

Typické rozloženie koreňov takéhoto fázovacieho článku je na obr.7.1.a, pričom šípky pri oboch koreňoch ukazujú, ako sa mení poloha oboch koreňov v závislosti od veľkosti $|a_k|$. Na obr.7.1 b je priebeh fázovej charakteristiky $\varphi(\Omega)$ tohto fázovacieho článku pre rôzne veľkosti $|a_k|$. Poznamenajme, že priebeh fázovej charakteristiky nevykazuje nepárnu symetriu pre záporné frekvencie, keďže sa jedná o korene, ktoré nemajú komplexne združené korene. Tento jav bude ďalej diskutovaný pri fázovacích článkoch 2. rádu.



a)



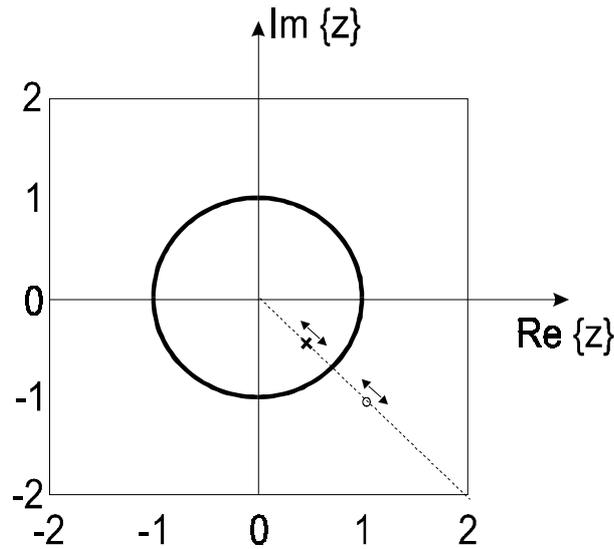
b)

Obr.7.1 Fázovací článok 1. rádu s koreňami v hornej polrovine z:
a) rozloženie koreňov,
b) priebeh fázovej charakteristiky $\varphi(\Omega)$

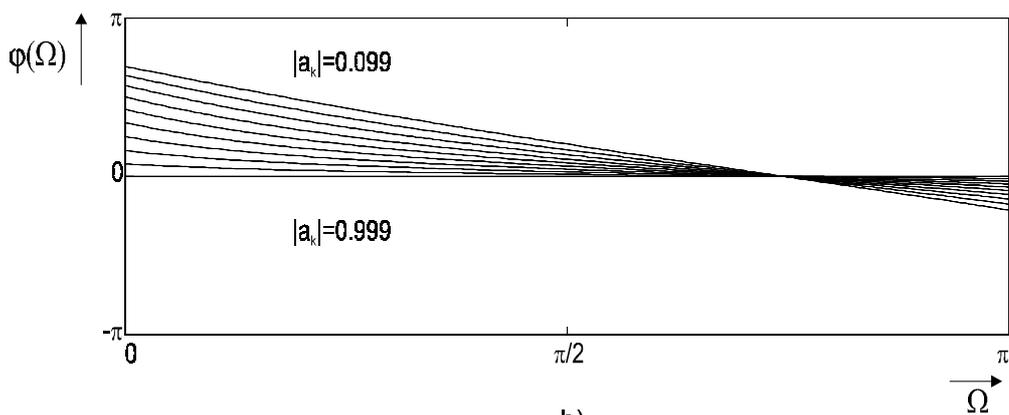
Podobne pre racionálnu funkciu

$$\hat{H}_{1k}(z) = \frac{z^{-1} + a_k^*}{1 + z^{-1}a_k} \quad (7.4)$$

bude magnitúdová frekvenčná charakteristika rovná 1. Na obr.7.2 sú rozloženia koreňov v rovine z, ako aj priebehy fázovej charakteristiky $\varphi(\Omega)$ pre rôzne hodnoty $|a_k|$.



a)



b)

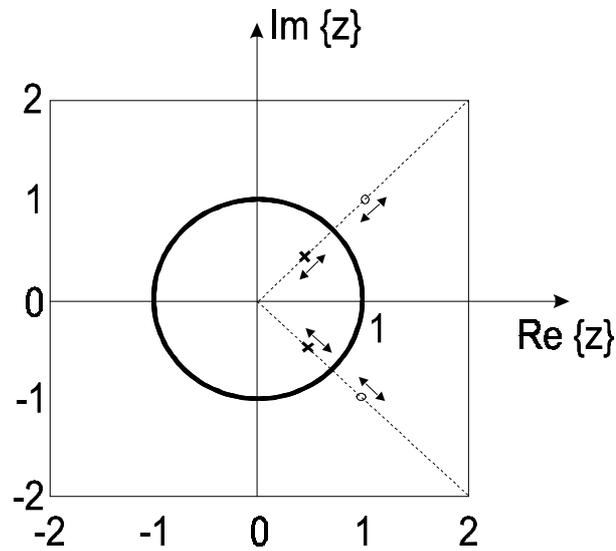
Obr.7.2 Fázovací článok 1. rádu s koreňami v dolnej polrovine z:
a) rozloženie koreňov,
b) priebeh fázovej charakteristiky $\varphi(\Omega)$

Obidve funkcie $H_{1k}(z)$ a $\hat{H}_{1k}(z)$ sú funkcie 1. rádu s komplexnými koeficientami. Vo všeobecnosti uvažujeme prenosové funkcie s reálnymi koeficientami, takže kombináciou $H_{1k}(z)$ a $\hat{H}_{1k}(z)$ dostávame funkciu druhého rádu s reálnymi koeficientami

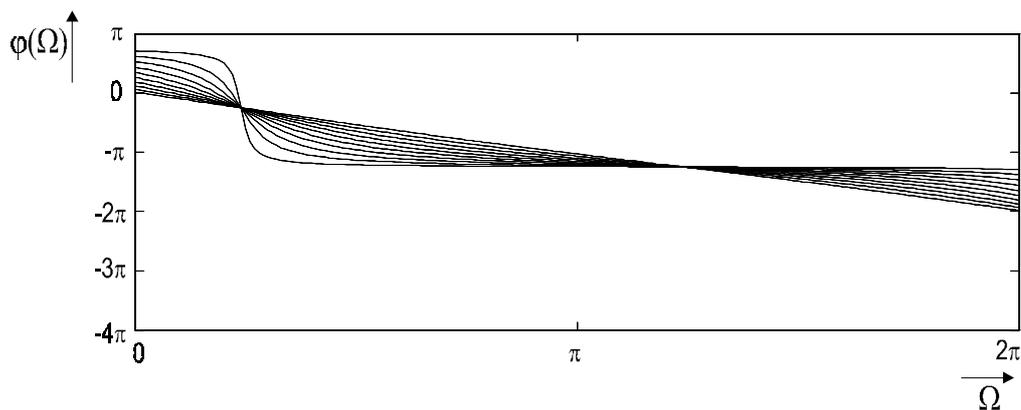
$$H_{2k}(z) = H_{1k}(z) \cdot \hat{H}_{1k}(z) = \frac{z^{-2} + 2 \cdot \text{Re}\{a_k\} \cdot z^{-1} + |a_k|^2}{|a_k|^2 \cdot z^{-2} + 2 \cdot \text{Re}\{a_k\} \cdot z^{-1} + 1} \quad (7.5)$$

Pretože magnitúdy prenosových funkcií $H_{1k}(z)$ a $\hat{H}_{1k}(z)$ nadobúdajú hodnotu 1, bude aj magnitúda ich súčinu $H_{2k}(z)$ rovná 1. Nuly prenosovej funkcie $H_{2k}(z)$ sú v bodoch $-1/a_k$ a $-(1/a_k^*)$, kým póly sú recipročné k nulovým bodom podľa jednotkovej kružnice roviny z . $H_{1k}(z)$, $\hat{H}_{1k}(z)$ a $H_{2k}(z)$

sú prenosové funkcie digitálnych stabilných fázovacích článkov. Rozloženie koreňov v rovine z , ako aj priebehy fázových charakteristík $\varphi(\Omega)$ pre oba fázovacie systémy 1. rádu a výsledný systém 2. rádu je pre rôzne hodnoty $|a_k|$ ukázaný na obr.7.3.



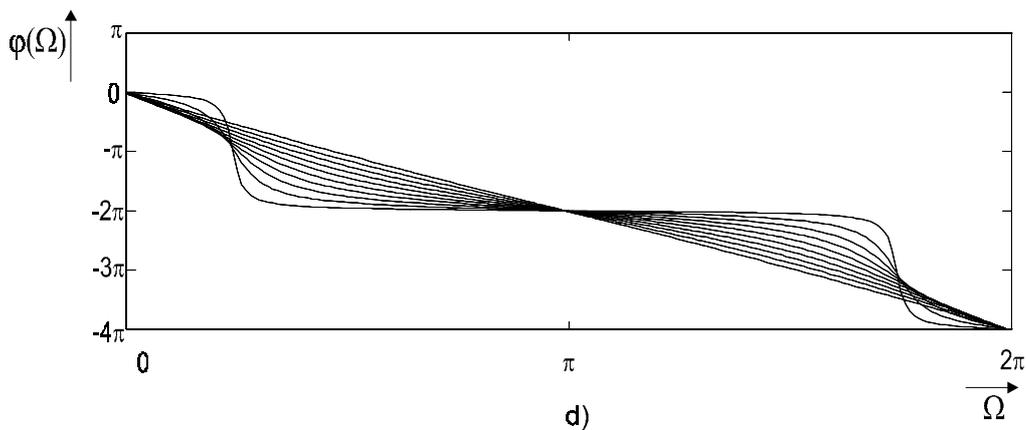
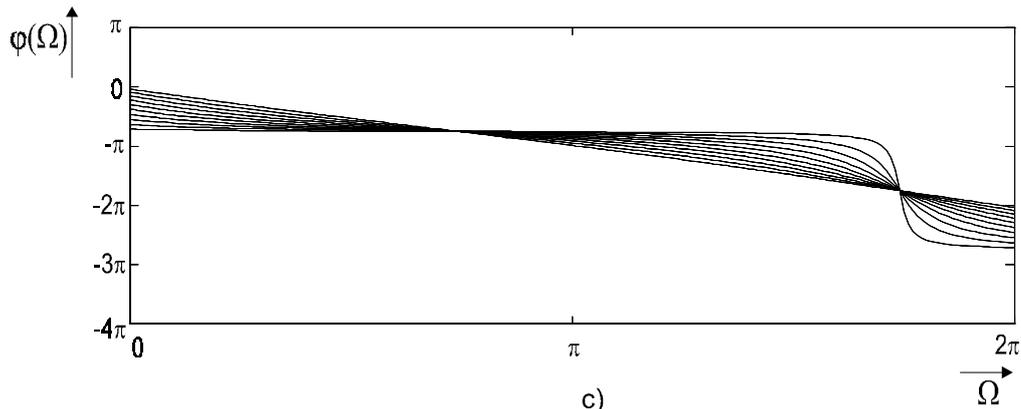
a)



b)

Obr.7.3 Fázovací článok 2. rádu:

- a) rozloženie koreňov,
- b) priebeh fázovej charakteristiky fázovacieho článku 1. rádu s koreňami v hornej polrovine



Obr.7.3 Fázovací článok 2. rádu:
c. priebeh fázovej charakteristiky $\varphi(\Omega)$ fázovacieho článku 1. rádu s koreňami v dolnej polrovine z ,
d. výsledný priebeh fázovej charakteristiky $\varphi(\Omega)$ fázovacieho článku 2.rádu

Všeobecná definícia digitálnych stabilných fázovacích článkov je nasledovná:

Každá racionálna funkcia $H(z)$ komplexnej premennej z je prenosovou funkciou digitálneho stabilného fázovacieho článku, ak

$$|H(\Omega)| = 1 \tag{7.6}$$

pre $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ a všetky póly ležia vo vnútri jednotkovej kružnice.

Uvažujme nestabilný digitálny systém s prenosovou funkciou

$$\hat{H}(z) = H_s(z) \cdot \prod_{k=1}^m \frac{1}{z^{-1} + b_k} \tag{7.7}$$

pričom prenosová funkcia $H_s(z)$ má všetky póly vo vnútri jednotkovej kružnice roviny z a $|b_k| < 1$ pre $k=1,2,\dots,m$, čiže póly sú v bodoch

$$z = -\frac{1}{b_k} \quad (7.8)$$

pre $k=1,2,\dots,m$ a sú mimo jednotkovej kružnice roviny z .

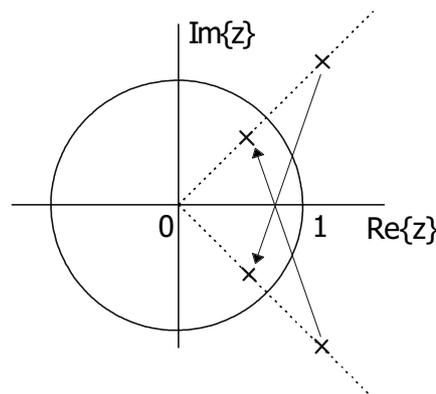
Sústava opísaná prenosovou funkciou $\hat{H}(z)$ je nestabilná. Prenosovú funkciu novej stabilnej sústavy, ale s tou istou magnitúdovou frekvenčnou charakteristikou dostaneme prenásobením funkcie $\hat{H}(z)$ prenosovou funkciou fázovacieho článku

$$H(z) = \hat{H}(z) \prod_{k=1}^m \frac{z^{-1} + b_k}{1 + z^{-1} b_k^*} \quad (7.9)$$

Princíp stabilizácie spočíva v pridaní fázovacieho článku do kaskády so stabilizovaným systémom, pričom nulové body prenosovej funkcie fázovacieho článku sú presne na tom istom mieste roviny z ako nestabilné póly, takže vplyv nestabilných pólov sa týmito nulami ruší a póly fázovacieho článku sú recipročné k nestabilným pólom prenosovej funkcie $\hat{H}(z)$. Po vykrátení čitateľa tejto prenosovej funkcie s menovateľom prenosovej funkcie $H(z)$ dostaneme prenosovú funkciu stabilného systému a navyše toho istého rádu ako rád prenosovej funkcie $\hat{H}(z)$ a čo je najdôležitejšie, platí

$$|H(\Omega)| = |\hat{H}(\Omega)| \quad (7.10)$$

pre $-\pi \leq \Omega \leq \pi$. Princíp stabilizácie spočíva v nahradení pólov mimo jednotkovej kružnice recipročnými pólmi, ktoré ležia vo vnútri jednotkovej kružnice (viď. obr. 7.4).



Obr. 7.4 Stabilizácia pomocou fázovacích článkov

Táto metóda je pomerne jednoduchá. Jej hlavnou nevýhodou je, že ak prenosová funkcia obsahuje póly na jednotkovej kružnici roviny z , tak ich recipročné hodnoty ležia opäť na jednotkovej kružnici. V nasledujúcej podkapitole opíšeme metódu, pomocou ktorej môžeme stabilizovať aj sústavy s pólmi na jednotkovej kružnici.