

---

## 5.4 Metódy návrhu FIR filtrov

### 5.4.1 Intuitívny návrh FIR filtrov

Návrh FIR filtrov je založený na vzťahu medzi frekvenčnou charakteristikou filtra a koeficientami  $a_k$  diferenčnej rovnice (5.1). Požiadavky na frekvenčnú charakteristiku  $H(\Omega)$  sú typickým vstupom a koeficienty  $a_k$  rov.(5.1) resp. prvky  $h(k)$  impulzovej charakteristiky  $h(n)$  typickým výstupom algoritmu návrhu filtra. Súvis medzi frekvenčnou charakteristikou  $H(\Omega)$  a koeficientami  $a_k$  je zrejmý ale prechod z  $H(\Omega)$  na  $a_k$  nie je jednoduchý. Požiadavky na frekvenčnú charakteristiku sa dajú v drvivej väčšine prípadov iba aproximovať. Proces určenia koeficientov  $a_k$  z požadovaného priebehu frekvenčnej charakteristiky  $H(\Omega)$  je teda proces nejednoznačný z dôvodov rôznych pohľadov na aproximáciu. Existuje niekoľko metód návrhu FIR filtrov. Podstatná časť tejto kapitoly je venovaná práve opisu týchto metód.

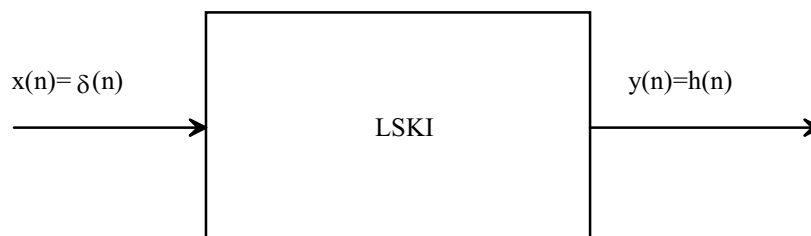
Jednoduchá štruktúra FIR filtrov nám ponúka názorný pohľad na súvis medzi  $H(\Omega)$  a  $a_k$ . Ako sme už spomínali, koeficienty  $a_k$  predstavujú priamo členy  $h(k)$  impulzovej odovede  $h(n)$ . Impulzová odpoveď  $h(n)$  je odpoveďou sústavy na jednotkový impulz  $\delta(n)$  zadaný v kapitole 2

$$\begin{aligned} \delta(n) &= 1 && \text{pre } n = 0 \\ \delta(n) &= 0 && \text{inde} \end{aligned} \quad (5.16)$$

podľa obr.5.18.

Spektrálna funkcia signálu  $\delta(n)$  obsahuje rovnakou mierou všetky frekvencie. Uvažujme čiste teoretický návrh filtra, ktorý potláča všetky frekvenčné zložky vstupného signálu a prepúšťa iba jednosmernú zložku. Ako by vyzerala impulzová charakteristika  $h_i(n)$  takéhoto ideálneho filtra? Z celého širokého spektra signálu  $\delta(n)$  by sa na výstupe objavila iba jednosmerná zložka vstupného signálu, čiže impulzová charakteristika by bola

$$h_i(n) = A \quad \text{pre } -\infty < n < \infty \quad (5.17)$$



Obr. 5.18 Meranie impulzovej charakteristiky filtra.

---

A predstavuje zosilnenie jednosmernej zložky  
N je dĺžka filtra.

Táto čiste teoretická úvaha naznačuje, že navrhovaný ideálny dolnopriepustný filter s impulzovou charakteristikou  $h_i(n)$  by mal mať nekonečne veľa členov, ktorých veľkosť by sa limitne blížila k nulovej hodnote.

Podobne filter, prepúšťajúci iba jednu harmonickú zložku signálu s pomerovou kruhovou frekvenciou  $\Omega_0$  by mal impulzovú charakteristiku

$$h_i(n) = A \cdot \cos(\Omega_0 n + \varphi) \quad (5.18)$$

pričom  $\varphi$  je fáza harmonického signálu v bode  $n=0$ . Samozrejme, návrh oboch filtrov (rov.(5.17), rov.(5.18)) je čiste teoretický. Impulzová charakteristika svedčí o nekauzálnosti a nekonečnom počte násobičiek sústavy. Predchádzajúca úvaha nás však vedie k záveru, že reálna sústava, ktorej impulzová charakteristika sa bude tvarovo stotožňovať s rov.(5.17) aspoň na istom úseku, bude predstavovať dolnopriepustný filter, prepúšťajúci jednosmernú zložku. Poznamenajme, že v tomto prípade už uvažujeme konečný počet vzoriek v rov.(5.17) a  $N$  teraz v nej predstavuje dĺžku, resp. počet vzoriek úseku, na ktorom sú obe impulzové charakteristiky tvarovo totožné. Pre rov.(5.18) platí podobné tvrdenie. Bude sa jednať o filter typu pásmový priepust s pásmom prepúšťania v okolí frekvencie  $\Omega_0$ . Naše tvrdenie dokážeme nasledovnou úvahou. Predpokladajme impulzovú odpoveď  $h_i(n)$  ideálneho filtra na jednu pomerovú kruhovou frekvenciu podľa rov.(5.18). Po pre násobení rov.(5.18) funkciou  $w_R(n)$ , ktorá je známa ako **pravouhlé okno** alebo **R-okno**

$$w_R(n) = \begin{cases} 1 & \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & \text{inde} \end{cases} \quad (5.19)$$

dostaneme impulzovú odpoveď už realizovateľného filtra

$$h(n) = h_i(n) \cdot w_R(n) \quad (5.20)$$

Nech  $H_i(\Omega)$  je frekvenčná charakteristika ideálneho filtra a  $W_R(\Omega)$  je frekvenčná charakteristika pravouhlého okna. Frekvenčná charakteristika  $H(\Omega)$  novej sústavy bude

$$H(\Omega) = H_i(\Omega) * W_R(\Omega) = \int_{-\pi}^{\pi} H_i(e^{j\omega}) \cdot W_R(e^{j(\Omega-\omega)}) d\omega \quad (5.21)$$

Kruhová frekvencia  $\omega$  v predchádzajúcej rovnici nemá v tomto prípade nič spoločné s označením kruhovej frekvencie v návrhu sústav v analógovej oblasti. Treba poznamenať, že realizovateľná frekvenčná charakteristika systému so zosilnením 1 vyžaduje zmenu parametra  $A$  z rov.(5.18) na hodnotu  $\frac{1}{N}$ , pričom  $N$  je dĺžka pravouhlého okna. Na obr.5.19 je znázornený celý postup intuitívneho návrhu úzkopásmového priepustu s pásmom prepúšťania okolo  $\Omega_0$ .

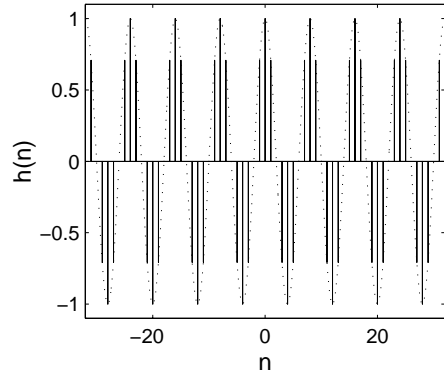
---

Vidíme, že konvolúcia  $h(n)$  ideálneho filtra s pravouhlým oknom vytvára menej kvalitnú, ale realizovateľnú variantu pásmového priepustu. Základné vlastnosti pravouhlého okna, najmä šírka hlavného laloka a veľkosť postranných lalokov frekvenčnej charakteristiky filtra sú hlavným obmedzujúcim faktorom kvality navrhovaného filtra. Šírku hlavného laloka môžeme znižovať zväčšovaním dĺžky okna. Veľkosť postranných lalokov však ostáva konštantná, čo pri pravouhlom okne činí asi  $-13dB$  rozdiel medzi hlavným a prvým postranným lalokom. V súčasnosti poznáme viac typov okien (pozri ďalej), ktoré vykazujú lepšie vlastnosti frekvenčných charakteristík ako pravouhlé okno. Väčšinou sa však jedná o frekvenčné charakteristiky s jedným hlavným a viacerými postrannými lalokmi.

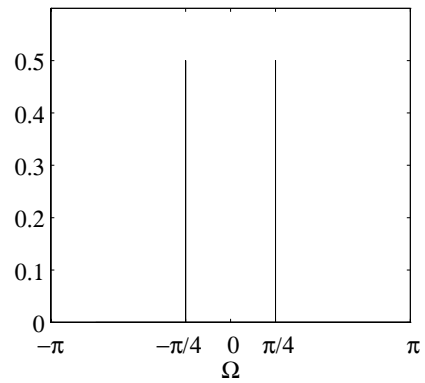
Na záver tejto kapitoly môžeme formulovať algoritmus návrhu FIR filtrov intuitívnou metódou v nasledujúcich bodoch:

1. Vytvoriť digitálny signál  $h_i(n)$ , ktorý je zložený z niekoľkých harmonických zložiek s frekvenciami z požadovaného pásma prepúšťania. Dostávame nekauzálnu sústavu, ktorá prepúšťa iba tú časť signálu, ktorej spektrálna funkcia obsahuje frekvencie, z ktorých je zložená impulzová odpoveď  $h_i(n)$ .
2. Skrátiť takto vytvorenú impulzovú charakteristiku  $h_i(n)$  pomocou vhodnej oknovej funkcie na zvolenú dĺžku. Skrátene dĺžky trvania signálu bude mať za následok nielen technicky realizovateľnú sústavu ale aj "rozostrenie" spektra. Miesto prepúšťania iba niekoľkých diskretných zložiek signálu z požadovaného pásma prepúšťania, bude sústava prepúšťať časť signálu z celého pásma prepúšťania.

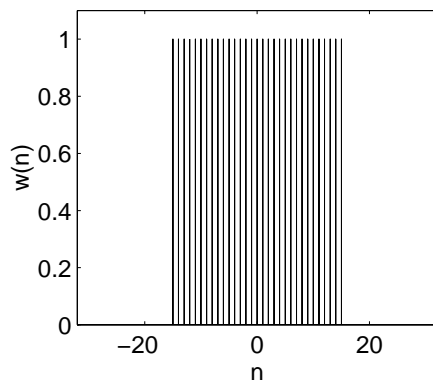
Impulz. charakteristika ideál. PP-filtra



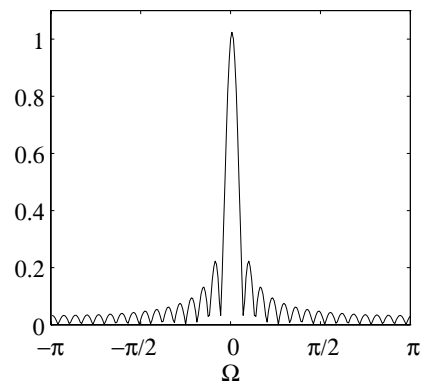
Magn. frekv. charakteristika ideál. PP-filtra



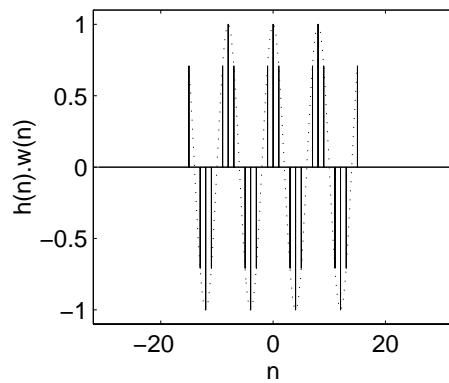
R-okno



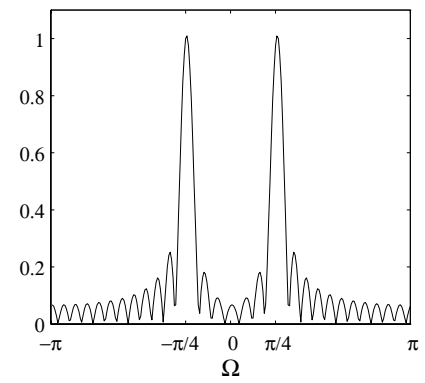
Magn. frekv. charakteristika R-okna



$h(n)$  skrátená pomocou R-okna



Výsl. magn. frekv. charakteristika PP



Obr. 5.19 Intuitívny návrh úzkopásmového FIR filtra

---

### 5.4.2 Metóda frekvenčného vzorkovania

Intuitívna metóda opísaná v podkapitole 5.4.1 je veľmi jednoduchá a dovoľuje určiť vopred iba veľmi obmedzené vlastnosti navrhovaného filtra. Nie je možné presne určiť napr. hranice pásma prepúšťania a pásma tlmenia, ani riadiť odstup signál/šum v oboch pásmach. Definícia impulzovej charakteristiky bola tiež vyslovená iba intuitívne. V nasledujúcej časti budeme hovoriť o metóde návrhu FIR filtrov, ktorá je založená na princípe inverzného postupu k analýze FIR filtrov. Pri analýze počítame frekvenčnú odpoveď sústavy pomocou Fourierovej transformácie. Pri procese analýzy FIR filtra poznáme impulzovú odpoveď  $h(n)$ . Frekvenčnú charakteristiku spočítame

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot e^{-j\Omega n} \quad (5.22)$$

Pri procese syntézy je známy priebeh  $H(\Omega)$ , impulzovú charakteristiku môžeme spočítať pomocou vzťahu:

$$h(n) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} d\Omega \quad (5.23)$$

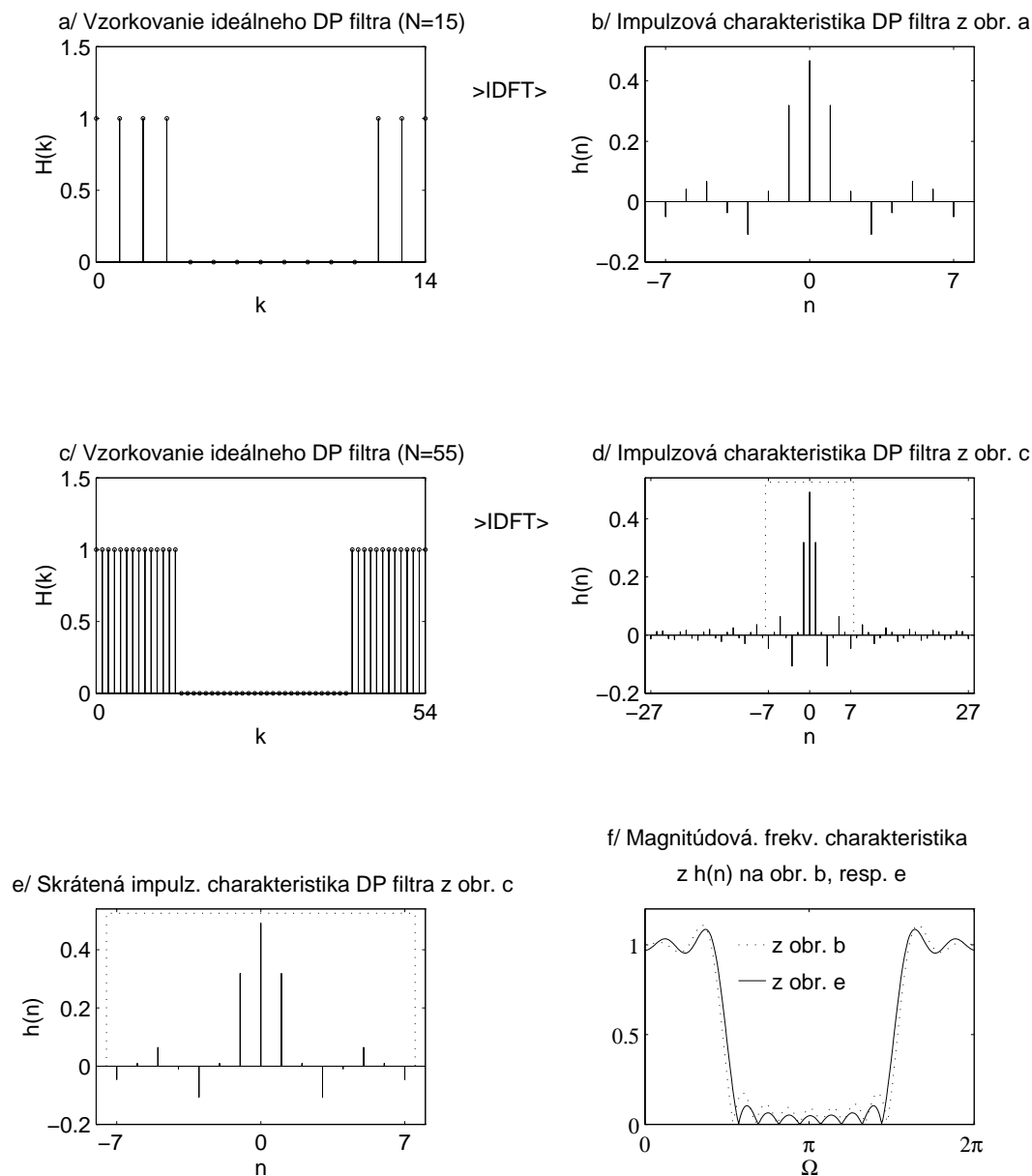
Ukážme si postup na nasledovnom príklade.

#### PRÍKLAD 5.1

### 5.4.3 Metóda frekvenčného vzorkovania s oknovými funkciami

Jednou z nevýhod metódy frekvenčného vzorkovania je, že kontrolujeme iba  $N$  bodov frekvenčnej charakteristiky filtra. Táto skutočnosť spôsobuje často problémy napr. pri presnej špecifikácii hranice medzi pásmom prepúšťania a tlmenia. Pre lepšiu aproximáciu frekvenčnej charakteristiky môžeme metódu frekvenčného vzorkovania doplniť oknovou funkciou podľa nasledovného predpisu:

1. Z požadovanej frekvenčnej charakteristiky vyberieme tak veľa vzoriek, ako nám dovoľuje náročnosť výpočtu IDFT. Rýchlosť a počet operácií algoritmu sú hlavným limitujúcim faktorom.
2. Vypočítame impulzovú charakteristiku  $h_0(n)$  takto "prevzorkovanej" frekvenčnej charakteristiky.
3. Skráťme impulzovú charakteristiku  $h_0(n)$  pomocou vhodnej oknovej funkcie na dĺžku, ktorá nie je na prekážku pri realizácii FIR filtra. Oknovú funkciu treba umiestniť okolo stredu impulzovej charakteristiky  $h_0(n)$ . Ak totiž skrátená impulzová charakteristika  $h(n)$  bude vykazovať symetriu, resp. asymetriu, budeme mať zaručenú tiež lineárnu fázovú charakteristiku. Poznamenajme, že vhodná oknová funkcia bude mať za následok aj zmenšenie Gibbsovoho javu.
4. Výslednú impulzovú charakteristiku  $h(n)$  posunieme tak, aby prvá nenulová vzorka bola umiestnená v bode  $n=0$ . Tento posuv má za následok iba oneskorenie výstupného signálu za vstupným signálom.



Obr. 5.20 Metóda frekvenčného vzorkovania s oknovou funkciou

Filter rádu  $N$  navrhnutý touto metódou bude vykazovať lepšiu aproximáciu požadovanej frekvenčnej charakteristiky ako filter rádu  $N$ , navrhnutý bez oknovej funkcie. Celý postup návrhu FIR filtra pomocou oknových funkcií je znázornený na obr. 5.20. ( V Tab. 5.3 sú uvedené oknové funkcie )

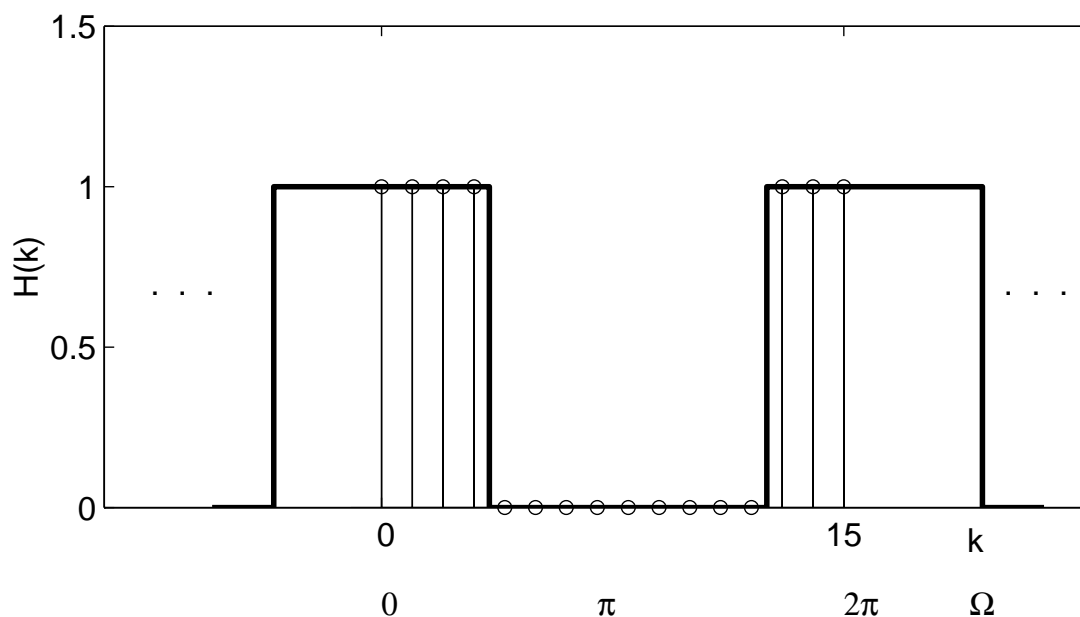
#### 5.4.4 Využitie DFT pri návrhu FIR filtrov metódou okien

Metóda opísaná v predchádzajúcej časti sa často nazýva integrálna metóda, pretože na návrh  $h(n)$  využíva integrálnu Fourierovu transformáciu. V praxi sa pri metóde frekvenčného vzorkovania využíva pre návrh DFT, resp. IDFT. Ak hľadáme sústavu s impulzovou odpoveďou  $h(n)$  dĺžky  $N$ , potom stačí vziať  $N$  vzoriek frekvenčnej charakteristiky  $H(\Omega)$  a pomocou IDFT dostaneme  $N$  vzoriek  $h(n)$ . Poznamenajme, že podobne ako pri integrálnej Fourierovej transformácii máme hranice integrálu od  $-\pi$  do  $\pi$ , pri IDFT musíme uvažovať vzorky frekvenčnej charakteristiky v tom istom rozsahu, resp. na intervale  $(0, 2\pi)$ . Spôsob vzorkovania magnitudovej frekvenčnej charakteristiky ideálneho dolnopriepustného filtra je zrejмый z obr. 5.21.

Aby impulzová charakteristika mala reálne koeficienty, musia členy tvoriť komplexne združené dvojice, čiže

$$H(k) = \overline{H(N-k)} \quad (5.27)$$

Ak vzorky frekvenčnej charakteristiky obsahujú aj lineárnu fázovú zložku, t.j. uvažujeme diskkrétne vzorky frekvenčnej charakteristiky podľa rov.(5.24)



Obr. 5.21 Frekvenčná charakteristika pri metóde frekvenčného vzorkovania

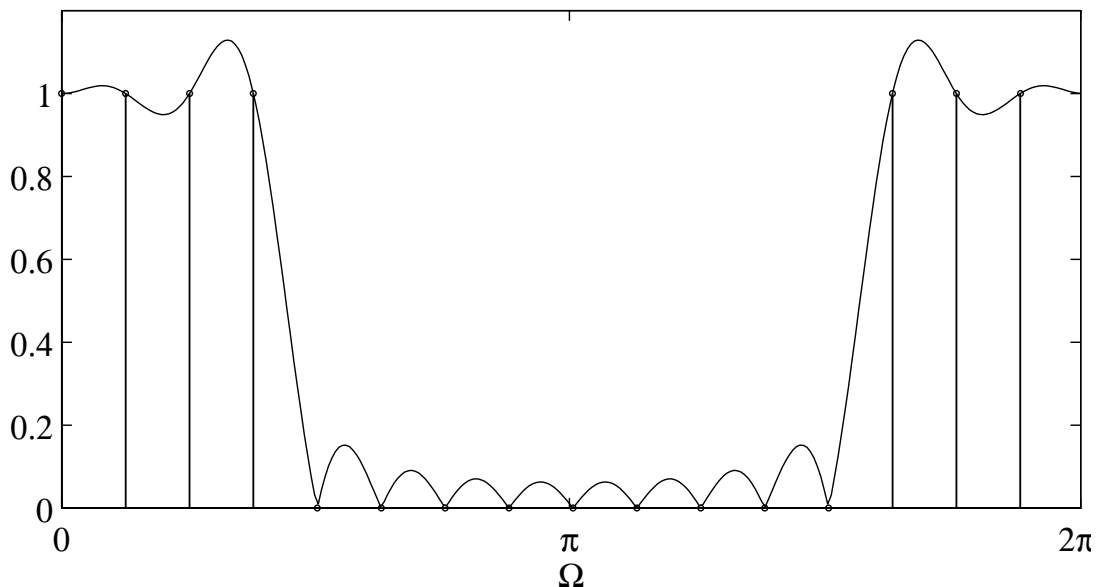
$$H(k) = \begin{cases} e^{-j\Omega_0 k} & \text{pre } \Omega_0 k < \Omega_0 \text{ a pre } \Omega_0 k > 2\pi - \Omega_0 \\ 0 & \text{inde} \end{cases} \quad (5.28)$$

dostávame priamo symetrické vzorky impulzovej charakteristiky  $h(n)$ . Zo vzťahov (5.27) a (5.28) vyplýva podmienka pre strmlosť fázovej charakteristiky FIR filtra

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \quad (5.29)$$

Tento fakt spôsobuje často nežiadúce veľké skupinové oneskorenie FIR filtrov s lineárnou fázovou charakteristikou. Čím vyšší rád filtra, tým strmšiu fázovú charakteristiku má prenosová funkcia.

Keďže sme pri IDFT brali do úvahy iba diskkrétne body frekvenčnej charakteristiky, navrhnutá impulzová charakteristika  $h(n)$  bude iba aproximovať ideálne požiadavky na filter. Typický priebeh skutočnej frekvenčnej charakteristiky navrhnutého filtra podľa obr. 5.21 je na obr. 5.22.



Obr. 5.22 Magnitúdová frekvenčná charakteristika filtra navrhnutého metódou frekvenčného vzorkovania

Na obr. 5.22 jasne vidíme, že skutočná magnitúdová frekvenčná charakteristika sa s ideálnou charakteristikou zhoduje len v  $N$  diskrétnych bodoch. Pri prechode z pásma prepúšťania do pásma tlmenia sú rozdiely ideálnej a skutočnej charakteristiky najväčšie. Jedná sa o tzv. Gibbsov jav.