4.3. Rýchla Fourierova transformácia

Každá z rov. (4.6) a (4.7) predstavuje sústavu N rovníc. Náročnosť týchto výpočtov aj napriek použitiu výpočtovej techniky bola tak veľká, že diskrétna Fourierova transformácia sa až do r.1965 v podstate nepoužívala. Ak si uvedomíme, že pre dávku $N = 10$ musíme urobiť zhruba 1 milión komplexných násobení, použitie DFT resp. IDFT v reálnom čase bolo nemysliteľné. Až v roku 1965 Cooley a Tukey publikovali rýchly algoritmus (FFT). Týmto odštartovali obrovské možnosti využitia tejto transformácie. V súčasnosti existuje veľmi veľké množstvo rýchlych algoritmov. V ďalšom opíšeme jeden z nich.

4.3.1 Algoritmus rýchlej Fourierovej transformácie

Pre ďalšie úvahy vynecháme z rov.(4.6) koeficient $\frac{1}{N}$, jedná sa o konštantu, ktorou vynásobíme výsledok a pre ďalšie úvahy je zbytočná . $X(k)$ vyjadrime ako súčet párnych a nepárnych zložiek

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n).e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)e^{-j\frac{2\pi(2n+1)k}{N}} \tag{4.28}$$

Ak druhý člen sumy upravíme do tvaru

$$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)e^{-j\frac{2n.2\pi.k}{N}}.e^{-j\frac{2\pi k}{N}} \tag{4.29}$$

potom obe sumy môžeme považovať za samostatné DFT dvoch signálov, ktorých dĺžka je $\frac{N}{2}$. Zavedieme substitúciu:

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n).e^{-j\frac{2\pi kn}{\frac{N}{2}}} \tag{4.30.a}$$

$$Z(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1).e^{-j\frac{2\pi kn}{\frac{N}{2}}} \tag{4.30.b}$$

potom pre $0 \le k \le \left(\frac{N}{2} - 1\right)$ môžeme napísať:

$$X(k) = Y(k) + Z(k).e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \tag{4.31}$$

Pre druhú polovicu prvkov $X(k)$ napíšeme rovnicu na základe predpokladov:

$$Y\left(k+\frac{N}{2}\right) = Y(k)$$
$$Z\left(k+\frac{N}{2}\right) = Z(k) \tag{4.32}$$

$$e^{-j\left(k+\frac{N}{2}\right).2\pi.\frac{1}{N}} = -e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$$

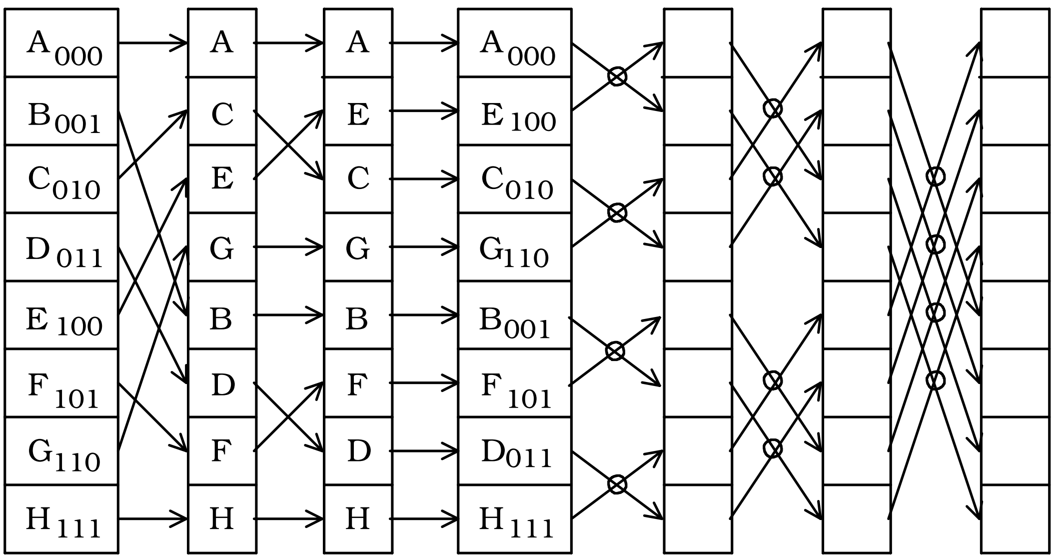
a teda

$$X\left(k+\frac{N}{2}\right) = Y(k) - Z(k).e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \qquad (4.33)$$

pre $0 \le k \le \left(\frac{N}{2}-1\right)$.

Postupnosti $Y(k)$ a $Z(k)$ môžeme redukovať podobným spôsobom ako sme to ukázali pre $X(k)$. Takéto redukovanie pre dávku $N = 2^r$ postupne nás dovedie až k dávke rovnej 1 a to je tzv. triviálny prípad. Na základe definície (rov.(4.6)) diskrétny signál pozostávajúci z jednej vzorky má spektrum rovné sebe samému. Na obr.4.1 je ukázaný postup redukovania dávky $N = 8$ na triviálny prípad a následné skladanie do výslednej spektrálnej postupnosti. Tento algoritmus je v literatúre známy ako decimovanie v čase. Postup redukovania na triviálny prípad nemusíme robiť postupne, ale preusporiadanie vstupnej postupnosti môžeme urobiť v jednom kroku na základe tzv. inverzie bitov (jasné z obr.4.1, binárne číslo 001 prejde na číslo 100).

Graf v obr.4.1 nazýva sa motýlikovým diagramom. Spätné zostavovanie z triviálneho prípadu je pomerne jednoduché a obsahuje iba jedno komplexné násobenie v jednotlivých krokoch $e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$ a smerom hore predpisuje súčet a smerom dole rozdiel týchto údajov.



Obr.4.1. *Motýlikový diagram*

4.3.2 Algoritmus výpočtu IDFT

Uvedený algoritmus môžeme použiť aj pre výpočet IDFT. Samozrejme, využitie tohoto algoritmu pre tento výpočet vyžaduje úpravu vstupných údajov.

Predpokladajme signál $x(n)$. K-ty člen spektra tohoto signálu je daný rovnicou

$$X(k) = \frac{1}{N}(x(0) + x(1).W^{-k} + x(2)W^{-2k} + \dots + x(N-1)W^{-(N-1)k}) \qquad (4.34)$$

$8 \rightarrow 2x4 \quad 4 \rightarrow 2x2 \quad 2 \rightarrow 2x1 \quad e^{-j\frac{2\pi}{2}k} \quad e^{-j\frac{2\pi}{4}k} \quad e^{-j\frac{2\pi}{8}k}$

resp. n-tá vzorka signálu vyjadrená zo spektra:

$$x(n) = X(0) + X(1)W^{n} + X(2)W^{2n} + \dots + X(N-1)W^{(N-1)n} \qquad (4.35)$$

Ak si všimneme tieto dve rovnice, vidíme, že zápis sa líši iba o znamienka v exponente člena W^{k}. Napíšme si rov.(4.35) v tvare

$$x(n) = X(0) + X(N-1)W^{(N-1)n} + X(N-2)W^{(N-2)n} + \dots + X(1)W^{n} \qquad (4.36)$$

pretože platí:

$$W^{(N-\gamma)n} = W^{-\gamma n} \qquad (4.37)$$

rov.(4.36) môžeme vyjadriť v tvare

$$x(n) = X(0) + X(N-1)W^{-n} + X(N-2)W^{-2n} + \dots + X(1)W^{-(N-1)n} \qquad (4.38)$$

ktorá je z hľadiska koeficientov W^{-n} totožná so vzťahom (4.34) čo je vlastne dopredná DFT.

Potom predpis pre použitie rýchleho algoritmu na výpočet IDFT spočíva v načítaní prvkov $X(k)$ v obrátenom poradí $k = N, N-1, \dots 2, 1$, pretože z periodicity vyplýva, že $X(N) = X(0)$, prvá hodnota $X(0)$ ostáva na svojom mieste. Ďalší postup je rovnaký ako na obr.4.1. Výstup vzoriek $x(n)$ je v prírodzenom poradí.