
4.2 Vlastnosti diskkrétnej Fourierovej transformácie

Pravdepodobne najdôležitejšia vlastnosť, ktorá vyplýva priamo z definície je

Periodicita DFT a IDFT

DFT, resp. IDFT môžu byť aplikované iba na periodické postupnosti a výsledkom je znova periodická postupnosť s periódou N , platí:

$$\begin{aligned}x(n) &= x(n+N) && \text{pre všetky } n=0, 1, 2, \dots, N-1 \\X(k) &= X(k+N) && \text{pre všetky } k=0, 1, 2, \dots, N-1\end{aligned}\tag{4.14}$$

Linearita

Ak $x_1(n)$ a $x_2(n)$ sú periodické postupnosti s periódou N a

$$\begin{aligned}\text{DFT}\{x_1(n)\} &= X_1(k) \\ \text{DFT}\{x_2(n)\} &= X_2(k)\end{aligned}$$

potom

$$\text{DFT}\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} = a_1X_1(k) + a_2X_2(k)\tag{4.15}$$

Posunutie v časovej oblasti

Ak $x(n)$ je periodická postupnosť s periódou N a s odpovedajúcou spektrálnou postupnosťou $X(k)$, potom periodická postupnosť posunutá v čase $x(n-n_0)$ má zodpovedajúce spektrum

$$\text{DFT}\{x(n-n_0)\} = X(k) \cdot e^{-jn_0k\frac{2\pi}{N}}\tag{4.16a}$$

resp:

$$\text{DFT}\{x(n+n_0)\} = X(k) \cdot e^{jn_0k\frac{2\pi}{N}}\tag{4.16b}$$

pre všetky $n_0 < N$. Postupnosť $x(n-n_0)$ je vytváraná rotáciou.

Posunutie vo frekvenčnej oblasti

Ak $X(k)$ je spektrálna postupnosť periodického signálu $x(n)$ s periódou N , potom spektrálna postupnosť posunutá o k_0 je spektrálnou postupnosťou periodického signálu

$$\begin{aligned}\text{IDFT}\{X(k-k_0)\} &= x(n)e^{j\frac{2\pi}{N}nk_0} \\ \text{IDTF}\{X(k+k_0)\} &= x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk_0}\end{aligned}\tag{4.17}$$

DFT párnej a nepárnej postupnosti

Ak $x_1(n)$ je periodická postupnosť s periódou N párna, t.j. platí, že:

$$x_1(-n) = x_1(n)$$

a odpovedajúce spektrum je

$$\text{DFT}\{x_1(n)\} = X_1(k)$$

a ak $x_2(n)$ je periodická postupnosť s periódou N nepárna, t.j.

$$x_2(-n) = -x_2(n)$$

a jej spektrum je:

$$\text{DFT}\{x_2(n)\} = X_2(k)$$

potom platí, že spektrum párnej postupnosti je tiež párne

$$X_1(-k) = X_1(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \quad (4.18)$$

a spektrum nepárnej postupnosti je nepárne

$$X_2(-k) = -X_2(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \quad (4.19)$$

DFT reálnej postupnosti

Ak $x(n)$ je reálna periodická postupnosť s periódou N , potom pre jej spektrálnu postupnosť platí:

$$X(k) = \overline{X(N-k)} = \overline{X(-k)} \quad (4.20)$$

Z tejto rovnice vyplýva, že reálna časť spektra je párnou funkciou a imaginárna časť spektra je nepárnou funkciou

$$\begin{aligned} \text{Re}\{X(k)\} &= \text{Re}\{X(N-k)\} \\ \text{Im}\{X(k)\} &= -\text{Im}\{X(N-k)\} \\ |X(k)| &= |X(N-k)| \\ \arg\{X(k)\} &= -\arg\{X(N-k)\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ak vstupný signál $x(n)$ je symetrický, t.j.

$$x(n) = x(N-n)$$

potom $X(k)$ je čisto reálny

DFT komplexnej postupnosti

Ak $z(n)$ je periodická komplexná postupnosť

$$z(n) = x(n) + jy(n) \quad (4.22)$$

kde $x(n)$ a $y(n)$ sú reálne periodické postupnosti. Potom:

$$DFT\{z(n)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) + jy(n)]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.23)$$

Rovnicu môžeme napísať v tvare

$$Z(k) = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + j \sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right\} = X(k) + jY(k) \quad (4.24)$$

Reálnu a imaginárnu časť rov.(4.24) môžeme získať pomocou vzťahov

$$Re\{Z(k)\} = Re\{X(k)\} - Im\{Y(k)\} \quad (4.25a)$$

$$Im\{Z(k)\} = Im\{X(k)\} + Re\{Y(k)\} \quad (4.25b)$$

O reálnej časti $X(k)$ a $Y(k)$ vieme, že sú párne symetrické a o ich imaginárnych častiach, že sú nepárne symetrické. Potom môžeme napísať

$$Re\{X(k)\} = \frac{1}{2}(Re\{Z(k)\} + Re\{Z(N-k)\}) \quad (4.26a)$$

$$Im\{Y(k)\} = \frac{1}{2}(Re\{Z(N-k)\} - Re\{Z(k)\}) \quad (4.26b)$$

$$Re\{Y(k)\} = \frac{1}{2}(Im\{Z(k)\} + Im\{Z(N-k)\}) \quad (4.26c)$$

$$Im\{X(k)\} = \frac{1}{2}(Im\{Z(k)\} - Im\{Z(N-k)\}) \quad (4.26d)$$

Z rovníc vidíme, že výpočet DFT koeficientov komplexnej postupnosti $z(n)$ dĺžky N môžeme získať aj výpočtom DFT dvoch reálnych postupností dĺžky N . Potom sa už jedná iba o správne sčítanie, resp. odčítanie výsledkov podľa rov.(4.25a) a (4.25b).

DFT komplexne združenej postupnosti

Ak $\overline{z(n)}$ je periodická, komplexne združená postupnosť k postupnosti $z(n)$, potom spektrálna postupnosť je daná vzťahom:

$$DFT\{\overline{z(n)}\} = \overline{Z(N-k)} = \overline{Z(-k)} \quad (4.27)$$