Kapitola 4

DISKRÉTNA FOURIEROVA TRANSFORMÁCIA

V prvej kapitole sme sa venovali opisu LDKI systémov a signálov vo frekvenčnej oblasti. Tieto úvahy by neboli celkom úplné, keby sme nevenovali pozornosť aj diskrétnej Fourierovej transformácii.

Keď v roku 1672 Isaak Newton prvýkrát použil pojem **spektrum** v súvislosti s optickým spektrom, ktoré bolo vytvorené prechodom svetla hranolom, nikto netušil, že tento pojem bude tvoriť základ analýzy signálov. Francúzsky inžinier Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) svojou teóriou ovplyvnil nielen ďalší rozvoj matematických metód, ktoré sa používajú v praxi, ale v súvislosti s rozkmitaním struny vyjadil prvýkrát funkciu v tvare nekonečného radu trigonometrických funkcií. Pomocou týchto jednoduchých ortogonálnych funkcií vieme aproximovať v praxi sa vyskytujúce signály. Tieto nám zároveň určujú spektrum aproximovaného signálu.

Z matematického pohľadu diskrétna Fourierova transformácia (ďalej iba DFT) predstavuje systém diskrétnych ortogonálnych funkcií (harmonických), ktoré umožňujú aproximovať ľubovoľný signál.

Definícia:

Majme systém komplexných funkcií $f_k(n)$ *, kde*

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M-1$$
$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1$$

Tento systém je ortogonálny, ak platí:

$$\sum_{n=0}^{N-1} f_i(n) \cdot \overline{f_j(n)} = \begin{cases} 0 & \text{pre } i \neq j \\ F_k & \text{pre } i = j = k \end{cases} \tag{4.1}$$

Ak $F_k = 1$ *je systém ortonormálny.*

Ľubovoľný diskrétny signál $x(n)$ *môžeme aproximovať pomocou systému diskrétnych ortogonálnych funkcií* $f_k(n)$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{M-1} f_k(n) \cdot w_k(n) \tag{4.2}$$

pre $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1$

kde $w_k(n)$ *sú váhové koeficienty, ktoré hovoria o tom, ako sú jednotlivé ortogonálne funkcie* $f_k(n)$ *zastúpené pri aproximácii signálu* $x(n)$ *. Váhové koeficienty môžeme vypočítať pomocou rovnice*

$$w_k(n) = \frac{1}{F_k} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{f_k(n)} x(n) \tag{4.3}$$

Fourierova transformácia patrí k systémom komplexných ortogonálnych funkcií. Váhové koeficienty, získané Fourierovou transformáciou reprezentujú spektrum signálu. Vďaka týmto funkciám môžeme nielen signál analyzovať, ale umožňujú nám aj syntézu tohoto signálu.

Z teórie analógových systémov vieme, že na analýzu periodických signálov využívame Fourierove rady, ktoré vedú k diskrétnym (čiarovým) spektrám, analýza neperiodických signálov pomocou Fourierovej transformácie vedie k spojitým spektrám.

Pri analýze neperiodických diskrétnych signálov používame Fourierovu transformáciu pre diskrétne signály, ktorá je definovaná rovnicou:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\Omega n} \tag{4.4}$$

a inverzná Fourierova transformácia:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} \mathrm{d}\Omega \tag{4.5}$$

Zo vzťahov je jasné, že diskrétny neperiodický signál má spojité spektrum, ktoré je periodické s periódou 2π.

Analógiou Fourierovho radu pre spojité periodické signály je diskrétna Fourierova transformácia pre periodické diskrétne signály.