### 2.4.2 Sústavy s lineárnou fázovou charakteristikou

Nelineárna fázová charakteristika má z hľadiska ďalšieho spracovávania signálov rušivý vplyv. Rozvoj spektra, ktoré takýmto spôsobom získame, môže spôsobiť napr. nezrozumiteľnosť obrazového signálu. Aj keď zabezpečenie linearity fázovej charakteristiky je v analógových sústavách v podstate nemožné, diskrétne sústavy nám v tomto smere tieto možnosti ponúkajú. Pri nerekurzívnych sústavách (FIR) môžeme navrhnúť sústavy, ktoré v celom frekvenčnom spektre majú dokonale lineárnu fázovú charakteristiku, pričom amplitudová, resp. magnitúdová charakteristika môže vykazovať rôzne typy systémov.

Na základe poznatkov, ktoré sme získali v predchádzjúcej kapitole uvažujme, za akých podmienok rozloženia nulových bodov bude mať sústava lineárnu fázovú charakteristiku.

Vychádzajme z predpokladu jedného **reálneho nulového bodu** $z_{0k}$ . Prenosová funckia $H(z)$ má tvar:

$$H(z) = (1 - z_{0k} \cdot z^{-1}) = z^{-\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}} - z_{0k}z^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{2.77}$$

a zodpovedajúce frekvenčné charakteristiky

$$H(\Omega) = e^{-j\frac{\Omega}{2}}\left(e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}z_{0k}\right) \tag{2.78}$$

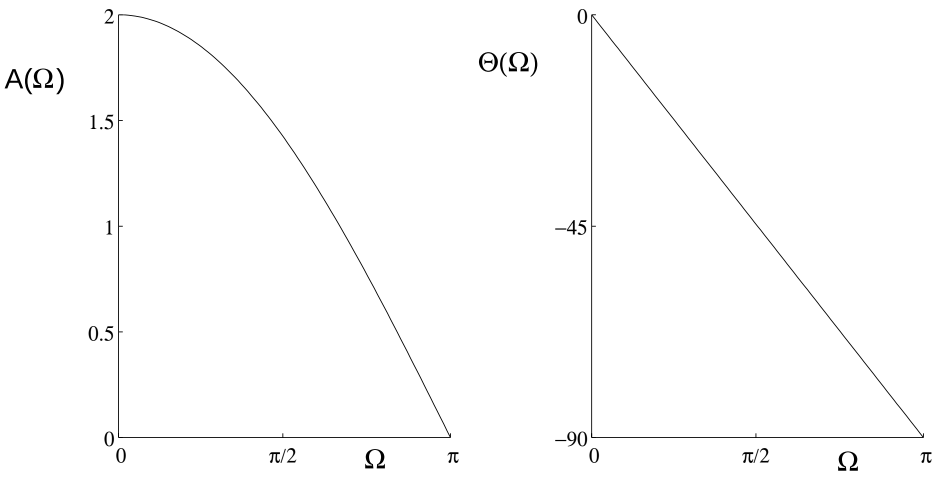
z toho vidíme, že lineárnu fázovú frekvenčnú charakteristiku dostaneme iba v prípade, že $z_{0k} = \pm 1$. Potom za predpokladu $z_{0k} = -1$, frekvenčné charakteristiky majú tvar:

$$H(\Omega) = e^{-j\frac{\Omega}{2}} 2\cos\frac{\Omega}{2} \tag{2.79}$$

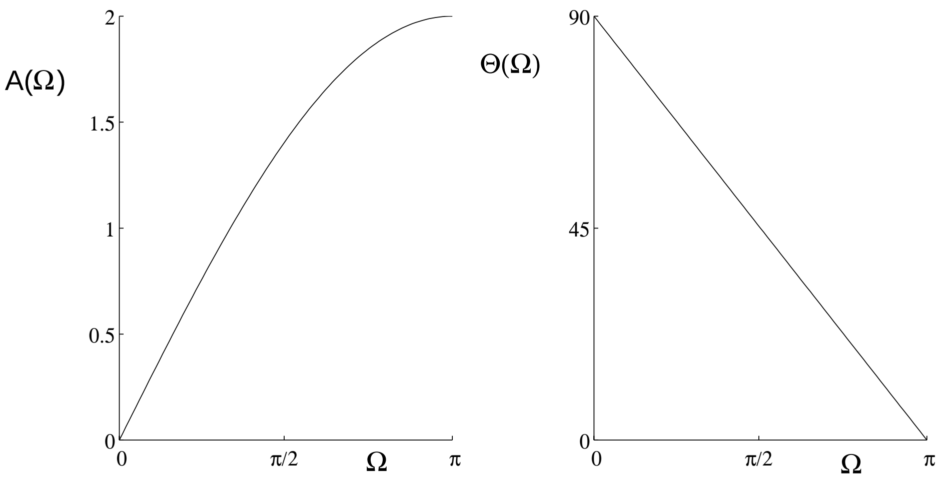
resp. ak $z_{0k} = 1$

$$H(\Omega) = j.e^{-j\frac{\Omega}{2}} 2\sin\frac{\Omega}{2} = e^{-j\left(\frac{\Omega}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} 2\cdot\sin\frac{\Omega}{2} \tag{2.80}$$

Kým amplitúdová frekvenčná charakteristika v prvom prípade má tvar $2\cdot\cos\frac{\Omega}{2}$ , v druhom prípade je to $2.\sin\frac{\Omega}{2}$. Priebehy amplitúdovej a odpovedajúcej fázovej frekvenčnej charakteristiky pre tvar (2.79) je na obr.2.18 a pre tvar (2.80) je na obr.2.19.




Obr.2.18 *Priebeh amplitúdovej a fázovej frekvenčnej charakteristiky* $z_{0k} = -1$




Obr.2.19 *Priebeh amplitúdovej a fázovej frekvenčnej charakteristiky* $z_{0k} = 1$

Ak vzťah (2.79) predstavuje prenosovú funkciu systému generujúceho impulzovu charakteristiku, potom táto za predpokladu $z_{0k} = 1$ nadobúda hodnoty:

$$\mathbf{h}(n) = \{1, 1\}$$

a v prípade, že $z_{0k} = -1$, je:

$$\mathbf{h}(n) = \{1, -1\}$$

Uvažujme dva **reálne nulové body**. Prenosová funkcia určená týmito nulovými bodmi má tvar:

$$H(z) = (1 - z_{0k1} z^{-1})(1 - z_{0k2} z^{-1}) \tag{2.89}$$

a po úprave

$$H(z) = z^{-1}(z - (z_{0k1} + z_{k02}) + z_{0k1}\, z_{0k2}\, z^{-1}) \tag{2.90}$$

Frekvenčné charakteristiky dostaneme po dosadení $z = e^{j\Omega}$

$$H(\Omega) = e^{-j\Omega}(e^{j\Omega} - (z_{0k1} + z_{0k2}) + z_{0k1}\, z_{0k2}\, e^{-j\Omega}) \tag{2.91}$$

Kým prvý činiteľ $e^{-j\Omega}$ nevplýva na amplitúdovú charakteristiku, a predstavuje lineárnu fázovú charakteristiku, výraz v zátvorke predstavuje odchýlku od linearity fázovej charakteristiky :

$$\tan \Delta\varphi = \frac{\sin\Omega - z_{0k1}\, z_{0k2} \sin\Omega}{\cos\Omega - (z_{0k1} + z_{0k2}) + z_{0k1} z_{0k2} \cos\Omega} \tag{2.92}$$

pre všetky $\Omega$ musí byť táto odchýlka rovná 0.

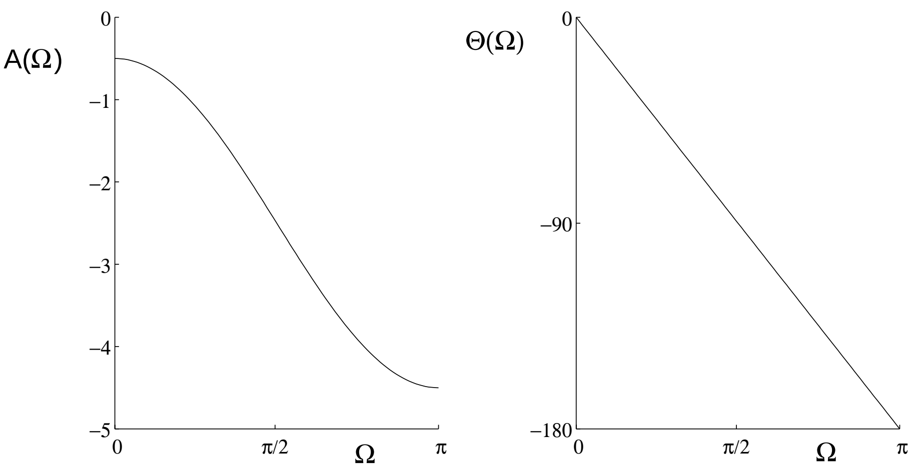
To je splnené pri podmienke

$$z_{0k1} = \frac{1}{z_{0k2}} = z_{0k} \tag{2.93}$$

Frekvenčné charakteristiky sú potom určené výrazom:

$$H(\Omega) = e^{-j\Omega}\left(2\cos\Omega - \left(z_{0k} + \frac{1}{z_{0k}}\right)\right) \tag{2.94}$$

Činiteľ v zátvorke je v celom rozsahu čisto reálny a preto fázová charakteristika má lineárny priebeh. Priebeh amplitúdovej a odpovedajúcej fázovej frekvenčnej charakteristiky je na obr.2.20




Obr.2.20 *Priebeh amplitúdovej a fázovej frekvenčnej charakteristiky $H(\Omega)$ danej vzťahom (2.94)*

Táto sústava druhého rádu generuje impulzovú charakteristiku

$$\mathbf{h}(n) = \left\{1, -\left(z_{0k} + \frac{1}{z_{0k}}\right), 1\right\}$$

Podobné úvahy platia aj pre prípad, že $z_{0k} \langle 0$.

Analogicky môžeme uvažovať **dvojicu komplexne združených nulových bodov**. Prenosová funkcia bude mať tvar:

$$H(z) = z^{-1}\left[z^1 - |z_{0k}|(e^{j\psi_{0k}} + e^{-j\psi_{0k}}) + |z_{0k}|^2 z^{-1}\right] \qquad (2.95)$$

resp. tomu odpovedajúca frekvenčná charakteristika

$$H(\Omega) = e^{-j\Omega}\left[e^{j\Omega} - |z_{0k}|(e^{j\psi_{0k}} + e^{-j\psi_{0k}}) + |z_{0k}|^2 e^{-j\Omega}\right] \qquad (2.96)$$

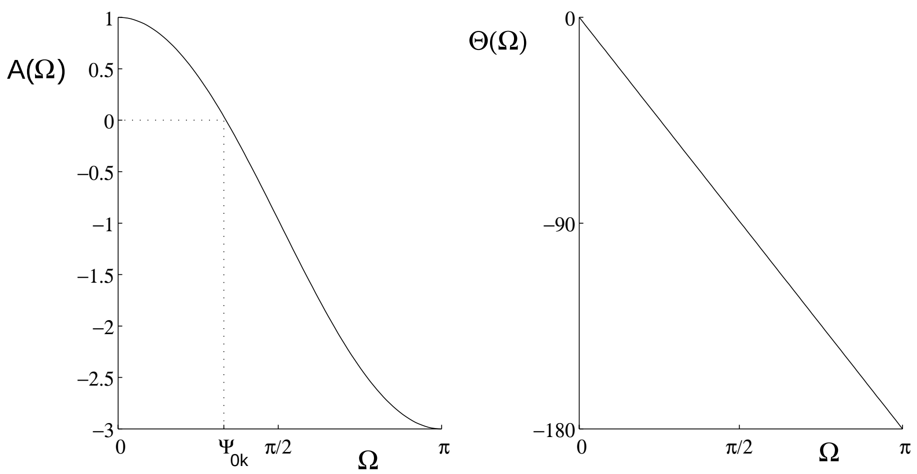
Môžeme urobiť úvahy podobné ako v predchádzajúcom prípade a dostaneme nulovú odchýlku od lineárnej fázovej charakteristiky vtedy a len vtedy, ak komplexne združené nulové body ležia na jednotkovej kružnici a rov.(2.96) bude mať tvar:

$$H(\Omega) = e^{-j\Omega} 2(\cos\Omega - \cos\psi_{0k}) \qquad (2.97)$$

a odpovedajúce priebehy amplitúdovej a fázovej frekvenčnej charakteristiky sú na obr.2.21.

Impulzová charakteristika, ktorú generuje zodpovedajúca prenosová funkcia je:

$$\mathbf{h}(n) = \{1, -2\cos\psi_{0k}, 1\} \qquad (2.98)$$




Obr.2.21 *Priebeh amplitúdovej a fázovej frekvenčnej charakteristiky $H(\Omega)$ danej vzťahom (2.97)*

Rozšírime tieto úvahy na **dve dvojice ľubovoľných komplexných nulových bodov**. Pre jednoduchšie pochopenie využime poznatky, ktoré sme odvodili pre všeobecné reálne nulové body, t.j. uvažujme dvojice komplexných nulových bodov:

$$\begin{array}{ll} |z_{0k}| \cdot e^{j\psi_{0k}} & \dfrac{1}{|z_{0k}|} \cdot e^{j\psi_{0k}} \\ |z_{0k}| \cdot e^{-j\psi_{0k}} & \frac{1}{|z_{0k}|} \cdot e^{-j\psi_{0k}} \end{array} \tag{2.99}$$

potom prenosová funkcia má tvar:

$$\begin{aligned} H(z) = 1 &- z^{-1}\left(|z_{0k}| + \tfrac{1}{|z_{0k}|}\right) \cdot 2\cos\psi_{0k} + \\ &+ z^{-2}\left(|z_{0k}|^2 + \tfrac{1}{|z_{0k}|^2} + 4\cos\psi_{0k}\right) - \\ &- z^{-3}\left(|z_{0k}| + \tfrac{1}{|z_{0k}|}\right) 2\cos\psi_{0k} + z^{-4} \end{aligned} \tag{2.100}$$

resp. tomu odpovedajúca frekvenčná charakteristika

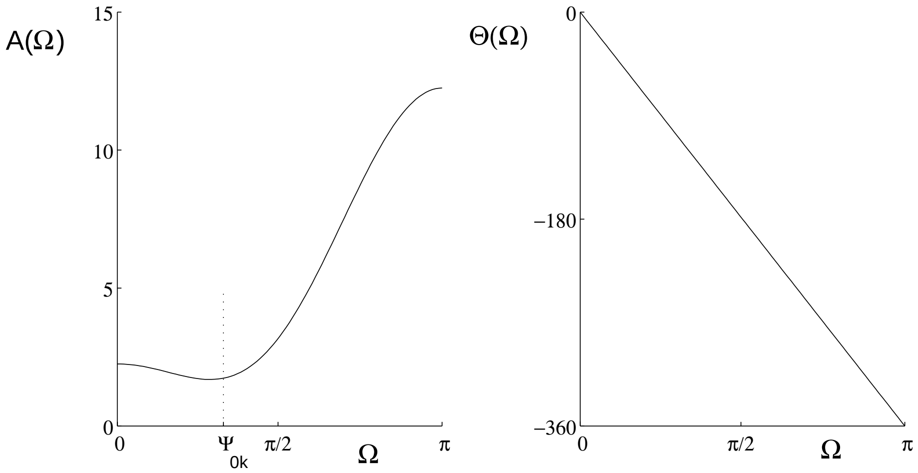
$$\begin{aligned} H(\Omega) = e^{-j2\Omega}[&2\cos 2\Omega - 4\cos\Omega \cdot \cos\psi_{0k}\left(|z_{0k}| + \tfrac{1}{|z_{0k}|}\right) + \\ &+ |z_{0k}|^2 + \tfrac{1}{|z_{0k}|^2} + 4\cos^2\psi_{0k}] \end{aligned} \tag{2.101}$$

Výraz v zátvorke je v celom rozsahu čisto reálny a fázová charakteristika je dokonale lineárna.

Priebehy amplitúdovej a fázovej frekvenčnej charakteristiky sú na obr.2.22.

Impulzová charakteristika generovaná touto sústavou nadobúda hodnoty:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(n) = \{1,\ &-2\cos\psi_{0k}\left(|z_{0k}| + \frac{1}{|z_{0k}|}\right),\ |z_{0k}|^2 + \frac{1}{|z_{0k}|^2} + 4\cos^2\psi_{0k}, \\ &-2\cos\psi_{0k}\left(|z_{0k}| + \frac{1}{|z_{0k}|}\right), 1\} \end{aligned} \tag{2.102}$$




Obr.2.22 *Amplitúdová a fázová frekvenčná charakteristika $H(\Omega)$ daná vzťahom (2.101)*

Ak zhrnieme naše poznatky, môžeme konštatovať, že neexistuje iná možnosť rozloženia nulových bodov prenosovej funkcie, ktorá by mala lineárnu fázovú charakteristiku, ako uvedené štyri typy. Je len samozrejmé, že kombináciou týchto základných typov v súčinovom tvare môžeme odvodiť prenosové funkcie, ktoré budú mať výslednú fázovú charakteristiku dokonale lineárnu v celom frekvenčnom rozsahu. Koeficienty prenosovej funkcie sú potom aj po roznásobení čisto reálne a budú vykazovať súmernosť, resp. antisúmernosť pretože aj čiastkové funkcie sú súmerné, alebo antisúmerné. Súmernosť, resp. nesúmernosť jednotlivých koeficientov je buď párna, alebo nepárna. Ak teda prenosová funkcia má tvar:

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_{N-1} z^{-(N-1)} \qquad (2.103)$$

potom súmernosť, resp. symetrickosť bude zabezpečená rovnosťou koeficientov

$$\begin{aligned} a_0 &= a_{N-1} \\ a_1 &= a_{N-2} \\ a_2 &= a_{N-3} \end{aligned} \qquad (2.104)$$

a antisúmernosť, resp. antisymetrickosť rovnosťou koeficientov

$$\begin{aligned} a_0 &= -a_{N-1} \\ a_1 &= -a_{N-2} \\ a_2 &= -a_{N-3} \end{aligned} \qquad (2.105)$$

Kým v prvom prípade hovoríme o párnej, resp. nepárnej symetrii podľa toho, či N je párne, alebo nepárne číslo , v druhom prípade hovoríme o antisymetrii párnej alebo nepárnej.

Frekvenčné charakteristiky prenosovej funkcie môžeme napísať v tvare:

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot e^{-jn\Omega} \tag{2.106}$$

resp.

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot e^{-jn\Omega} \tag{2.107}$$

a vzhľadom na periodicitu frekvenčných charakteristík s periódou $2\pi$

$$H(\Omega + 2\pi) = \sum_{n=0}^{N-1} (h(n) \cdot e^{-jn\Omega} \cdot e^{-j2\pi n}) \tag{2.108}$$

K rovnakému poznatku sa môžeme dopracovať aj nasledujúcou úvahou.

Predpokladajme úplne všeobecne prenosovú funkciu FIR systémov vyjadrenú rov.(2.103). Jej frekvenčné charakteristiky sú vyjadrené rov.(2.106), resp.rov.(2.107) a sú to všeobecne komplexné výrazy. Ak tieto rovnice porovnáme s rov.(2.50), potom prenosová funkcia systému bude mať lineárnu fázovú frekvenčnú charakteristiku iba za predpokladu, že bude platiť:

$$\Theta(\Omega) = -\tau\Omega + \Lambda \qquad \text{pre } 0 \le \Omega \le 2\pi \tag{2.109}$$

kde $\tau$ a $\Lambda$ sú reálne konštanty.

Fyzikálne $\tau$ je skupinové oneskorenie, ktoré predstavuje oneskorenie signálu cez systém a je definované:

$$\tau = -\frac{d\Theta(\Omega)}{d\Omega} \tag{2.110}$$

a ktoré je pre systémy s lineárnou fázovou charakteristikou konštantné.

Potom frekvenčné charakteristiky prenosovej funkcie vyjadrené rov.(2.50) môžeme napísať:

$$H(\Omega) = A(\Omega)\, e^{-j\tau\Omega + j\Lambda} \tag{2.111}$$

a z rov.(2.107)

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos n\Omega - j\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin n\Omega \tag{2.112}$$

a z toho fázová charakteristika systému je:

$$\tau\Omega - \Lambda = \arctan\frac{-\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin n\Omega}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos n\Omega} \tag{2.113}$$

Po úprave dostaneme:

$$\sin(\tau\Omega+\Lambda)\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos n\Omega = -\cos(\tau\Omega+\Lambda)\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin n\Omega \qquad (2.114)$$

resp.ak si rovnicu vyjadríme pomocou súčtového vzťahu:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(\Omega(\tau-n)+\Lambda) = 0 \qquad (2.115)$$

pričom je nutné si uvážiť, že rovnica musí platiť pre všetky $\Omega$.

Predpokladajme, že $\Lambda = 0$, $h(n)$ sú reálne čísla, potom riešením rov.(2.115) je

$$\tau = \frac{N-1}{2} \qquad (2.116)$$

a

$$h(n) = h(N-1-n) \qquad \text{pre všetky } 0 \le n \le N-1 \qquad (2.117a)$$

resp.

$$a_n = a_{N-1-n} \qquad (2.117b)$$

Rov.(2.117) hovoria o tom, že prenosová funkcia systému bude mať lineárnu fázovú frekvenčnú charakteristiku len vtedy, ak jej impulzová charakteristika bude súmerná (symetrická) a to pre N párne, alebo nepárne.

Iné možné riešenie je, ak $\Lambda = \pm\frac{\pi}{2}$, potom:

$$\tau = \frac{N-1}{2}$$

a

$$h(n) = -h(N-1-n) \qquad \text{pre všetky } 0 \le n \le N-1 \qquad (2.118a)$$

resp.

$$a_n = -a_{N-1-n} \qquad (2.118b)$$

čo znamená, že impulzová charakteristika systému je antisúmerná (antisymetrická), samozrejme pre N párne, aj pre N nepárne. Všetky štyri typy impulzových charakteristík systémov s lineárnou fázovou frekvenčnou charakteristikou sú uvedené na obr.5.6.

Pozrime sa ako vyzerá prenosová funkcia a impulzová charakteristika v prípade, že koeficienty sú súmerné. Predpokladajme, že $N$ je párne. Potom rov.(2.103) môžeme napísať do tvaru:

$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}}\left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a_k\cdot\left(z^{\frac{N-1}{2}-k} + z^{-\left(\frac{N-1}{2}-k\right)}\right)\right] \qquad (2.119)$$

a odpovedajúca frekvenčná charakteristika

$$H(\Omega) = e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega}\left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} 2\cdot a_k \cos\left(\frac{N-1}{2} - k\right)\Omega\right] \tag{2.120}$$

V prípade, že $N$ je nepárne, rov.(2.103) bude mať tvar:

$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}}\left\{\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}}\left[a_k\cdot\left(z^{\frac{N-1}{2}-k} + z^{-\left(\frac{N-1}{2}-k\right)}\right)\right] + a_{\frac{N-1}{2}}\right\} \tag{2.121}$$

a frekvenčná charakteristika

$$H(\Omega) = e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega}\left\{\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}}\left[2\cdot a_k\cos\left(\frac{N-1}{2} - k\right)\right] + a_{\frac{N-1}{2}}\right\} \tag{2.122}$$

Ako vidíme, výsledná amplitúdová frekvenčná charakteristika je daná superpozíciou kosínusových funkcií a fázová charakteristika je dokonale lineárna v celom frekvenčnom spektre, pričom sklon priamky je určený hodnotou $\left(\frac{N-1}{2}\right)$.

V prípade, že koeficienty sú nesúmerné a $N$ je párne, prenosová funkcia má tvar

$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}}\left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a_k\left(z^{\left(\frac{N-1}{2}-k\right)} - z^{-\left(\frac{N-1}{2}-k\right)}\right)\right] \tag{2.123}$$

a frekvenčná charakteristika

$$H(\Omega) = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\Omega - \frac{\pi}{2}\right)}\left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} 2\cdot a_k \sin\left(\frac{N-1}{2} - k\right)\Omega\right] \tag{2.124}$$

Pre $N$ nepárne

$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}}\left[\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} a_k\cdot\left(z^{\frac{N-1}{2}-k} - z^{-\left(\frac{N-1}{2}-k\right)}\right)\right] \tag{2.125}$$

a frekvenčná charakteristika

$$H(\Omega) = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\Omega - \frac{\pi}{2}\right)}\left[\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} 2\cdot a_k \sin\left(\frac{N-1}{2} - k\right)\Omega\right] \tag{2.126}$$

Výsledná amplitúdová frekvenčná charakteristika je daná superpozíciou sínusových funkcií a fázová charakteristika je lineárna. Ako vidíme zo vzťahov (2.124) a (2.126), celá je posunutá o konštantu $\Lambda = \frac{\pi}{2}$. Je len samozrejmé, že v prípade, ak $N$ je nepárne, linearita fázovej charakteristiky je zabezpečená iba za prepokladu, ak $a_{\frac{N-1}{2}}$ je rovné $0$. V niektorých aplikáciách sústav tieto podmienky pôsobia rušivo a pri návrhu musíme v týchto hraniciach zvažovať ktorá funkcia je pre ktoré sústavy výhodne použiteľná. Tieto úvahy budú zrejmejšie v 5. kapitole, kde sa využívajú pri návrhu FIR filtrov.