2.2 Prenosová funkcia

Pre nás najdôležitejšou aplikáciou transformácie Z je aplikácia na opis lineárneho diskrétneho systému lineárnou diferenčnou rovnicou N-tého rádu s konštantnými koeficientami a s pravou stranou, ktorú poznáme v tvare:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} b_k y(n-k)$$

a ktorá opisuje činnosť systému pre všetky $n = 0, 1, 2, \ldots$ Na základe vlastností opísaných v predchádzajúcej podkapitole dostaneme

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k X(z) z^{-k} - \sum_{k=1}^{N} b_k Y(z) z^{-k} \qquad (2.23a)$$

resp.

$$Y(z) = X(z) \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} - Y(z) \sum_{k=1}^{N} b_k z^{-k} \qquad (2.23b)$$

alebo po preusporiadaní

$$Y(z)\left[1 + \sum_{k=1}^{N} b_k z^{-k}\right] = X(z) \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} \qquad (2.23c)$$

Pomer obrazov výstupného a vstupného signálu je

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} b_k z^{-k}} \qquad (2.24a)$$

Takto sme získali systémovú charakteristiku diskrétnej sústavy

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_N z^{-N}} \qquad (2.24b)$$

ktorá sa nazýva prenosovou funkciou. Prenosová funkcia je racionálnou funkciou komplexnej premennej z a jej koeficienty a_k a b_k sú totožné s koeficientami diferenčnej rovnice (rov.(1.13)).

Zápis z rov.(2.24b) je všeobecný, nulovaním niektorých koeficientov môžeme meniť stupeň polynómov čitateľa, resp. menovateľa. V prípade nerovnosti stupňa čitateľa a menovateľa má prenosová funkcia tvar:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_M z^{-M}} \qquad (2.25)$$

ktorú môžeme upraviť do tvaru:

$$H(z) = z^{(M-N)} \cdot \frac{a_0 z^{N} + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \ldots + a_N}{z^M + b_1 z^{M-1} + b_2 z^{M-2} + \ldots + b_M} \qquad (2.26)$$

Po nájdení koreňov polynómov čitateľa a menovateľa $H(z)$ môžeme prenosovú funkciu napísať v tvare

$$H(z) = a_0 . z^{(M-N)} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{N} (z - z_{0k})}{\prod_{j=1}^{M} (z - z_{xj})} \tag{2.27}$$

alebo z rov.(2.25)

$$H(z) = a_0 \frac{\prod_{k=1}^{N} (1 - z_{0k} z^{-1})}{\prod_{j=1}^{M} (1 - z_{xj} z^{-1})} \tag{2.28}$$

kde z_{ok} sú nulové body a z_{xj} sú póly prenosovej funkcie $H(z)$ a sú rozložené v komplexnej z rovine. Je zrejmé, že tieto môžu byť reálne, alebo komplexne združené, ináč by koeficienty a_k, b_k neboli reálne čísla.

Význam prenosovej funkcie $H(z)$ diskrétnej sústavy je analogický významu prenosovej funkcie $H(p)$ analógovej sústavy. Pripomeňme si niektoré vlastnosti, ktoré sa úspešne dajú využiť pri syntéze a analýze systémov.

Prenosová funkcia $H(z)$ vyjadruje transformáciu Z impulzovej charakteristiky $h(n)$. Ak si totiž uvedomíme, že platí

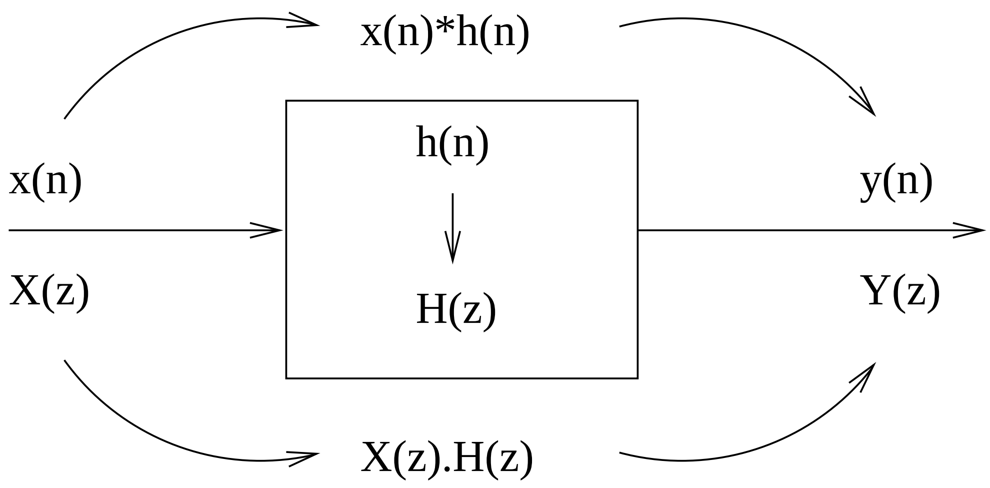
$$y(n) = h(n) * x(n)$$

a ak na základe transformácie Z a jej vlastností určíme korešpondujúce obrazy $X(z)$, $H(z)$, $Y(z)$, potom platí

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

kde

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = Z\{h(n)\} \tag{2.29}$$



Obr.2.3 *Súvis medzi vstupným, výstupným signálom a ich obrazmi*

Inými slovami, $h(n)$ a $H(z)$ sú systémové charakteristiky v dvoch rôznych oblastiach (obr.2.3).

Prenosová funkcia $H(z)$ môže byť základom pre určenie $Z\{h(n)\}$ v tzv. primitívnom tvare, ak ju rozvinieme delením od najvyšších mocnín. Ukážme si tento postup na prenosovej funkcii systému 2.rádu

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \tag{2.30}$$

$$a_0 + a_1 z^{-1} \quad + a_2 z^{-2} : 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} = a_0 + (a_1 - a_0 b_1) z^{-1} \ldots$$

$$-a_0 - a_0 b_1 z^{-1} - a_0 b_2 z^{-2}$$

$$(a_1 - a_0 b_1) z^{-1} + (a_2 - a_0 b_2) z^{-2}$$

$$-(a_1 - a_0 b_1) z^{-1} - b_1 (a_1 - a_0 b_1) z^{-2} - b_2 (a_1 - a_0 b_1) z^{-3}$$

$$(a_2 - a_0 b_2 - a_1 b_1 + a_0 b_1) z^{-2} - b_2 (a_1 - a_0 b_1) z^{-3}$$

Z príkladu je zrejmé, že delenie nemá koniec, sústava je totiž typu IIR. Môžeme preto konštatovať, že $H(z)$, vyjadrená racionálnou funkciou je kompaktnejšia ako jej opis v primitívnom tvare. Týmto spôsobom môžeme ale z ľubovoľnej prenosovej funkcie $H(z)$ vypočítať prvých N vzoriek impulzovej charakteristiky.

Hlbšie poznatky o nulových bodoch a póloch prenosovej funkcie môžu byť dobrým základom pre návrh systému s predpísanými vlastnosťami.

Prenosová funkcia je veľmi výhodným základom pre odvodzovanie rôznych rovnocenných modelov LDKI systémov.

Po dosadení za premennú $z = r.e^{j\Omega}$, kde $r = 1$ určuje prenosová funkcia frekvenčné charakteristiky systému, ktoré sú veľmi dôležité pri formulovaní požiadaviek na systém vo frekvenčnej oblasti.

Príklady 2.2 - 2.4