Optimalizačná metóda návrhu FIR filtrov

Praktická ukážka

Vypracoval: Peter Dvorský

Postup:

1. Určenie polohy extrémov v chybovej funkcii

   $T_0=\{\Omega_1 , \Omega_2 ,\dots ,\Omega_{r+1} , \}$

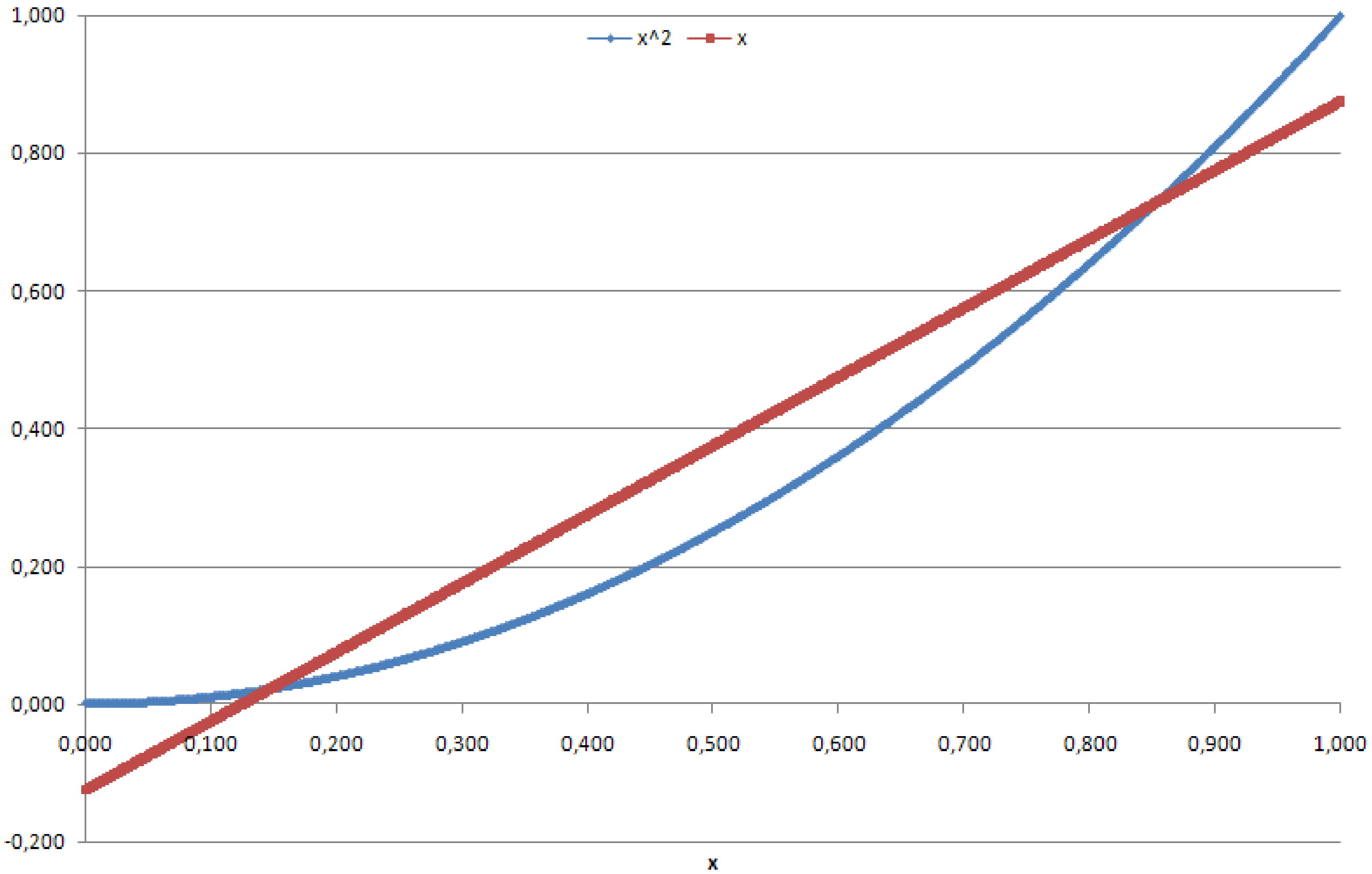
2. Vyriešenie sústav rovníc pre danú iteráciu δ_i

3. Vypočítať A(Ω)   (spojité, alebo aspoň 10x hustejšie)

4. Zistiť kde je chyba $E(x) > \delta_i$

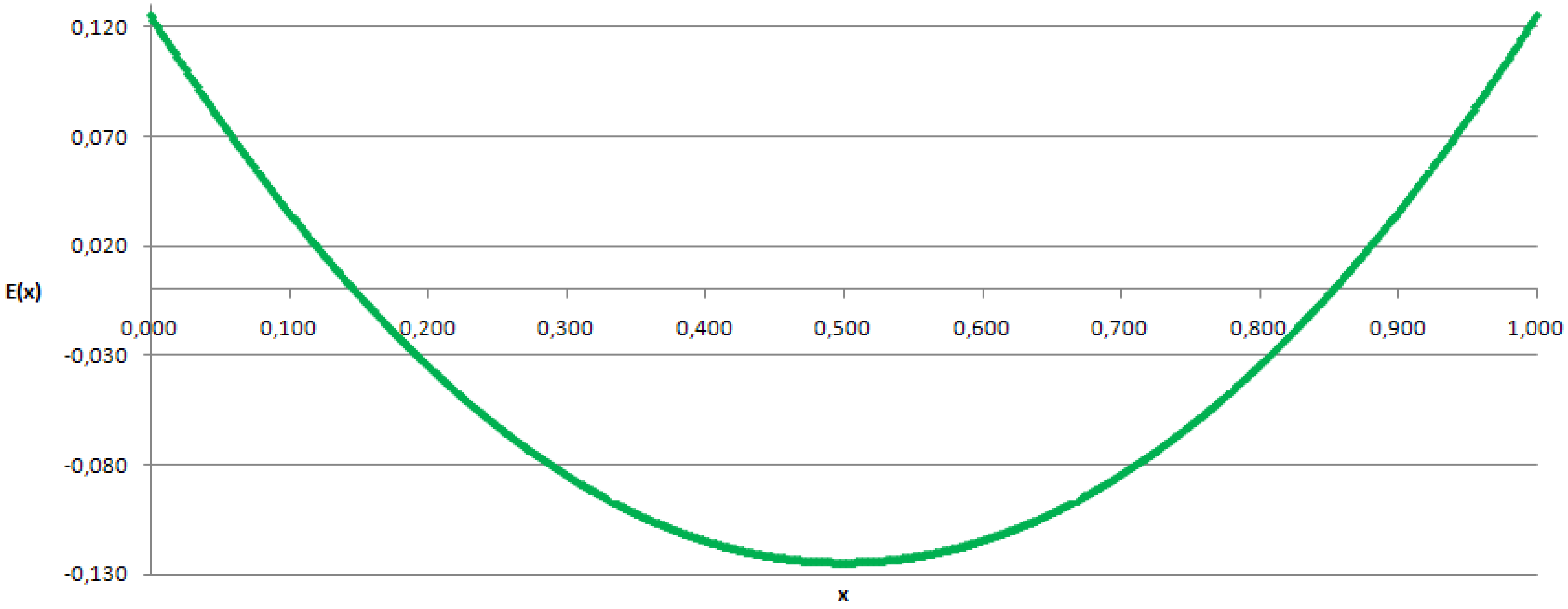
   - *ak* $|\max\{E(x)\}| = |\delta_i|$ *-> koniec*
   - *inak* *-> nájdenie novej množiny* T_i

PR: Funkciu $\mathbf{x^2}$ sa snažíme aproximovať pomocou lineárnej funkcie na intervale $x \varepsilon \langle 0,1 \rangle$.



Ideálna chybová funkcia :

$$E(x) = x^2 - (d_0 + d_1 . x)$$



Ukážka zostavenia rovníc :

$$x_m{}^2 = a.d_0 + d_1.x_m + (-1)^m.\delta_0$$

$$\begin{bmatrix} a & x_1 & (-1)^1 \\ a & x_2 & (-1)^2 \\ a & x_3 & (-1)^3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \delta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1)^2 \\ (x_2)^2 \\ (x_{3)}{}^2 \end{bmatrix}$$

V našom prípade máme tri rovnice o troch neznámych:

$$a.d_0 + d_1.x_1 + (-1)^1.\delta_0 = (x_1)^2$$

$$a.d_0 + d_1.x_2 + (-1)^2.\delta_0 = (x_2)^2$$

$$a.d_0 + d_1.x_3 + (-1)^3.\delta_0 = (x_3)^2$$

1. aproximácia

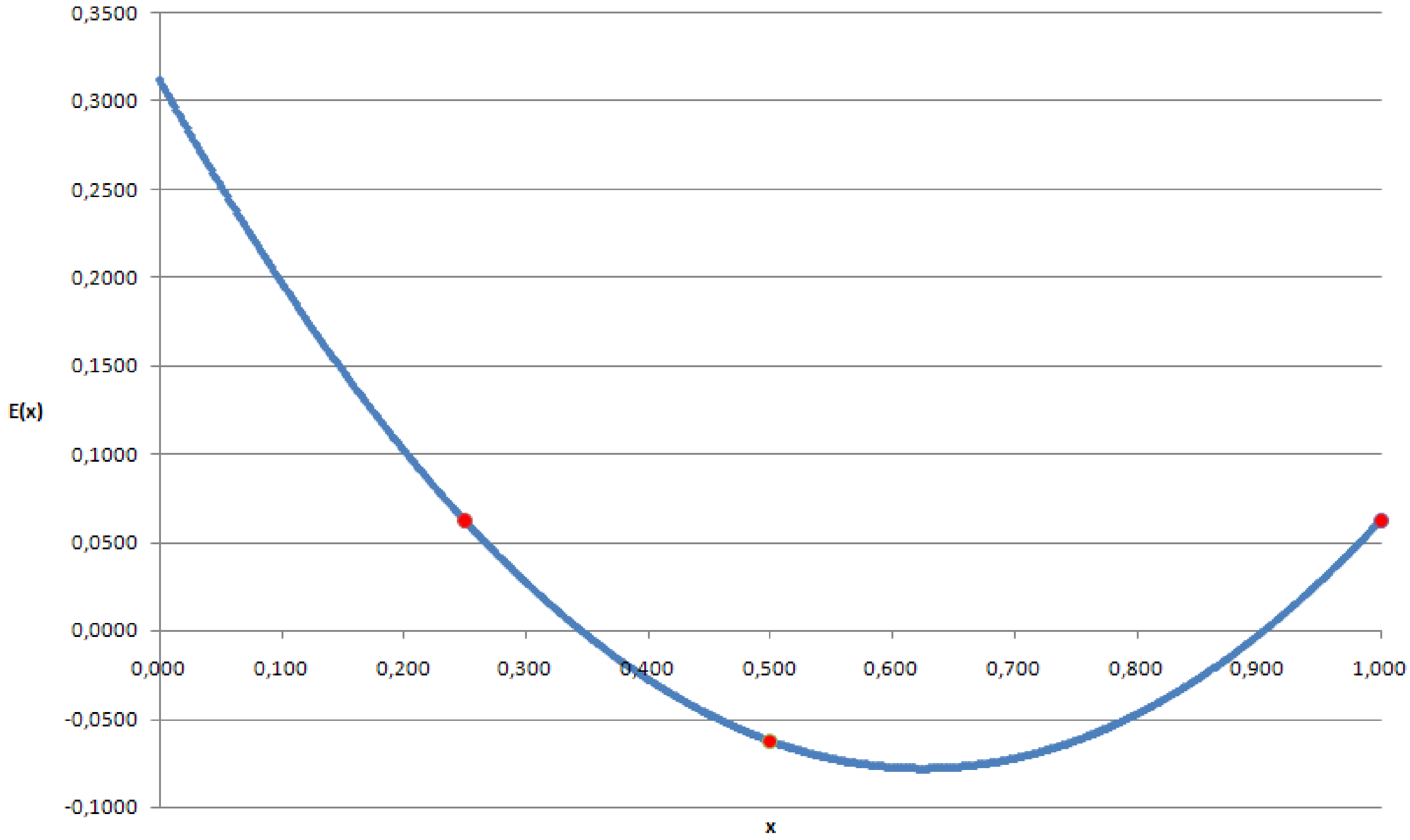
- Určíme si body, kde sa nachádzajú extrémy chybovej funkcii.
- V našom prípade si zoberieme $T_0=\{0,25 ; 0,5 ; 1,0\}$, *pričom z grafu ideálnej chybovej funkcii vidíme, že extrémy sa v skutočnosti nachádzajú v bodoch :*

  $T=\{0 ; 0,5 ; 1,0\}$
- Z toho vyplýva, že bude potrebné viacero aproximácii pre dostavenie sa do tejto polohy

T_0={0,25 ; 0,5 ; 1,0}

- $X_m^{\,2} = d_0 + d_1.x_m + (-1)^m.\ \delta_1$ $\quad$ m=0,1,2
- Neznáme : d_0 ; d_1 ; δ_0
- Riešime sústavu rovníc : $$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}25 & 1 \\ 1 & 0{,}5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \delta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0625 \\ 0{,}25 \\ 1{,}0 \end{bmatrix}$$
- Výsledok : $$d_0 = -\frac{5}{16}$$ $$d_1 = +\frac{5}{4}$$ $$\delta_0 = +\frac{1}{16}$$

$E_0(x) = x^2 - (-\frac{5}{16} + \frac{5}{4}.x)$ $\max\{E_0(x)\} \stackrel{?}{=} \delta_0$



- Nové extrémy -> T_1=*{0 ; 0,625 ; 1,0}*

2. aproximácia

Keďže $E_0(x)$ je väčšie ako δ_0, pokračujeme v aproximácii:

- Určíme si body, kde sa nachádzajú nové extrémy chybovej funkcii.
- Body, kde sa nachádzajú extrémy zistíme deriváciou chybovej funkcii a položením tejto rovnice 0.
- V našom prípade nové extrémy sú v týchto bodoch:

  $T_1=\{0 ; 0,625 ; 1,0\}$

T_1={0 ; 0,625 ; 1,0}

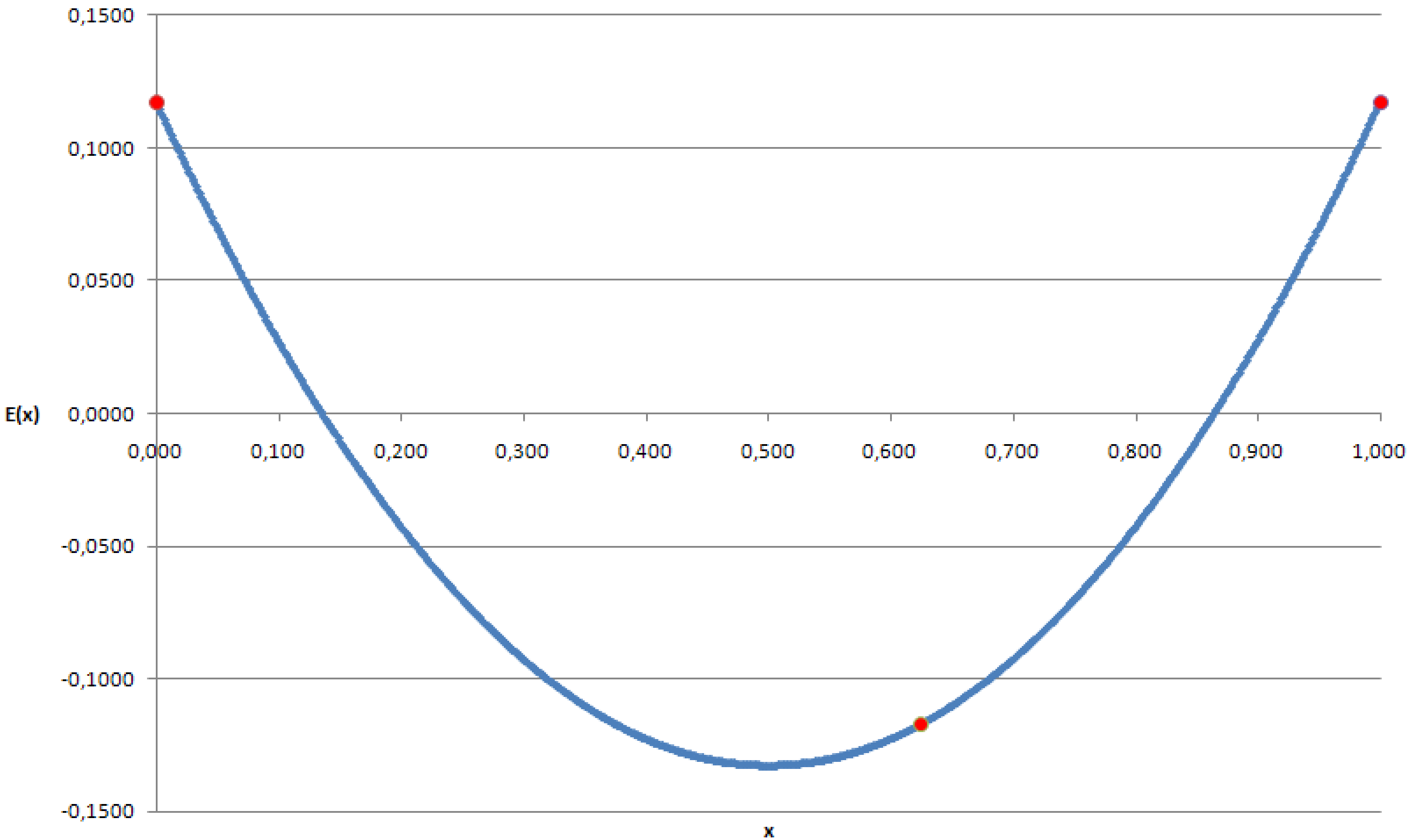
- $X_m^{\,2} = d_0 + d_1 . x_m + (-1)^m . \delta_1$ m=0,1,2
- Neznáme : d_0 ; d_1 ; δ_1
- Riešime sústavu rovníc : $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0{,}625 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \delta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}3906255 \\ 1{,}0 \end{bmatrix}$$
- Výsledok : $$d_0 = -\frac{15}{128}$$

$$d_1 = +1$$

$$\delta_1 = +\frac{15}{128}$$

$$E_1(x) = x^2 - \left(-\frac{15}{128} + x\right)$$

$$\max\{E_1(x)\} \stackrel{?}{=} \delta_1$$



- Nové extrémy -> $T_2=\{0\ ;\ 0,5\ ;\ 1,0\}$

3. aproximácia

Keďže $E_1(x)$ je väčšie ako δ_1 , pokračujeme v aproximácii:

- Určíme si body, kde sa nachádzajú nové extrémy chybovej funkcii.
- Body, kde sa nachádzajú extrémy zistíme deriváciou chybovej funkcii a položením tejto rovnice 0.
- V našom prípade nové extrémy sú v týchto bodoch:

  $T_2=\{0 ; 0, 5 ; 1,0\}$

T_2={0 ; 0, 5 ; 1,0}

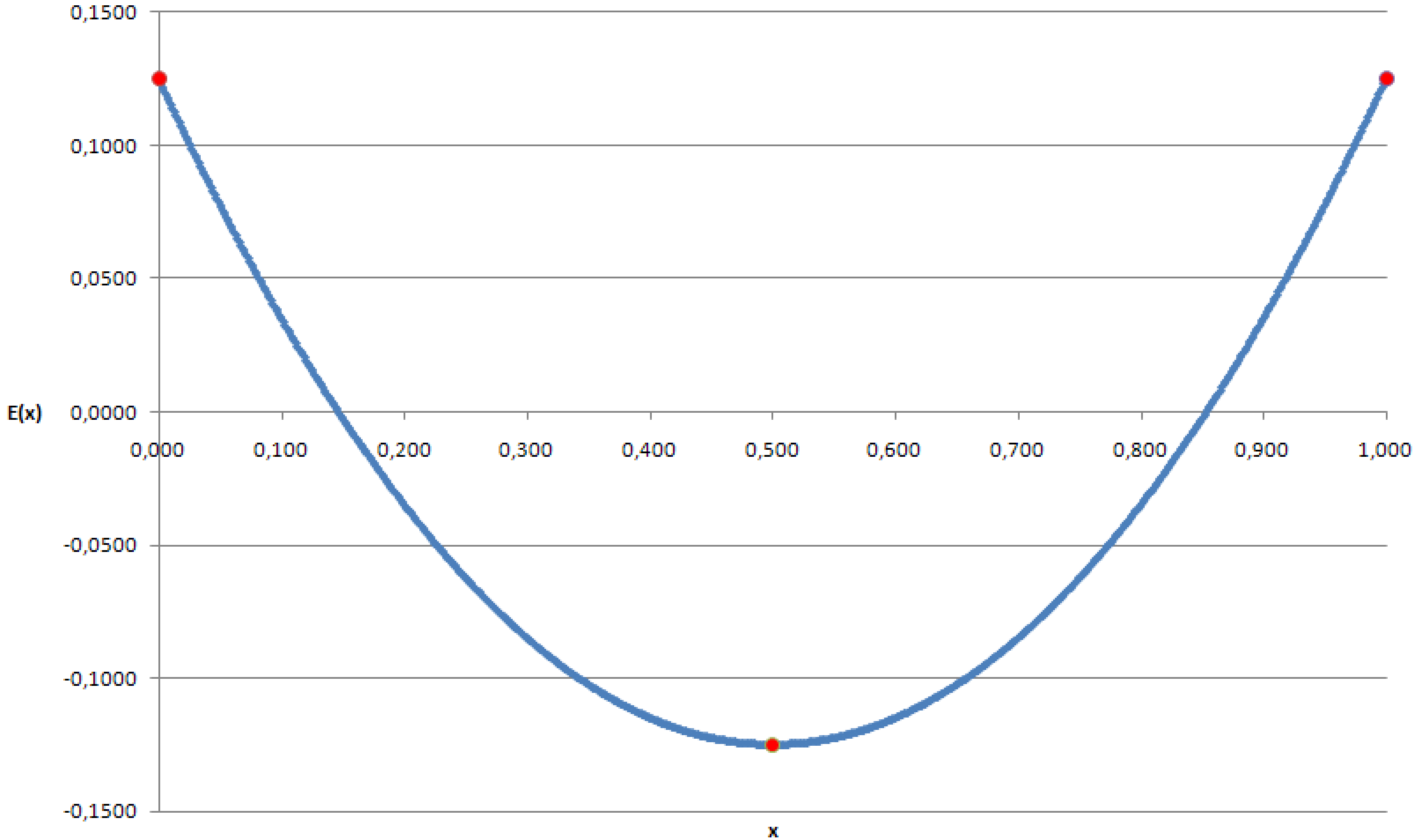
- $X_m^{\,2} = d_0 + d_1.x_m + (-1)^m.\ \delta_2$ m=0,1,2
- Neznáme : d_0 ; d_1 ; δ_2
- Riešime sústavu rovníc : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0,5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \delta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,25 \\ 1,0 \end{bmatrix}$
- Výsledok : $d_0 = -\frac{1}{8}$

$$d_1 = +1$$

$$\delta_2 = +\frac{1}{8}$$

$$E_2(x) = x^2 - (-\frac{1}{8} + x)$$

$$\max\{E_2(x)\} \stackrel{?}{=} \delta_2$$



Výsledok:

Keďže $E_2(x)$ je zhodné s δ_2 , už nepokračujeme v aproximácii.

- Výsledné body, kde sa nachádzajú extrémy : *0 ; 0,5 ; 1,0*
- Veľkosť chyby = $\delta_2 = \pm 1/8$

<u>Musí platiť :</u>

- $\delta_0 < \delta_1 < \delta_2$
- $\max\{E_0(x)\} > \max\{E_1(x)\} > \max\{E_2(x)\}$