IIR SÚSTAVY

OVERENIE STABILITY IIR SÚSTAVY
STABILIZÁCIA IIR SÚSTAVY

Ľuboš Javorček

IIR Sústavy

- sú definované:

  - diferenčnou rovnicou:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k . x(n-k) - \sum_{k=1}^{N-1} b_k . y(n-k)$$

  - prenosovou funkciou

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k . z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N-1} b_k . z^{-k}}$$

IIR Sústavy – overovanie stability

- možnosti overenia stability:

  - **a)** privedenie kronekerovho impulzu na vstup sústavy
  - **b)** výpočet koreňov menovateľa (póly)
  - **c)** výpočet podielu čitateľ / menovateľ prenosovej funkcie

- body a) a c) sú vlastne výpočet impulzovej charakteristiky našej sústavy (z ktorej zároveň aj vidíme, či sa jedná o IIR sústavu)

IIR Sústavy – overovanie stability

Príklad:

- diferenčná rovnica:

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + 2x(n-2) + 4y(n-1) - 8y(n-2)$$

- z diferenčnej rovnice po úprave dostaneme prenosovú funkciu:

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 4z^{-1} + 8z^{-2}}$$

IIR Sústavy – overovanie stability

- a) privedenie kronekerovho impulzu na vstup sústavy => x(n)=[1 0 0 0 0 0 ...], na výstupe dostaneme h(n)

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + 2x(n-2) + 4y(n-1) - 8y(n-2)$$

$y(0)= x(0)= 1$

$y(1)= - 2.x(0) + 4.y(0) = - 2 + 4 = 2$

$y(2)= 2.x(0) + 4.y(1) – 8.y(0) = 2 + 8 – 8 = 2$

$y(3)= 4.y(2) – 8.y(1) = 8 - 16 = -8$

$y(4)= 4.y(3) – 8.y(2) = -32 – 16 = -48$

....

- jedná sa o IIR sústavu (h(n) nemá konečný počet nenulových hodnôt) a tiež je sústava nestabilná, pretože súčet všetkých vzoriek h(n) nie je konečné číslo, lebo veľkosť vzoriek má tendenciu rásť

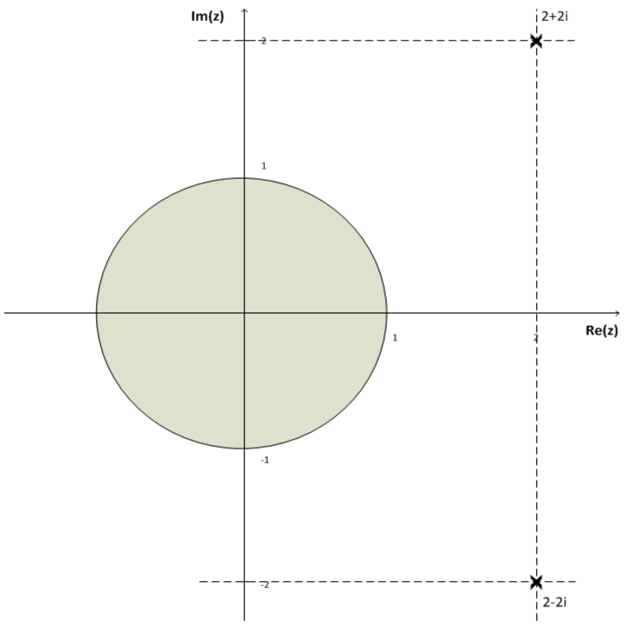
IIR Sústavy – overovanie stability

- b) výpočet koreňov menovateľa (póly)
- poloha koreňov čitateľa (núl) je z hľadiska systému stability nezaujímavá

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2}$$

$$x_1 = 2 + 2i$$

$$x_2 = 2 - 2i$$



- každá sústava, ktorá obsahuje póly je typu IIR a ak ležia póly mimo jednotkovej kružnice je zároveň aj nestabilná

IIR Sústavy – overovanie stability

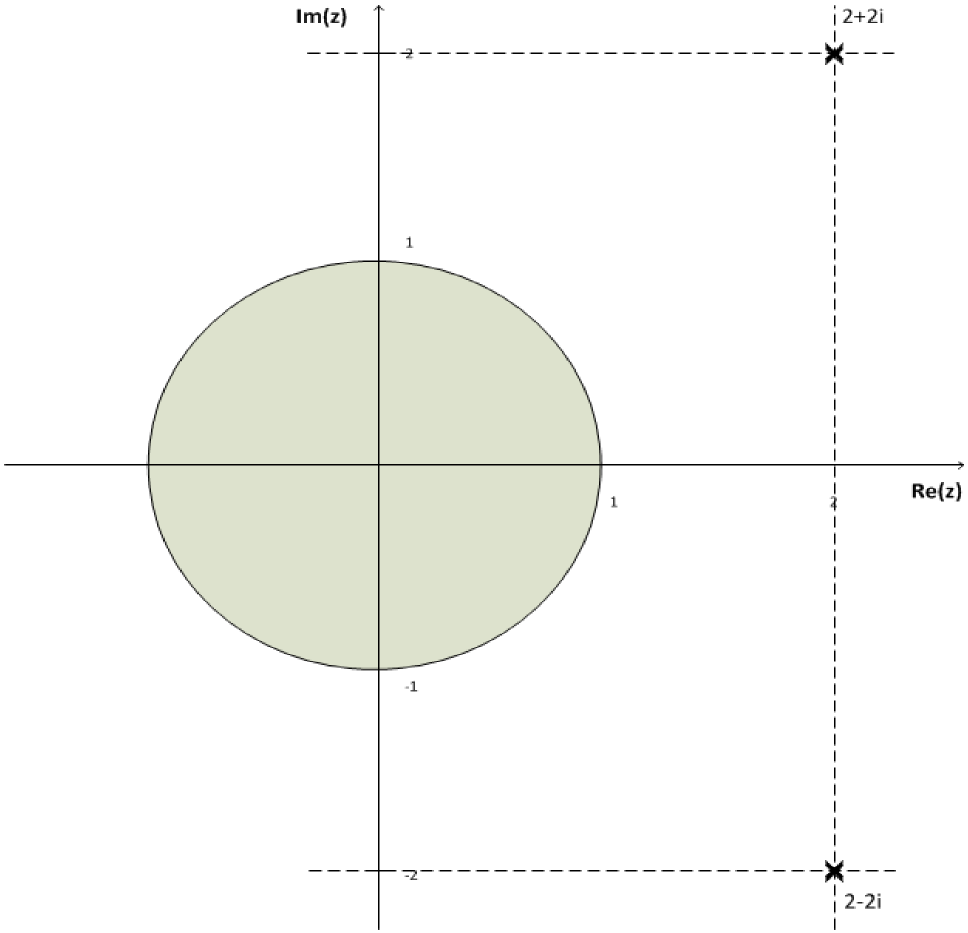
- c) výpočet podielu čitateľ / menovateľ prenosovej funkcie - podiel je zároveň impulzová odozva sústavy h(n) po Z-transformácii. Teda h(n) tvoria koeficienty po delení.

$$(1-2z^{-1}+2z^{-2}):(1-4z^{-1}+8z^{-2}) = 1+2z^{-1}+2z^{-2}-8z^{-3}\ldots$$

- delenie bezo zvyšku nie je možné, preto je sústava IIR
- hodnoty koeficientov sa neustále zvyšujú, preto je sústava zároveň aj nestabilná

IIR Sústavy - stabilizácia

- podľa rozloženia pólov je možné vidieť, že sústava je nestabilná, preto dôjde k jej rozkmitaniu, sústavu je preto nevyhnutné stabilizovať



IIR Sústavy - stabilizácia

Metóda fázovacích článkov:

- využitie pri stabilizácii nestabilných sústav
- póly nachádzajúce sa mimo jednotkovej kružnice je možné nahradiť vhodnými pólmi nachádzajúcimi sa v jej vnútri

NEVÝHODY:

- nemožnosť stabilizovať póly nachádzajúce sa na jednotkovej kružnici (sústava na hranici stability)
- nemožnosť stabilizovať póly nachádzajúce sa blízko jednotkovej kružnice (0.9<abs(nestabilného koreňa)<1.1)

IIR Sústavy - stabilizácia

- metóda fázovacích článkov:

$$\widehat{H}(z) = H(z).H_s(z)$$

$\widehat{H}(z) = výsledná\ stabilizovaná\ sústava$

$H(z) = pôvodna\ nestabilná\ sústava$

$H_s(z) = \ fázovací\ článok, použitý\ na\ stabilizáciu\ sústavy$

- čitateľ $H_s(z)$ obsahuje nuly, ktoré sú rovnaké ako nestabilné póly
- menovateľ $H_s(z)$ obsahuje stabilizované póly, ktoré sa použijú ako náhrada za pôvodne nestabilné póly

IIR Sústavy - stabilizácia

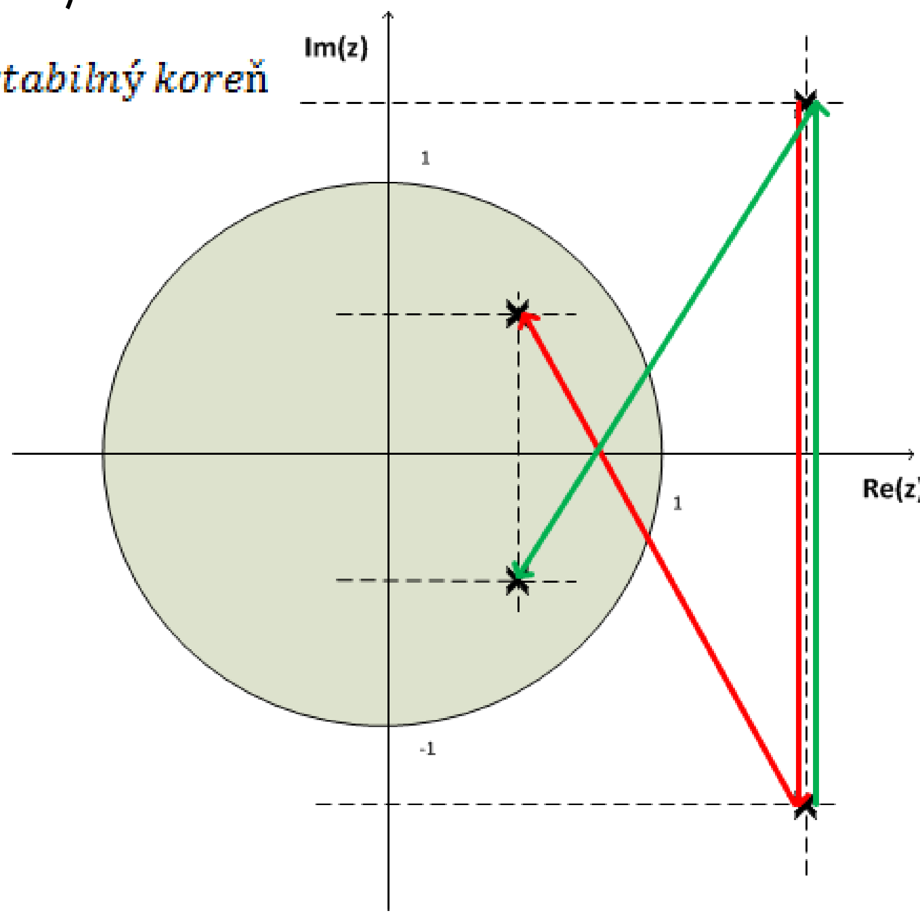
- **výpočet hodnôt stabilných koreňov :**

(2 komplexne združené korene)

$\overline{z_{nx}}$ – *komplexne združený nestabilný koreň*

z_{sx} – *stabilný koreň*

$$z_{sx} = \frac{1}{\overline{z_{nx}}}$$



IIR Filtre - stabilizácia

Príklad (pokračovanie):

$z_{n1} = 2 + 2i$

$z_{n2} = 2 - 2i$

$$z_{s1} = \frac{1}{2+2i} = \frac{1}{4} - \frac{1i}{4}$$

$$z_{s2} = \frac{1}{2-2i} = \frac{1}{4} + \frac{1i}{4}$$

$$k = \prod_{i=1}^{u} |z_{ni}| => k = \left(\sqrt{4+4}\right).\left(\sqrt{4+4}\right) = \sqrt{8}.\sqrt{8} = 8$$

$$H_s(z) = \frac{1}{k}.\frac{(1-(2+2i)z^{-1}).(1-(2-2i)z^{-1})}{\left(1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)z^{-1}\right).\left(1-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\right)z^{-1}\right)}$$

IIR Filtre - stabilizácia

$$H_s(z) = \frac{1}{8}.\frac{(1-(2+2i)z^{-1}).(1-(2-2i)z^{-1})}{\left(1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)z^{-1}\right).\left(1-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\right)z^{-1}\right)}$$

$$\widehat{H}(z) = H(z).H_s(z)$$

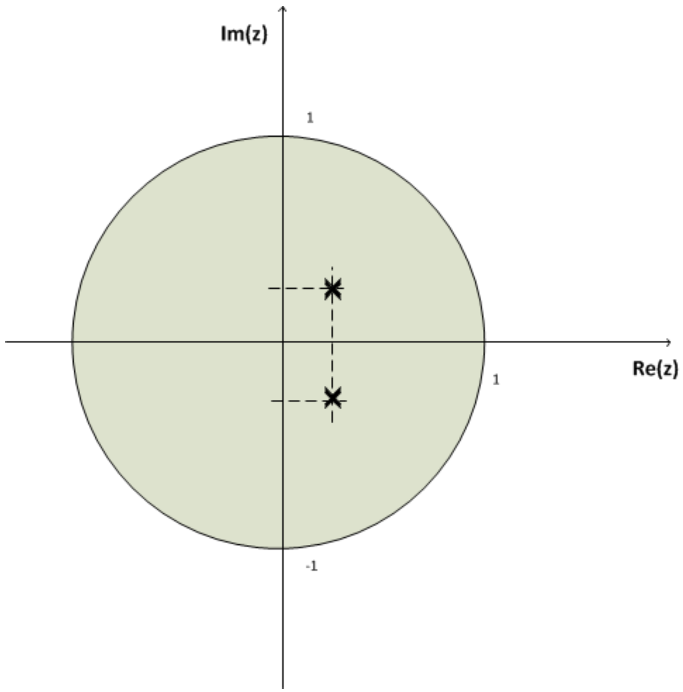
$$\widehat{H}(z) = \frac{(1-(1-i)z^{-1}).(1-(1-i)z^{-1})}{(1-(2+2i)z^{-1}).(1-(2-2i)z^{-1})}.\frac{1}{8}.\frac{(1-(2+2i)z^{-1}).(1-(2-2i)z^{-1})}{\left(1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)z^{-1}\right).\left(1-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\right)z^{-1}\right)}$$

$$\widehat{H}(z) = \frac{1}{8}.\frac{(1-(1-i)z^{-1}).(1-(1-i)z^{-1})}{\left(1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)z^{-1}\right).\left(1-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\right)z^{-1}\right)} = \frac{1}{8}.\frac{1-2z^{-1}+2z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

IIR Filtre - stabilizácia

Výsledná stabilizovaná sústava:

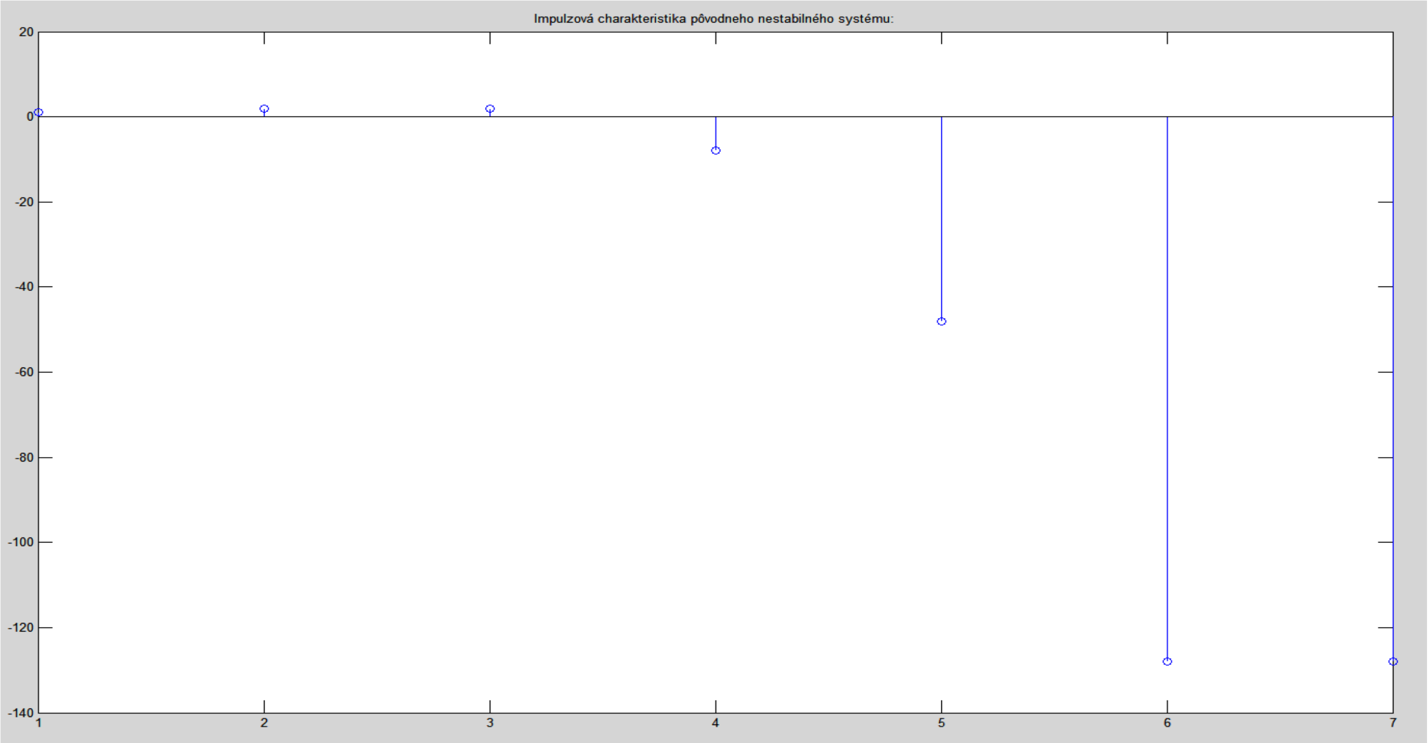
$$\widehat{H}(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2}}{8 - 4z^{-1} + 1z^{-2}}$$



- to, že sústava je nestabilná je možne vidieť na impulzovej charakteristike sústavy, čo je aj zobrazené na nasledujúcich dvoch obrázkoch

IIR Filtre - stabilizácia

- príklad nestabilnej impulzovej charakteristiky (charakteristika nestabilnej sústavy z predchádzajúceho príkladu)
- na danom obrázku je možné vidieť, že hodnoty impulzovej charakteristiky sústavy neustále narastajú, sústava sa teda rozkmitá



IIR Filtre - stabilizácia

- príklad stabilnej impulzovej charakteristiky (sústava z predchádzajúceho príkladu stabilizovaná metódou fázovacích článkov):
- na danom obrázku je možné vidieť, že sústava sa ustáli, nedôjde k jej rozkmitaniu