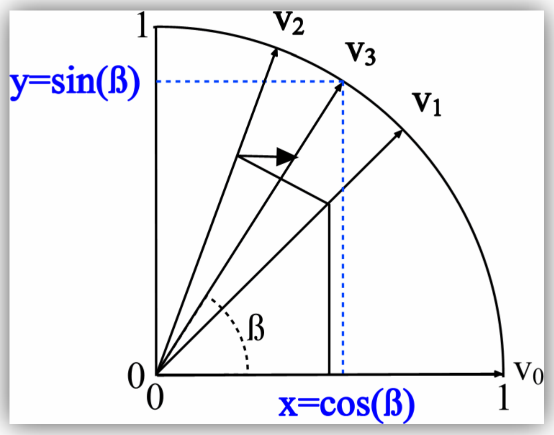
Vypracoval: Peter Leššo

CORDIC

(**CO**ordinate **R**otation **DI**gital **C**omputer)

- Je jednoduchý a účinný algoritmus na výpočet hyperbolických a goniometrických funkcií
- Vyžaduje jednoduché operácie ako sú sčítanie, odčítanie, bitový posun doprava a doľava, porovnávanie dvoch hodnôt
- Je to iteratívna metóda, ktorá má dopredu stanovený počet iterácií
- CORDIC je možné použiť vo výpočtoch rôznych goniometrických funkcií (*arctan(x), arcsin(x), arcos(x)…*) ale aj pre výpočet dĺžku vektora a jeho rýchlosť rotácií o ľubovoľný uhol, transformáciu bodu alebo vektora z polárnych súradníc do karteziánskych súradníc bez použitia násobičiek a deličiek
- CORDIC sa dá použiť vo všetkých číslicových systémoch, kde je potrebné šetriť logickými hradlami, kapacitu obsadenej pamäte
- CORDIC bol implementovaný napr. do kalkulačiek, osembitových mikroradičov, osembitových počítačoch a v niektorých matematických koprocesoroch (FPU) čím sa znížil počet hradiel nutných pre implementáciu goniometrických, hyperbolických a logaritmických funkcií

Rotácia vektoru *v* okolo počiatku súradnicového systému pre algoritmus CORDIC



Princíp algoritmu CORDIC vychádza z vyjadrenia rotácie vektora o určitý uhol δ. Vektor v, ktorým budeme rotovať, môže byť vyjadrený pomocou súradníc [x0, y0]

$$x_0 = v\cos\varphi$$

$$y_0 = v \sin \varphi$$

Kde v predstavuje veľkosť vektora *v* a φ je uhol vektora meraný od kladne horizontálnej poloosi súradnicového systému. Keď vektor v bude rotovať o uhol δ, zmenší sa koncový bod vektora tak, Že bude ležať na kružnici o polomere v, ale uhol vektora sa zväčši o δ.

$$x_v = v \cos(\varphi + \delta)$$

$$y_v = v \sin(\varphi + \delta)$$

Keď si tieto vzorce rozpíšeme, dostaneme:

$$x_v = v(\cos \varphi \cos \delta - \sin \varphi \sin \delta) = x_0 \cos \delta - y_0 \sin \delta$$

$$y_v = v(\sin \varphi \cos \delta + \cos \varphi \sin \delta) = x_0 \sin \delta + y_0 \cos \delta$$

Pre účel algoritmu CORDIC sa tento vzťah ďalej upravuje. Obidve rovnice vydelíme hodnotou *cosδ* a dostaneme:

$$x_v / \cos \delta = x_0 - y_0 \sin \delta / \cos \delta$$

$$y_v / \cos \delta = x_0 \sin \delta / \cos \delta + y_0$$

Ďalej dostaneme:

$$x_v / \cos \delta = x_0 - y_0 \tan \delta$$

$$y_v / \cos \delta = x_0 \tan \delta + y_0$$

A nakoniec dostaneme:

$$x_v = \cos \delta \, (x_0 - y_0 \tan \delta)$$

$$y_v = \cos \delta \, (y_0 + x_0 \tan \delta)$$

Pokiaľ budeme voliť uhol δ takým spôsobom, aby jeho hodnota nadobúdala hodnotu 2^{-i} (pre i>0), môžeme tanδ nahradiť násobením zvolenou hodnotou 2^{-i}. V tomto prípade môžeme násobenie nahradiť jednoduchým bitovým posunom. Obmedzenie hodnoty tanδ na zvolenú sadu hodnôt však znamená, že sa vektor nemôže pohybovať o ľubovoľný uhol, ale iba o uhol zodpovedajúci zo sady. To však nie je problém, pretože pohyb o ľubovoľný uhol je možné zapísať pomocou série rotácií (doprava alebo doľava). Hodnotu cosδ môžeme nahradiť konštantou K_i, pretože platí $\cos \delta = -\cos \delta$. A namiesto tanδ dosadíme 2^{-i} a pomocou parametru d_i smer rotácie (parameter d_i nadobúda hodnoty iba +1 a -1):

$$x_v = K_i \left(x_0 - y_0 d_i 2^{-i} \right)$$

$$y_v = K_i \left(y_0 + x_0 d_i 2^{-i} \right)$$

A pre konštantu K_i platí:

$$K_i = \cos\left(\tan^{-1} 2^{-i}\right) = 1/\left(1 + 2^{-2i}\right)^{1/2}$$

Limita súčinu hodnôt K_i po nekonečne veľa iteráciách sa blíži k hodnote **0,6073**.

Príklad:

$\sqrt{ab}$ cez CORDIC

$\sqrt{12} = \sqrt{4 * 3} = 3{,}4641$ => a=4, b=3

N=7

$v = \frac{a+b}{2} = \frac{4+3}{2} = 3{,}5$

$p = \frac{a-b}{2} = \frac{4-3}{2} = 0{,}5$

$\tan \alpha_k = 2^{-k}$

k	$\tan \alpha_k$	α_k [°]
0	1	45
1	$\frac{1}{2}$	26,56
2	$\frac{1}{4}$	14,03624
3	$\frac{1}{8}$	7,12501
4	$\frac{1}{16}$	3,57633
5	$\frac{1}{32}$	1,789910
6	$\frac{1}{64}$	0,895173

$$k_n = \prod \cos \alpha_k = 0{,}6073$$

$$x_k = x_{k-1} \mp y_{k-1} \tan(\propto_{k-1})$$

$$y_k = y_{k-1} \pm x_{k-1} \tan(\propto_{k-1})$$

$Q_0 = vk_n = 3{,}5 \times 0{,}6073 = 2{,}12555$ => $x_0 = 2{,}12555$

$y_0 = 0$

$Q_1 = x_1 + jy_1 = 2{,}12555 \mp j0 + j(0 \pm 2{,}1255 \tan \alpha_0) = 2{,}12555 + j2{,}12555$

$$x_k \Rightarrow p$$

$$2{,}12555 > 0{,}5 \;\Rightarrow (-)$$

$Q_2 = x_2 + jy_2 = (2{,}12555 \mp 2{,}12555 \tan \alpha_1) + j(2{,}12555 \pm 2{,}12555 \tan \alpha_1) = 1{,}063 + j3{,}189$

$$1{,}063 > 0{,}5 \;\Rightarrow (-)$$

$Q_3 = x_3 + jy_3 = (1{,}063 \mp 3{,}189 \tan \alpha_2) + j(3{,}189 \pm 1{,}063 \tan \alpha_2) = 0{,}26575 + j3{,}45475$

$$0{,}26575 < 0{,}5 \;\Rightarrow (+)$$

$Q_4 = x_4 + jy_4 = (0{,}26575 \mp 3{,}45475 \tan \alpha_3) + j(3{,}45475 \pm 0{,}26575 \tan \alpha_3) = 0{,}6976 + j3{,}4213125$

$$0{,}6976 > 0{,}5 \;\Rightarrow (-)$$

$Q_5 = x_5 + jy_5 = (0{,}6976 \mp 3{,}4213125 \tan \alpha_4) + j(3{,}4213125 \pm 0{,}6976 \tan \alpha_4) = 0{,}48349 + j3{,}465$

$$0{,}48349 < 0{,}5 \;\Rightarrow (+)$$

$Q_6 = x_6 + jy_6 = (0{,}48349 \mp 3{,}465 \tan \alpha_5) + j(3{,}465 \pm 0{,}48349 \tan \alpha_5) = 0{,}59181 + j3{,}4499$