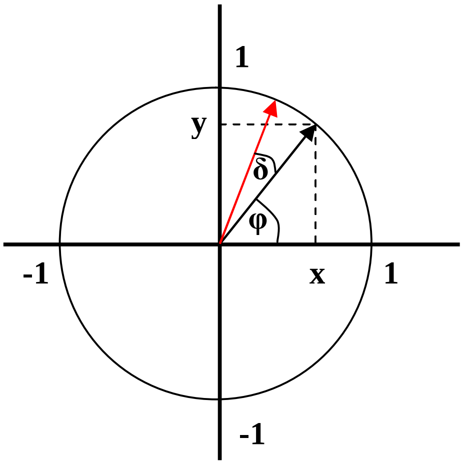
Algoritmus CORDIC

Skratka CORDIC znamená COordinate Rotation DIgital Computer. Je to rýchly a efektívny algoritmus na výpočet harmonických funkcii a funkcii z nich odvodených. Jeho výhoda spočíva v tom, že pri výpočtoch využíva iba bitové posuny, sčítanie a odčítanie. To umožňuje hardvérovo realizovať tento algoritmus na poliach FPGA využitím menšieho počtu hradiel, než pri počítaní týchto funkcii rozvojom do mocninných radov.

Myšlienka algoritmu vychádza z elementárnej práce s goniometrickými (harmonickými) funkciami. Predstavme si jednotkovú kružnicu podľa obrázku:



Povedzme, že chceme vypočítať sínus a kosínus nejakého uhla φ. Z obrázku vidíme, že platí:

$$\cos(\varphi) = x,$$
$$\sin(\varphi) = y.$$

To teda znamená, že ak máme nejaký vektor, ktorý rotuje po jednotkovej kružnici, tak jeho x-ová súradnica predstavuje kosínus a y-ová súradnica zasa sínus uhla, ktorý tento vektor priamo zviera s vodorovnou osou. Myšlienka algoritmu CORDIC spočíva v natáčaní štartovacieho vektora $\mathbf{v_0}$ (vyznačený červenou farbou) o uhly δ_i tak, aby sa tento vektor po $(i + 1)$ krokoch stotožnil s cieľovým vektorom $\mathbf{v}$ (vyznačený čiernou farbou). Označme $\mathbf{v_i} = (x_i, y_i)$. Potom platí:

$$x_i = \cos(\varphi_i),$$
$$y_i = \sin(\varphi_i),$$

kde φ_i je okamžitý uhol $\mathbf{v_i}$. Tento vektor teraz natočme o uhol δ_i tak, aby bol bližšie k cieľovému vektoru $\mathbf{v}$. Potom platí:

$$x_{i+1} = \cos(\varphi_i + \delta_i) = \cos(\varphi_i) \,.\, \cos(\delta_i) - \sin(\varphi_i) \,.\, \sin(\delta_i),$$
$$y_{i+1} = \sin(\varphi_i + \delta_i) = \sin(\varphi_i) \,.\, \cos(\delta_i) + \cos(\varphi_i) \,.\, \sin(\delta_i).$$

Ale keďže $x_i = \cos(\varphi_i)$ a $y_i = \sin(\varphi_i)$, tak sa tieto rovnice dajú prepísať takto:

$$x_{i+1} = \cos(\varphi_i + \delta_i) = x_i \,.\, \cos(\delta_i) - y_i \,.\, \sin(\delta_i),$$
$$y_{i+1} = \sin(\varphi_i + \delta_i) = y_i \,.\, \cos(\delta_i) + x_i \,.\, \sin(\delta_i).$$

Alebo v maticovom vyjadrení:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta_i) & -\sin(\delta_i) \\ \sin(\delta_i) & \cos(\delta_i) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \mathbf{R} \circ \mathbf{v_i} = \mathbf{v_{i+1}},$$

Matica **R** sa nazýva i rotačná matica. Upravujme predošlú rovnosť ďalej:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \cos(\delta_i) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{tg}(\delta_i) \\ \mathrm{tg}(\delta_i) & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}.$$

Ak obmedzíme $\mathrm{tg}(\delta_i)$ na hodnoty $\pm 2^{-i}$ $(i \geq 0)$ ($\Rightarrow \delta_i = \mathrm{arctg}(\pm 2^{-i})$) a uvedomíme si, že:

$$\cos(\delta_i) = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(\delta_i)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2^{-2i}}} = K_i,$$

potom bude platiť:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = K_i \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mp 2^{-i} \\ \pm 2^{-i} & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}.$$

Spodné znamienko pri mocnine dvojky znamená, že čiastkové δ_i je záporné, teda uhol vektora $\mathbf{v_{i+1}}$ zmenšujeme. Okrem toho, dá sa dokázať, že $K = \prod_{\forall i} K_i = 0{,}607$. Toto je splnené už i po piatich krokoch. To znamená, že násobenie čiastkovou konštantou K_i môžeme v jednotlivých krokoch vynechať a postačí nám len jednoducho vynásobiť výsledok konštantou K na konci výpočtu. Potom celkový algoritmus je takýto:

$$\mathbf{v_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{i+1} = \begin{pmatrix} 1 & \mp 2^{-i} \\ \pm 2^{-i} & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \mathbf{R}' \circ \mathbf{v}_i$$

$$\vdots$$

$$\text{po k krokoch:}$$

$$\mathbf{v} = K \cdot \mathbf{v}_{k+1} = 0{,}607 \cdot \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Ešte je nutné dodať, že výsledný uhol $\varphi = \pm \delta_0 \pm \delta_1 \pm \delta_2 \dots \pm \delta_k$. Ak je pred čiastkovým uhlom $\delta_i = \mathrm{arctg}\,(2^{-i})$, $i \geq 0$, kladné znamienko (uhol $\mathbf{v_{i+1}}$ zväčšujeme), tak v matici **R’** sú pri záporných mocninách dvojky pôvodné znamienka, ale ak je pred čiastkovým uhlom δ_i záporné znamienko (uhol $\mathbf{v_{i+1}}$ zmenšujeme), tak v matici **R’** sú pri záporných mocninách dvojky opačné znamienka.

Je potrebné si uvedomiť, že násobenie zápornými mocninami dvojky je možné realizovať obvodovo pusúvaním vľavo a výsledné násobenie konštantou sa dá realizovať zmenšením zosilnenia na požadovanú hodnotu. Hodnoty čiastkových uhlov môžu byť uložené natrvalo v pamäti. Teda na výpočet skutočne potrebujeme iba súčet, odčítanie, posuvy a prehľadávanie tabuľky v pamäti.

Príklad. Vypočítajme algoritmom CORDIC cos (63°) a sin (63°) na k = 6 krokov.

Platí: 63° = + 45,00° **+** 26,57° **-** 14,04° **+** 7,13° **-** 3,58° **+** 1,79°. Pričom je zrejmé, že 45° = arctg (2^{-0}); 26,57° = arctg (2^{-1}); 14,04° = arctg (2^{-2});… Tam, kde je pred uhlom kladné znamienko uvažujeme mocniny dvojky v matici **R’** s pôvodnými (hornými) znamienkami, ak je pred uhlom záporné znamienko (tretí a piaty čiastkový uhol), uvažujeme mocniny dvojky s opačnými (spodnými) znamienkami. Ďalší výpočet je potom takýto:

$$\mathbf{v_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ +1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ +0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & +0{,}25 \\ -0{,}25 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}875 \\ 1{,}375 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}125 \\ +0{,}125 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0{,}875 \\ 1{,}375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}703 \\ 1{,}484 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & +0{,}0625 \\ -0{,}0625 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0{,}703 \\ 1{,}484 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}796 \\ 1{,}440 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_6 = \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}03125 \\ +0{,}03125 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0{,}796 \\ 1{,}440 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}751 \\ 1{,}465 \end{pmatrix}$$

Napokon platí:

cos (63°) = K . x_6 = 0,607 . 0,751 = 0,456,

sin (63°) = K . y_6 = 0,607 . 1,465 = 0,889.

Výsledky z kalkulačky:

cos (63°) = 0,45399049973954679156040836635787,

sin (63°) = 0,89100652418836786235970957141363.