Katedra telekomunikácií
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

(I) 1D konvolúcia

Definícia 1 (Definícia konvolúcie – spojitý prípad). *Konvolúcia dvoch spojitých signálov $f(t)$ a $g(t)$ je taká operácia $*$, pre ktorú platí*

$$f(t) * g(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Definícia 2 (Definícia konvolúcie – diskrétny prípad). *Konvolúcia dvoch diskrétnych signálov $f[n]$ dĺžky N a $g[n]$ dĺžky M je taká operácia $*$, pre ktorú platí*

$$f[n] * g[n] \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$

Poznámka:

1. $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ *hovoríme o nekauzálnom nekonečne dlhom systéme,*
2. $\sum_{k=0}^{\infty}$ *hovoríme o kauzálnom systéme nekonečnej dĺžky,*
3. $\sum_{k=0}^{K-1}$ *je kauzálny systém dĺžky K.*

Vlastnosti konvolúcie

1. $\boldsymbol{f(t) * g(t) = g(t) * f(t)}$ (*komutatívnosť*)
2. $\boldsymbol{\big(f(t) * g_1(t)\big) * g_2(t) = f(t) * \big(g_1(t) * g_2(t)\big)}$ (*asociatívnosť*)
3. $\boldsymbol{f(t) * \big(g_1(t) + g_2(t)\big) = f(t) * g_1(t) + f(t) * g_2(t)}$ (*distributívnosť*)
4. $\boldsymbol{\frac{d}{dt}\big(f(t) * g(t)\big) = \frac{df(t)}{dt} * g(t) = f(t) * \frac{dg(t)}{dt}}$ (*derivácia*)
5. $\boldsymbol{\overline{f(t) * g(t)} = \overline{f(t)} * \overline{g(t)}}$ (*konjugácia*)
6. $\boldsymbol{\big(f * g\big)(t+s) = f(t+s) * g(t) = f(t) * g(t+s)}$ (*posunutie konvolvovaného signálu sa rovná posunutiu vstupného signálu*)
7. $\boldsymbol{f(t) * f(t) * f(t) \cdots = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}$ (*viacnásobná (auto)konvolúcia vedie ku gaussovskému rozdeleniu (centrálna limitná veta)*)

Vlastnosti súvisiace s číslicovým spracovaním signálov

1. $\boldsymbol{f(t) * \delta(t+s) = f(t+s)}$ (*konvolúcia s impulzom =* all-pass filter)
2. $\boldsymbol{f(t) * h(t) = y(t)}$ (*vzťah medzi vstupom $f(t)$ a výstupom $y(t)$ lineárnej sústavy s impulzovou charakteristikou $h(t)$*)
3. $\boldsymbol{\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\}\mathcal{F}\{g(t)\}}$ (*Fourierova transformácia konvolvovaných signálov sa rovná súčinu transformovaných signálov.*)
4. $\boldsymbol{f(t) * g(-t) = korel\,(f(t), g(t))}$ (*korelácia*)
5. dĺžka$\boldsymbol{\big(f[n] * g[n]\big) = N + M - 1}$ (*dĺžka konvolvovaného signálu sa rovná súčtu dĺžok jednotlivých signálov - 1 (signály konečnej dĺžky)*)

I.I Maticový zápis

Ak $f[n]$ a $g[n]$ sú dĺžky N, resp. M, môžeme konvolúciu zapísať v maticovom tvare. Výsledný signál bude mať veľkosť $N+M-1$.

$$y[n] = f[n] * g[n] \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = N+M-1 \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} f[0] & 0 & \dots & 0 \\ f[1] & f[0] & 0 & \vdots \\ f[2] & f[1] & f[0] & 0 \\ & \vdots & \ddots & \\ & & f[N-1] & f[N-2] \\ 0 & \dots & 0 & f[N-1] \end{pmatrix}}_{M} \right. \begin{pmatrix} g[0] \\ g[1] \\ \vdots \\ g[M-1] \end{pmatrix}$$

V prípade kauzálneho systému $h[n]$ dĺžky K a dĺžky vstupného signálu M

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[M-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & & & & & \\ h[1] & h[0] & & & & \\ \vdots & h[1] & h[0] & & & \\ h[K-1] & \dots & h[1] & h[0] & & \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & h[K-1] & \dots & h[1] & h[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[M-1] \end{bmatrix}$$

alebo vektorovo zapísané

$$\mathsf{y} = \mathsf{H}\mathsf{x}$$

.

Matica H je veľkosti $M \times M$ a určuje vzťah medzi vstupným signálom $x[n]$ a výstupom $y[n]$. Podobne $\mathsf{x} = \mathsf{H}^{-1}\mathsf{y}$.

Príklad 1: Majme signály $f[n] = \{1, 2\}, g[n] = \{3, 4, 5\}$ Nájdime výsledok konvolúcie $f[n] * g[n]$.
Riešenie:

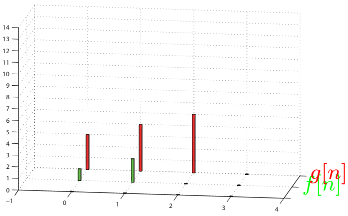
1. Podľa definície

$$
\begin{aligned}
y[0] &= f[0]g[0] && = 1.3 && = 3\\
y[1] &= f[0]g[1] + f[1]g[0] && = 1.4 + 2.3 && = 10\\
y[2] &= f[0]g[2] + f[1]g[1] && = 1.5 + 2.4 && = 13\\
y[3] &= f[1]g[2] && = 2.5 && = 10
\end{aligned}
$$

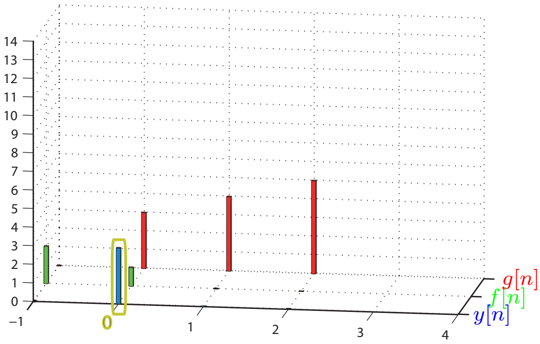
2. Maticovo:

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\\ 4\\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\ 10\\ 13\\ 10 \end{pmatrix}}_{f[n]*g[n]=y[n]}
$$

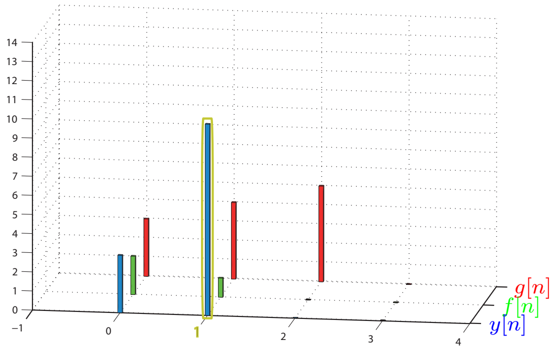
Výsledok: $y[n] = \{3, 10, 13, 10\}$; veľkosti: $N = 2$, $M = 3 \Rightarrow N + M - 1 = 4$. (Graficky obr. 1).



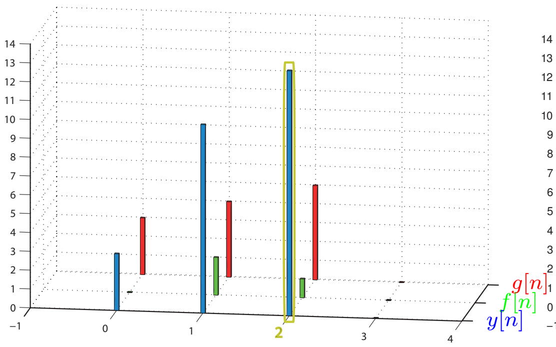
(a) Originálne signály $f[n] = \{1, 2\}$ a $g[n] = \{3, 4, 5\}$



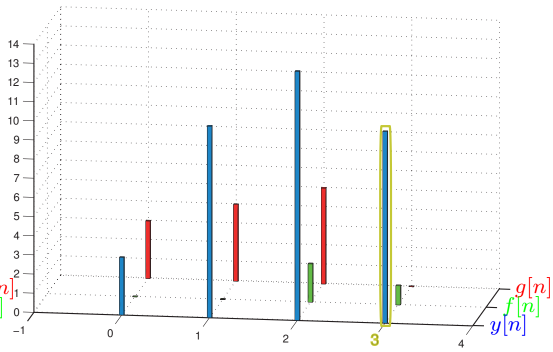
(b) Otočený signál $f[n] \to f[-n] = \{2, 1\}$. $y[0] = 1.3 = 3$



(c) $y[1] = 1.4 + 2.3 = 10$



(d) $y[2] = 1.5 + 2.4 = 13$

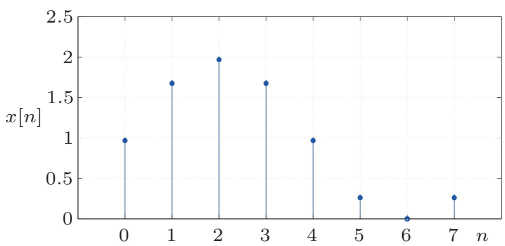


(e) $y[3] = 2.5 = 10$

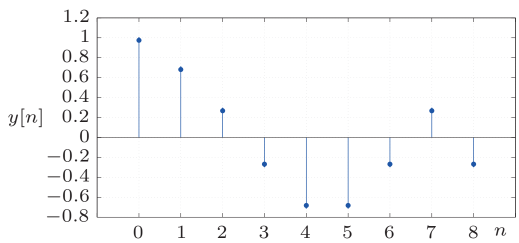
Obr. 1: Príklad konvolúcie. $f[n] = \{1, 2\}, g[n] = \{3, 4, 5\}, y[n] = \{3, 10, 13, 10\}$

Príklad 2: Majme vstupný signál $x[n] = \{1, \frac{\sqrt{2}}{2} + 1, 2, \frac{\sqrt{2}}{2} + 1, 1, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\}$ a FIR filter s impulzovou charakteristikou $h[n] = \{1, -1\}$. Nájdime odpoveď tohto systému na vstupný signál a určme typ filtra.
Riešenie:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= h[n] * x[n] = \{1, -1\} * \{1, \tfrac{\sqrt{2}}{2} + 1, 2, \tfrac{\sqrt{2}}{2} + 1, 1, 1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\} =\\
&= \left\{1, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2} - 1, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2} - 1, 1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2} - 1\right\}
\end{aligned}
$$



(a) Vstupný signál $x[n]$



(b) Výstupný signál $y[n]$

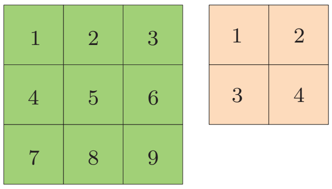
Filter $h[n]$ „počíta" rozdiely po sebe idúcich vzoriek, t.j. $y(n) = x(n) - x(n-1)$ (nazýva sa aj *first-difference filter*), a ako vidieť odstraňuje jednosmernú zložku, ide teda o veľmi jednoduchý (a zlý) *hornopriepustný* filter (magnitúdová charakteristika je $M(\Omega) = 2\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)$.)

(II) 2D konvolúcia

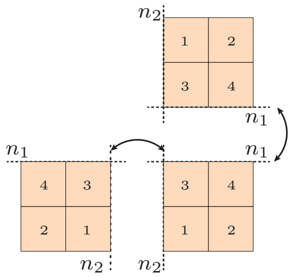
Definícia 3 (2D Konvolúcia – diskrétny prípad). *Podobne ako pri jednorozmernej konvolúcií (Def. 2), definujeme dvojrozmernú konvolúciu dvoch dvojrozmerných signálov*

$$f[n_1,n_2]*g[n_1,n_2] \triangleq \sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} f[k_1,k_2]g[n_1-k_1,n_2-k_2]$$

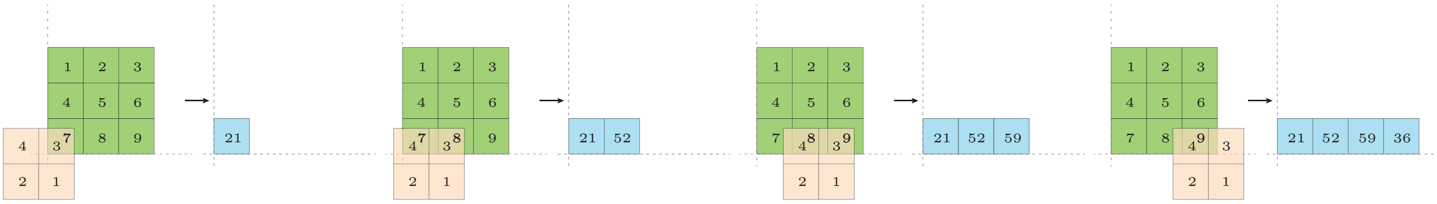
Ako funguje 2D konvolúcia:



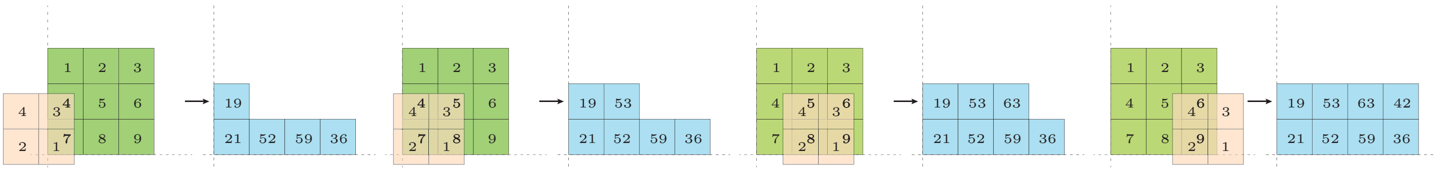
(a) Signály $f[n_1,n_2]$ a $g[n_1,n_2]$



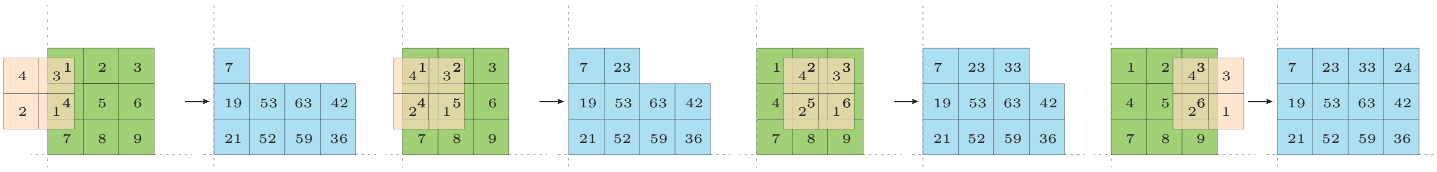
(b) Jeden signál (ľubovoľný) posunieme a preklopíme okolo osí n_1 a n_2.



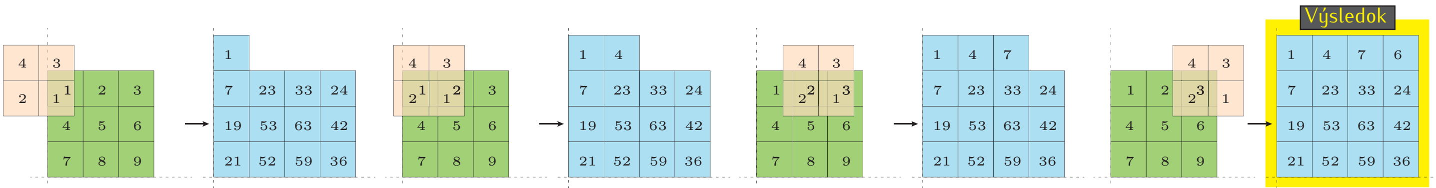
(c) $y[0,0] = 3.7 = 21$ (d) $y[1,0] = 3.8 + 4.7 = 52$ (e) $y[2,0] = 3.9 + 4.8 = 59$ (f) $y[3,0] = 4.9 = 36$



(g) $y[0,1] = 3.4 + 1.7 = 19$ (h) $y[1,1] = 3.5+4.4+1.8+2.7 = 53$ (i) $y[2,1] = 3.6+4.5+1.9+2.8 = 63$ (j) $y[3,1] = 4.6 + 2.9 = 42$

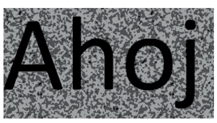


(k) $y[0,2] = 3.1 + 1.4 = 7$ (l) $y[1,2] = 3.2+4.1+1.5+2.4 = 23$ (m) $y[2,2] = 3.3+4.2+1.6+2.5 = 33$ (n) $y[3,2] = 4.3 + 2.6 = 24$



(o) $y[0,3] = 1.1 = 1$ (p) $y[1,3] = 1.2 + 2.1 = 7$ (q) $y[2,3] = 1.3 + 2.2 = 7$ (r) $y[3,3] = 2.3 = 6$

Príklad 3: Majme masku (2D signál) $f[n_1,n_2] = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ a $g[n_1,n_2]$ (obrázok (a)). Nájdite výsledok konvolúcie týchto dvoch signálov.
Riešenie:



$$*\ \frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} =$$

(a) Vstupný 2D signál $g[n_1,n_2]$ (b) Výsledok konvolúcie

Ako vidieť signál $f[n_1,n_2]$ (maska) spriemerováva (napr. $y[5,5] = \frac{1}{9}(1.g[5,5]+1.g[4,5]+1.g[3,5]+ +1.g[5,4]+1.g[5,4]+1.g[4,4]+1.g[3,4]+1.g[5,3]+1.g[4,3]+1.g[3,3])$ susedné bloky $g[n_1,n_2]$, čím sa „vyhladil" šum pozadia.

Odkazy

- 2D Konvolúcia I
- 2D Konvolúcia II
- Konvolúcia - wikipedia
- Properties of convolution I
- Properties of convolution II
- Creative convolution
- Creative convolution – audio files
- Zaostrovanie obrázkov pomocou konvolúcie
- Efekty na obrázkoch pomocou konvolúcie
- Matrix convolution filters
- Filter JAVA applet