Dvojrozmerné signály

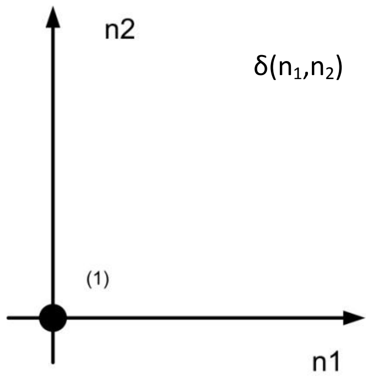
Dvojrozmerný diskrétny signál je signál diskrétny v priestore a spojitý v hodnotách. 2D signál je popísaný pomocou dvoch premenných. Označenie $x(n_1,n_2)$ vyjadruje hodnotu funkcie x pre konkrétnu usporiadanú dvojicu (n_1,n_2).

Významné typy 2D signálov:

1.) Kroneckerov (jednotkový) impulz

Je definovaný vzťahom:

$$\delta(n_1,n_2) = < \begin{matrix} 1 & \quad pre \quad n_1 = n_2 = 0 \\ 0 & \quad inak \end{matrix}$$



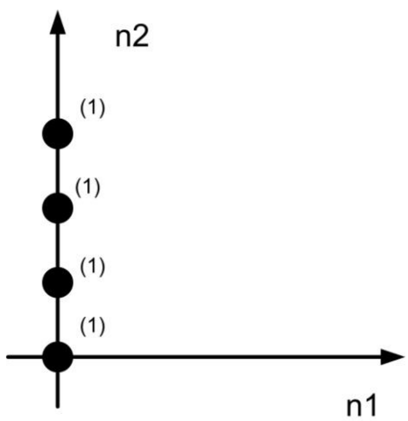
Obr. 1 Kroneckerov impulz

Ľubovoľná postupnosť x(n1,n2) môže byť reprezentovaná ako lineárna kombinácia posunutých Kroneckerových impulzov.

$$\mathrm{x(n_1,n_2)} = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(k_1,k_2)\delta(n_1-k_1,n_2-k_2)}$$

2.) Riadkové a stĺpcové impulzy

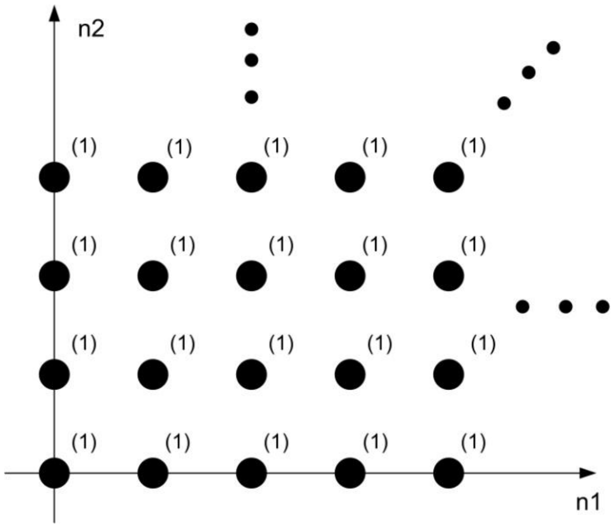
$$x(n_1,n_2) = \delta_T(n_1) = < \begin{matrix} 1 & \quad pre \quad n_1 = 0 \\ 0 & \quad inak \end{matrix}$$



Obr. 2 Stĺpcový impulz

3.) 2D jednotkový skok

$$u(n_{1,}n_2) = \begin{cases} 1 & pre \quad n_1, n_2 \geq 0 \\ 0 & inak \end{cases}$$



Obr.2 Jednotkový skok

Jednotkový skok môžeme vyjadriť pomocou Kroneckerovho impulzu nasledovne:

$$\mathrm{u}(\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2) = \sum_{\mathrm{k}_1=-\infty}^{\mathrm{n}_1} \sum_{\mathrm{k}_2=-\infty}^{\mathrm{n}_2} \delta(\mathrm{n}_1 - \mathrm{k}_{1,}\mathrm{n}_2 - \mathrm{k}_2)$$

Kroneckerov impulz je možné vyjadriť pomocou jednotkového impulzu viacerými spôsobmi:

$$\delta(\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2) = \mathrm{u}(\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2) \cdot \mathrm{u}(-\mathrm{n}_1, -\mathrm{n}_2)$$

$$\delta(\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2) = \mathrm{u}(\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2) - \mathrm{u}(\mathrm{n}_1 - 1, \mathrm{n}_2) - \mathrm{u}(\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2 - 1) + \mathrm{u}(\mathrm{n}_1 - 1, \mathrm{n}_2 - 1)$$

Konvolúcia 2D signálov

$$\mathrm{y}(\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2) = \mathrm{x}(\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2) * \mathrm{h}(\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2) = \sum_{\mathrm{k}_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\mathrm{k}_2=-\infty}^{\infty} \mathrm{x}(\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2)\mathrm{h}(\mathrm{n}_1 - \mathrm{k}_{1,}\mathrm{n}_2 - \mathrm{k}_2)$$

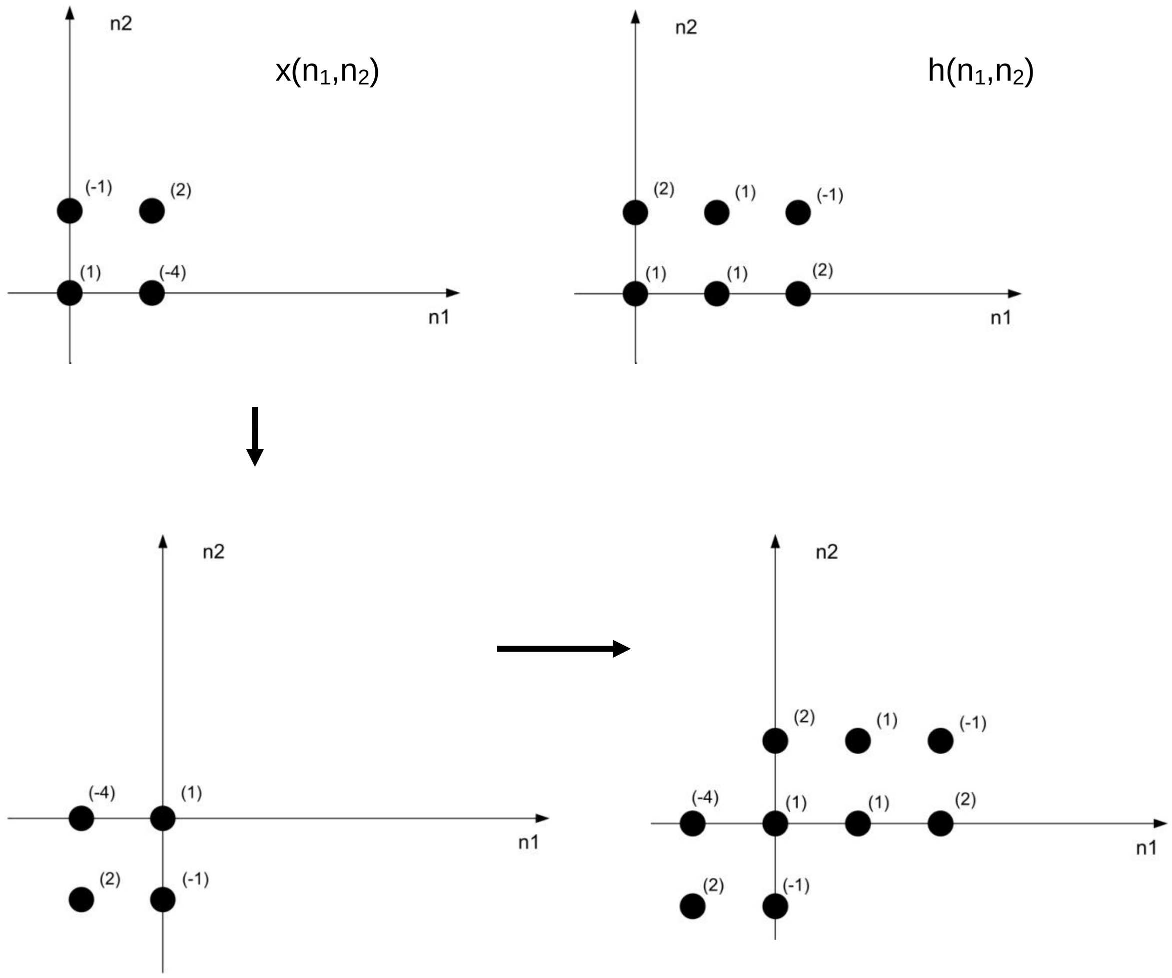
Táto rovnica predstavuje konvolúciu vstupného signálu s impulzovou charakteristikou systému $h(n_1,n_2)$. Znak “*“ sa nazýva konvolučný operátor.

Konvolúciu dvoch signálov môžeme vypočítať priamo z rovnice. Často je však jednoduchší a názornejší grafický postup. Ten pozostáva z nasledujúcich krokov:

1) Zrkadlenie $h(n_1,n_2)$ proti začiatku súradnicovej sústavy

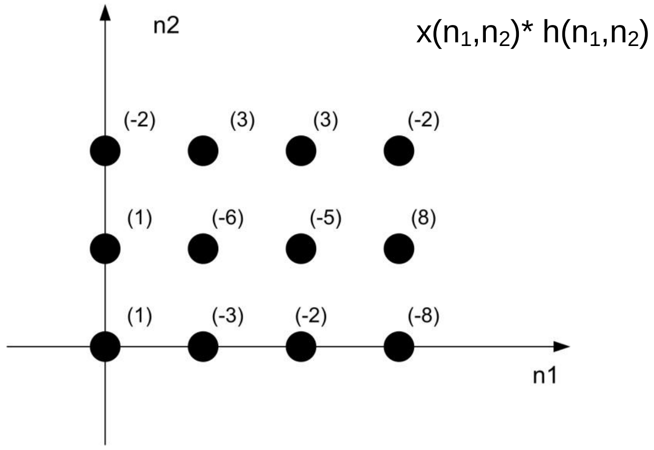
2) Súčin prekrývajúcich sa bodov signálov $x(n_1,n_2)$ a zrkadleného $h(n_1,n_2)$. Následne robíme súčet získaných súčinov.
3) Postupne posúvame zrkadlený signál $h(n_1,n_2)$ smerom doprava a opakujeme krok 2. Pokračujeme pokiaľ sa prekrýva aspoň 1 bod signálov
4) Posunieme zrkadlený signál $h(n_1,n_2)$ o 1 bod hore a opakujeme krok 2
5) Výsledkom je 2D signál s hodnotami ktoré sme získali súčtom súčinov

Príklad:



Výpočty:

1.1 = 1	2.1+(-1).1=1	2.(-1) = -2
(-4).1+1.1 = -3	2.(-4)+1.1+1.2+1.(-1) = -6	(-1).2+2.2 = 3
(-4).1+1.2 = -2	(-4).1+1.(-1)+2.1+(-1).2 = -5	(-1).(-1)+2.1 = 3
(-4).2 = -3	(-4).(-1)+2.(2) = 8	2.(-1) = -2



Obr. 3 Výsledný signál po konvolúcii

2D Z-transformácia

Z-transformácia postupnosti $x(n_1,n_2)$, označovaná ako $X(z_1,z_2)$, je definovaná:

$$X(z_1, z_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) z_1^{-n1} z_2^{-n2}$$

Kde z_1,z_2 sú komplexné premenné

$z_1 = r_1 \,.\, e^{j\Omega 1}$

$z_2 = r_2 \,.\, e^{j\Omega 2}$

Základné vlastnosti Z-transformácie

1) Linearita

$$a \cdot x(n_1, n_2) + b \cdot y(n_1, n_2) \leftrightarrow a \cdot X(z_1, z_2) + b \cdot Y(z_1, z_2)$$

2) Konvolúcia

$$x(n_1, n_2) * y(n_1, n_2) \leftrightarrow X(z_1, z_2) \cdot Y(z_1, z_2)$$

3) Separovateľné postupnosti

$$x_1(n_1) \cdot x_2(n_2) \leftrightarrow X_1(z_1) \cdot X_2(z_2)$$

4) Posun postupnosti

$$x(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \leftrightarrow X(z_1, z_2) \cdot z_1^{-m1} \cdot z_2^{-m2}$$

5) Symetria

$$x(-n_1, -n_2) \leftrightarrow X(z_1^{-1}, z_2^{-1})$$