Cvičenie 1

23.9.2010

Zápočtová písomka : 10.12.2010   30b (min 15b)

KALKULAČKA

MARTIN RAKÚS

Signály a ich charakteristiky

1) Delenie signálov

- deterministické (časový opis)
  - periodické
    - harmonické — sin, cos
    - neharmonické
  - neperiodické
  - kvázi periodické
- stochastické (mat. opis)
  - stacionárne
  - nestacionárne
  - ergodické (najviac používané, dôležité)

2) Výkonové sig.: $0 < P_x < \infty$ — vysielacia časť

stredný normovaný výkon (pre reálne sig.)

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt \quad [W]$$

$$P = U.I = I^2R = \frac{U^2}{R} \rightarrow \text{ak } R = 1\,\Omega \longrightarrow P_x = x^2$$

k výkonovým sig. patria
- periodické
- kvázi periodické
- stochastické

spektrum : diskrétne

FR

3) Energetické sig.: $0 < E_x < \infty$ — prijímacia časť

celk. normovaná energia (pre reálne sig.)

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt \quad [J]$$

str. normovaná energia počas $t = \left\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right\rangle$: $E_x^T = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt$

spektrum : spojité → FT

4) Parcevalova rovnosť pre výkonové sig.

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$ C_n – kompl. Fourier. koef.

pre energické signály

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \cancel{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(f)\,df$$

5) Výkonová spektrálna hustota

$G_x = |X(f)|^2$ $\left[\frac{W}{Hz}\right]$ PSD (Power Spectral Density)

pre reálne sig. $G_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(f - nf_0)$ n – index harm.

f_0 – zákl. f.

$$P_x = \cancel{2}\int_{-\infty}^{\infty} \underset{\uparrow}{G_x(f)}\,df = \int_{0}^{\infty} \underset{\uparrow}{G_x(f)}\,df \qquad \left[\frac{dBm}{MHz}\right]$$

dvojstranné jednostranné

Vlastnosti : – párne

– nezáporné f.

$$x(t) \xrightarrow{FR} X(f)$$

Energetická spektrálna hustota $\Psi_x(f) = |X(f)|^2 \left[\frac{J}{Hz}\right]$

$$E_x = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(f)\,df}_{\text{dvojstranné}} = \cancel{2}\underbrace{\int_{0}^{\infty} \Psi_x(f)\,df}_{\text{jednostranné}}$$

ESD

(Energy Spectral Density)

Vlastnosti:
- párna
- nezáporná f.

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(f)\,df = 2\int_{0}^{\infty} \Psi_x(f)\,df$$

dvojstranná

Pr 1. Vyp. normovaný výkon sig.

$$x(t) = A\cos 2\pi f_0 t_0$$

a) v časovej ob.

b) vo frekvenčnej ob.

a)

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^2(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} (A\cos 2\pi f_0 t)^2\,dt = \frac{A^2}{2T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} (1+\cos 4\pi f_0 t)\,dt =$$

$$\cos^2 = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$= \frac{A^2}{2T_0}\left[t + \frac{\sin 4\pi f_0 t}{4\pi f_0}\right]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} = \frac{A^2}{2T_0}\left[\left(\frac{T_0}{2} + \frac{\sin 4\pi f_0 \frac{T_0}{2}}{4\pi f_0}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(-\frac{T_0}{2} - \frac{\sin 4\pi f_0 \frac{T_0}{2}}{4\pi f_0}\right)\right] = \frac{A^2}{2T_0}\left[\frac{T_0}{2} + \frac{T_0}{2}\right] = \frac{A^2}{2} \qquad \boxed{P_x = \frac{A^2}{2}} \qquad [V]^2 = [W]$$

výkon harm. sig.

b) $P_x = \sum_{n=-1}^{1} |C_n|^2 = 2 \cdot \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2}$

$|C_1| = \frac{1}{2}\sqrt{A^2} = \frac{A}{2}$

$a_1 = A$

$b_1 = \emptyset$

$|C_n| = \frac{1}{2}\sqrt{\underset{\substack{\uparrow \\ \cos}}{a_n^2} + \underset{\substack{\uparrow \\ \sin}}{b_n^2}}$

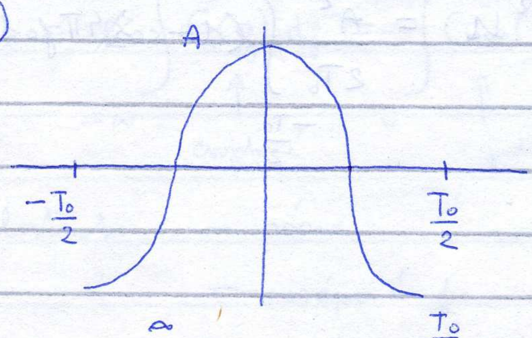
Pr 2. Určte kt. z nasl. sig. sú energické a kt. výkonové a vypočítajte príslušnú veličinu :

a) $x(t) = \begin{cases} A\cos 2\pi f_0 t & -\frac{T_0}{2} \le t \le \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$

b) $x(t) = \begin{cases} A\exp(-at) & t \ge 0 \quad a \ge 0 \quad a = \text{konšt.} \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$

c) $x(t) = \cos t + 5\cos 2t$

a)

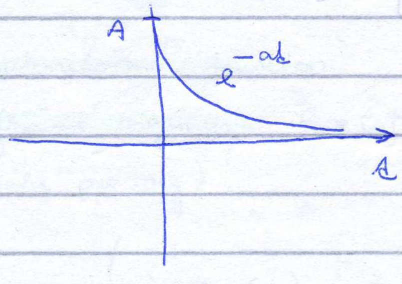


energetický signál

$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2\cos^2 2\pi f_0 t\;dt = \frac{A^2 T_0}{2}$ vid. pr 1

$[V]^2[s] = [Ws] = [J]$

b)

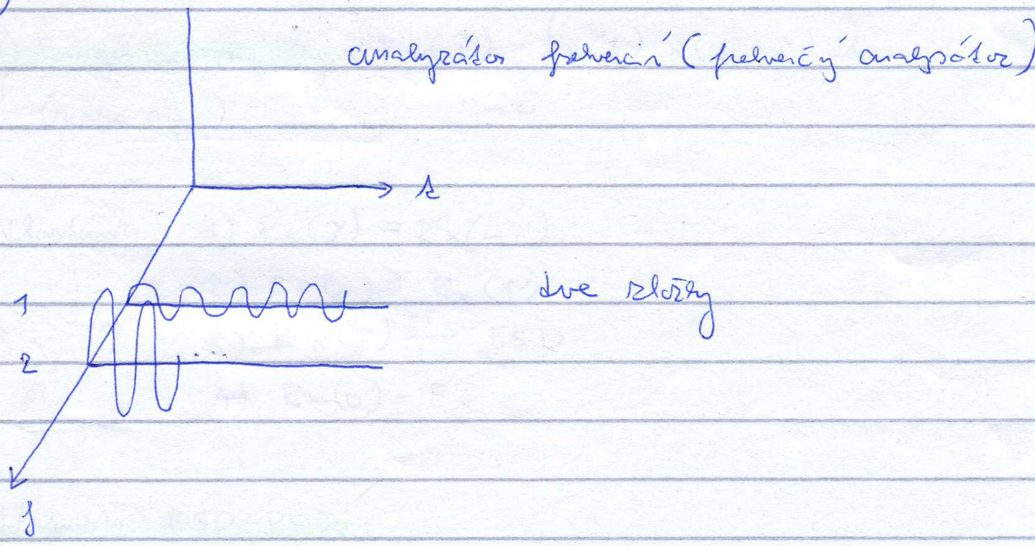


$$E_x = \int_0^\infty x^2(t)\,dt = \int_0^\infty A^2 \cdot e^{-2at}\,dt =$$

$$= A^2 \int_0^\infty e^{-2at}\,dt = A^2 \left[\frac{e^{-2at}}{-2a}\right]_0^\infty =$$

$$= \frac{A^2}{2a}$$

c)



$$P_x = \sum_{n=-2}^{2} |C_n|^2 = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right] = 2 \cdot \frac{26}{4} = 13\,W$$

$$C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{1^2} = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\sqrt{5^2} = \frac{5}{2}$$

Pr 3. $P_x = ?$

a) $x(t) = 10\cos 10t + 20\cos 20t$

b) $x(t) = 10\cos 10t + i\,10\sin 10t + 20\cos 20t$

a) $$P_x = \sum_{n=-2}^{2} |C_n|^2 = 2\left[10^2 + 5^2\right] = 250\,W$$

$$C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{10^2} = 5 \qquad C_2 = 10$$

b) $P_x = \sum_{n=-2}^{2} |C_n|^2 = 2\left[\left(\frac{\sqrt{200}}{2}\right)^2 + 10^2\right] = 2 \cdot 150 = 300\,W$

$C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + 10^2} = \frac{\sqrt{200}}{2}$

$C_2 = \frac{1}{2}\sqrt{20^2} = 10$

– ak by bola zložka 10 tak sa berie do jeden krát
potom by bol výsledok $= 400\,W$