

V každej úlohe môžete riešenie vyjadriť v tvare postupností ML príkazov, ktoré vedú k výsledku. Neriešte jednu otázku dvoma spôsobmi, lebo započíta sa horšia alternatíva.

✓ 1. Dátový súbor

$x = [2,1 \ 0 \ 3,9 \ 4,5 \ 0 \ 7,7 \ 7,7 \ 3,4 \ 4,6 \ 4,1 \ 2,8 \ 6,1 \ 1,4 \ 9,8 \ 3 \ 3,9 \ 7,2 \ 3,7 \ 3,2 \ 0,6];$

a) zatriedte do tried s hranicami určenými vektorom $t = [0 \ 2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10]$ [2b]

a zostrojte

b) tabuľku početností [2b]

c) tabuľku relatívnych početností [2b] a

d) histogram [2b]

✓ 2. Dvozmerný dátový súbor je daný dvojicou vektorou $x = [-1, 1, 1, 3], y = [4, 3, 1, 0]$.

a) Vypočítajte kovarianciu tohto dátového súboru. [3b]

b) Určte regresnú priamku $y = a + bx$ pre tieto dáta. [3b]

c) Nakreslite regresnú priamku spolu s dátovým súborom v E^2 . [2b]

Pomôcka: $k = SS_{xy} / SS_{xx}$

✓ 3. V tej istej automatizovanej prevádzke dochádza denne v priemere k 1,5 poruchám. Vzhľadom na náklady spojené s prestojmi a odstraňovaním porúch, manažment považuje za kritický počet 3 porúch v priebehu dňa. Predpokladajte, že výskyt porúch je náhodný a má Poissonove rozdelenie pravdepodobnosti

$$f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) \quad . \text{ Aká je pravdepodobnosť toho, že v automatizovanej prevádzke dôjde}$$

a) práve k 3 poruchám? [3b]

b) k 3 alebo viacerým poruchám? [4b]

✓ 4. Náhodná premenná X má distribučnú funkciu

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leq 0 \\ x^2 & \text{pre } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{pre } 1 < x \end{cases}$$

a) Vypočítajte $P(1/4 \leq X \leq 3/2)$. [3b]

b) Určte t tak aby $P(X \geq t) = 1/10$. [3b]

c) Vypočítajte rozptyl $\text{var}(X)$ náhodnej premennej X . [2b]

✓ 5. Životnosť počítačového terminálu v univerzitnom počítačovom stredisku má normálne rozdelenie s parametrami $\mu = 3,35$ a $\sigma = 0,5$ roka.

a) Aká je pravdepodobnosť, že počítačový terminál bude mať životnosť medzi tromi a štyrmi rokmi? [4b]

b) Podľa doterajších skúseností 22% terminálov má životnosť menšiu než tvrdí výrobca vo svojej reklame. Akú životnosť udáva výrobca v reklame? [4b]

✓ 6. Vektor $x = [13, 15, 18, 14, 15]$ je realizáciou náhodného výberu z hodnôt náhodnej premennej X s normálnym rozdelením s parametrami μ a σ .

a) Určte bodové odhady parametrov μ a σ .

b) Určte 90% interval spoľahlivosti pre parameter μ . [3b] (Pomôcka: $\bar{x} \pm \frac{st}{\sqrt{n}}$)

c) Aký by musel byť rozsah náhodného výberu, aby dĺžka 90% intervalu spoľahlivosti nepresiahla 0,2 [3b]

✓ 7. Daná je rovnica $\exp(-x) = x$.

a) Overte, či má v intervale $[0, 1]$ koreň. [1b]

b) Odvoďte vzorec pre Newtonovu metódu (metódu dotyčnic) riešenia rovnice. [4b]

c) Vhodne zvolte x_0 a vykonajte 3 iterácie riešenia danej rovnice Newtonovou metódou. [2b]

8. Lineárny systém rovníc je daný v maticovom tvare $ax = b$, kde

$$a = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a) Nájdite stupňovitý tvar rozšírenej matice sústavy a rozhodnite o jej riešiteľnosti (či existuje riešenie a ak áno, či je jediné). [4b]

b) Nájdite všeobecné riešenie, ak existuje. Ak nie, nájdite zovšeobecnené riešenie. [4b]

9. Hodnoty funkcie f v zložkách vektora $x = [3, 2, -1, 1]$ sú dané vektorom $y = [-155, -35, -23, -9]$.

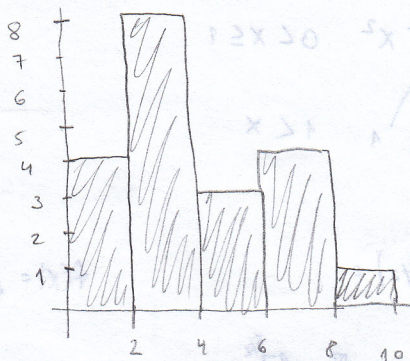
a) Zostrojte tabuľku pomerných diferencií. [3b]

b) Určte Newtonov interpolačný polynóm pre dané údaje. [3b]

c) Predpokladajte, že hodnota funkcie bola doplnená o $f(0) = 11$. Rozšírte tabuľku pomerných diferencií a určte nový Newtonov interpolačný polynóm z týchto údajov? [2b]

①

triedy znaku	početnosť	rel. poč. [%]
0-2	4	20 %
2-4	8	40 %
4-6	3	15 %
6-8	4	20 %
8-10	1	5 %



②

$$x = [-1, 1, 1, 1, 3] \quad \bar{x} = 1$$

$$y = [4, 3, 1, 0] \quad \bar{y} = 2$$

$$SS_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2 = (-2)^2 + 2^2 = 8$$

$$SS_{yy} = \sum (y_i - \bar{y})^2 = 2^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = 4 + 1 + 1 + 4 = 10$$

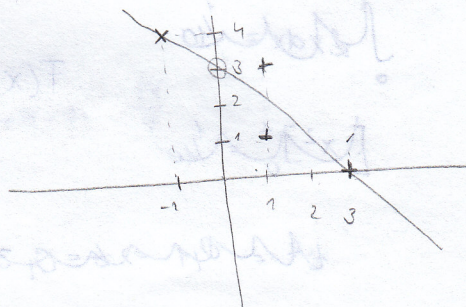
$$SS_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (-2)(2) + (2)(-2) = -4 - 4 = -8$$

$$y = ax + a + bx \quad b = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}} = \frac{-8}{8} = -1$$

$$\bar{y} = a + b\bar{x}$$

$$2 = a + 1 \Rightarrow a = 1$$

$$y = 1 - x$$



$$\text{cov} = S_{xy} = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{4} \cdot (-8) = -2$$

③

$$\lambda = 1.5$$

$$f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

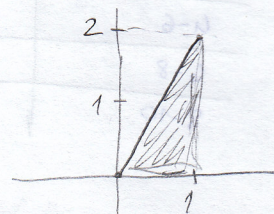
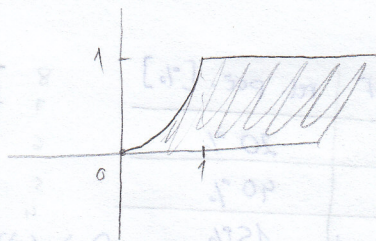
$$a) f(3) = \frac{1.5^3}{3!} e^{-1.5} = 0.1255$$

$$b) 1 - [f(0) + f(1) + f(2)] = 1 - [0.0741 + 0.1133 + 0.1054] = 1 - 0.2928 = 0.7072$$

$$= 1 - [1 + 1.5e^{-1} + 1.125e^{-2}] = 1 - (1 + 0.5518 + 0.1522) = 0.296$$

(4)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ -x^2 & 0 < x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$



$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases}$$

$$a) P(1/4 \leq X \leq 3/2) =$$

$$= \int_{1/4}^{3/2} 2x dx = \left[x^2 \right]_{1/4}^{3/2} =$$

$$= \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{16} \right) = \frac{36-1}{16} = \frac{35}{16}$$

$$F(3/2) - F(1/4) = \int_{1/4}^1 2x dx = \left[x^2 \right]_{1/4}^1 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$b) P(X \geq t) = 1/10 \Rightarrow P(X \leq t) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

$$\int_0^t 2x dx = 1/10$$

$$F(x) = x^2 \Rightarrow t^2 = \frac{9}{10}$$

$$\left[x^2 \right]_0^t = 1/10$$

$$t = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$t \approx 0.9487$$

$$c) \text{var}(x) = E(x^2) - E^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$$

$$E(x) = \int_0^1 x \cdot 2x dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$E(x^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx = 2 \int_0^1 x^3 dx = 2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

(5)

$$\mu = 3.35$$

$$\sigma = 0.15$$

$$\sigma^2 = 0.0225$$

$$\frac{x - \mu}{\sigma} = z$$

$$P\left(\frac{3-3.35}{0.15} < z < \frac{4-3.35}{0.15}\right) = F_N(1.3) - F_N(-0.7) = F_N(1.3) - 1 + F_N(0.7) = 0.9032 - 1 + 0.7580 = 0.6612$$

$$P(X < t) = 0,22$$

$$P\left(z < \frac{t - \mu}{\sigma}\right) = 0,22$$

$$P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{t - \mu}{\sigma}\right) = 0,22$$

$$r = \frac{t - \mu}{\sigma}$$

$$P(z < r) = 0,22$$

$$F_N(r) = 0,22 \Rightarrow \text{zn } F_N(-r) = 0,78 \Rightarrow -r = 0,7794$$

$$r = -0,77$$

$$\frac{t - \mu}{\sigma} = -0,77$$

$$t = -0,77 \sigma + \mu = -0,77 \cdot 0,5 + 8,35 = \underline{\underline{2,965}}$$

$$\textcircled{6} \quad X = [13, 15, 18, 14, 15] \quad \bar{X} = 15$$

$$a) \quad \sigma_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{4} ((-2)^2 + 0 + (3)^2 + (-1)^2 + 0) = 4 + 9 + 1 = \frac{14}{4}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$\mu \approx \bar{X} = 15$$

$$b) \quad 1 - \alpha = 0,9 \Rightarrow \alpha = 0,1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95$$

$$\bar{X} \pm \frac{st}{\sqrt{n}} = 15 \pm \frac{\sqrt{\frac{14}{4}} \cdot 2,1318}{\sqrt{5}} \Rightarrow \underline{\underline{(13,2164; 16,7835)}}$$

$$1,783$$

$$c) \quad n = ?$$

$$\pm \frac{st}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{14}}{2} \cdot 2,1318}{\sqrt{n}} = \frac{0,2}{2}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{2} \cdot 2,1318 = \frac{1,783}{2} \cdot 0,1 \sqrt{n}$$

$$1,783 \cdot 2,1318 = 0,1 \sqrt{n}$$

$$3,988 = 0,1 \sqrt{n}$$

$$\sqrt{n} = \frac{3,988}{0,1} = 39,88$$

$$n = \sqrt{39,88} = 6,3152$$

wyber o rozachu 6 (7?)

7) $e^{-x} = x \Rightarrow e^{-x} - x = 0$

a) $[0, 1]$

$f(a) = e^{-0} - 0 = 1$

$f(b) = e^{-1} - 1 = -0,6321$

$f(a) \cdot f(b) < 0 \rightarrow$ ma' niaseni

b) $y - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$

$y = 0$

$y - f(x_0) = f'(x_0)x_1 - f'(x_0)x_0$

$x_1 = \frac{f'(x_0) \cdot x_0 - f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$f(x) = e^{-x} - x$

c) $x_0 = 0,5$

I. $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0,566$

$f'(x) = -e^{-x} - 1 \quad f(0,5) = 0,1065$

$f'(0,5) = -1,6065$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0,566$

II. $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$f(0,566) =$

$f'(0,566) =$

