- **Vety o konvergencií mocninového radu**

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$

Nech $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots, a \in \mathbb{C}$ sú komplexné čísla, rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ potom nazývame *mocninový rad so stredom v* $a \in \mathbb{C}$.

Ak mocninový rad $\sum_{n=a}^{\infty} c_n (z-a)^n$ konverguje v bode $z_0 \in \mathbb{C}$, potom konverguje v kruhu $k(a_1, |z_0 - a|)$

- v každom kruhu $k(a, r)$, kde $r < |z_0 - a|$ mocninový rad *rovnomerne konverguje*
- v čísle *a* mocninový rad *vždy konverguje*

Def: Nech mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ konverguje v kruhu $k(a, R)$ a diverguje $\mathbb{C} \setminus k(a)$.

Potom $k(a, R)$ nazývame *kruh konvergencie radu* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, a R *polomer konvergencie.*

$$\boxed{\text{Ak } \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \text{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ konverguje.}}$$

- **Predpoklady platnosti Cauchyho integrálnej vety**

$f : A(\in \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ - je analytická na jednoduchej súvislej oblasti. Ak $\mathbb{C} \in A$ je JPČHU, potom platí $\int_c f(z)\, dz = 0$.

- **Definícia Taylorovho radu (vety, predpoklady)**

Nech funkcia komplexnej premennej *f*(*z*) má v bode $a \in \mathbb{C}$ derivácie všetkých rádov, potom rad $f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots$ nazývame *Taylorov rad* funkcie f v bode $a \in \mathbb{C}$.

- **Veta o rozvoji analytickej funkcie do Taylorovho radu**

Nech *f*(*z*) je analytická v oblasti $D(\in \mathbb{C})$. Nech $a \in D$ a kruh $k(a, R) \subset D$. Potom existuje mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ taký, že $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, pričom

$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \Rightarrow \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, kde C je JPČHU kladne orientovaná krivka, $C \subset k(a, R)$, $a \in Int\, C$.

- **Laurentov rad (veta o konvergencií, medzikruží)**

Nech $\ldots, c_{-n}, c_{-n+1}, \ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ a sú komplexné čísla. Potom rad

$$\ldots + c_{-n}(z-a)^{-n} + c_{-n+1}(z-a)^{-n+1} + \ldots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + \quad \Rightarrow \textit{hlavná časť}$$

$$+ c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots = \quad \Rightarrow \textit{analytická časť}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

nazývame *Laurentov rad* v bode a.

Def (konvergencie Laurentovho radu): Laurentov rad $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ konverguje $\Leftrightarrow$ ak

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ (Re-časť) aj $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konvergujú naraz.

Veta: Nech Laurentov rad $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konverguje na $P(a, r, R)$. Potom jeho súčet $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ je *analytická funkcia.*

Veta: Pre Laurentov rad $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ existujú jediné čísla r,R, pričom $(0\leq r\leq\infty, 0\leq R\leq\infty)$ pre ktoré platí:

a) analytická časť LR konverguje v kruhu $k(a, R)$ a rovnomerne
   - *konverguje* na každom kruhu $\overline{k(a_1, R_1)}, R_1<R$
   - *diverguje* na každom kruhu $\mathbb{C}\setminus\overline{k(a, R)}$
b) hlavná časť LR konverguje na $\mathbb{C}\setminus\overline{k(a, R)}$ a rovnomerne
   - *konverguje* na $\mathbb{C}\setminus\overline{k(a_1, r_1)}$
   - *diverguje* na $k(a, r)$
c) ak LR konverguje na $P(a, r, R)=\{z\in\mathbb{C}: r<|z-a|<R\}, r<R$ rovnomerne
   - *konverguje* na $P(a, r_1, R_1)$, kde $r_1>r, R_1<R$
   - *diverguje* na $\mathbb{C}\setminus\overline{P(a, r, R)}$

Veta (o rozklade analytickej funkcie do LR na medzikruží): Nech $f: P(a, r, R)\rightarrow\mathbb{C}$ je analytická. Potom existuje jediný LR, ktorý na $P(a, r, R)$ konverguje k funkcii f(z), pričom jeho koeficient $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi-a^{n+1}} d\xi \quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm k,\ldots$ a C je JPČHU kladne orientovaná, $C\in P(a, r, R)$ tak, že $a\in Int\, C$ a musí byť zvnútra krivky

- **Funkcia analytická v bode**

Nech $f: A(\in\mathbb{C})\rightarrow\mathbb{C}$, A je otvotená, hovoríme, že f je analytická v bode $a\in A$,ak: $f'(z)\ \exists\ \forall a\in O(a)$. Hovoríme, že f je analytická ak je analytická $\forall a\in A$.
Aby bola funkcia analytická, musia platiť CR.

- **Veta o deformácii integračnej krivky**

Nech C_0 a C_1 sú dve JPČHU, ktoré sa nepretínajú a C_1 leží vo vnútri C_0. Nech tieto krivky a množina bodov medzi nimi ležia v množine, v ktorej je f(z) analytická. Potom $\int_{C_0} f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz$ (deformovali sme C_0 na C_1).

- **Cauchyho integrálna formula**

Nech C je JPČHU kladne orientovaná a $f: Int\,\mathbb{C}\, v\,\mathbb{C}$ je analytická funkcia. Potom pre každé

$$a\in Int\,\mathbb{C}\ :\quad f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-a}dz\Rightarrow\int_c \frac{f(z)}{z-a}dz=2\pi i\cdot f(a)\ .$$

Každá funkcia f(z) je analytická v uzavretej oblasti a má v tejto oblasti derivácie všetkých rádov a platí: $f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \ \Rightarrow\ \int_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(a)$

- **Izolované singulárne body**

Hovoríme, že bod $z=a$ je *izolovaný singulárny bod* funkcie $f(z)$, ak platí $f: D(\subset\mathbb{C})\rightarrow\mathbb{C}$ ak existuje prstencové okolie bodu *a:* $a-P(a, O, r)=O_r^o(a)$ také, že v $O_r^o(a)$ nie sú žiadne iné singulárne body $P(a, O, r)\rightarrow\mathbb{C}$ a ISB $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

- **Typy izolovaných singulárnych bodov**

a) $z=a$ je *odstrániteľný singulárny bod (OSB)* funkcie $f(z)$, ak platí $\lim_{z\to a} f(z)\ \exists$ a je konečná

b) $z=a$ sa nazýva *pól* funkcie $f(z)$, ak $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$

c) $z=a$ je *podstatne singulárny bod*, ak $\lim_{z\to a} f(z)$ neexistuje

- **Počítanie rezídua v póle**

a) ak $z=a$ je OSB potom $res_{z=a} f(z)=0$

b) ak $z=a$ je pól (m-tého rádu), potom $res_{z=a} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left[(z-a)^m f(z)\right]^{(m-1)}$,

a je jednoduchý pól, potom $res_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right]$

$f(z)=\frac{h(z)}{g(z)}, z=a$ ISB $\to g(a)=0, h(a)\neq 0, g'(a)\neq 0$, funkcie sú analytické

potom platí: $z=a$ je jednoduchý pól $res_{z=a}\frac{h(a)}{g'(a)}$

- **Integrál po krivke C**

Nech $\varphi:<\alpha,\beta>$ je parametrizácia hladkej krivky C a nech funkcia f je komplexná funkcia komplexnej premennej, $A(\in\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ je spojitá funkcia, ktorej definičný obor obsahuje krivku C $(C\in A)$. Potom integrál po krivke C z funkcie $f(z)$ definujeme:

$$\int_C f(z)\,dz=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Ak C je po častiach hladká a $f:A(\subset\mathbb{C})\to\mathbb{C}, C\in A$, spojitá, potom

$\int_C f(z)\,dz=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$, kde $\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$ je delenie integrálu $\langle\alpha,\beta\rangle$ tj. $\alpha=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=\beta$

- **Cauchyho integrálna veta**

$f:A(\in\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ = analytická $\Rightarrow$ jednoduchá súvislá oblasť.

Veta: Nech f je analytická v jednoducho súvislej oblasti A. Ak $C\in A$ je JPČHU krivka, potom $\int_C f(z)\,dz=0$

- **Cauchyho veta o rezíduách**

Nech $D\subset\mathbb{C}$ je jednoduchá súvislá oblasť a C je JPČHU kladne orientovaná, $C\subset D$. Nech $f:D(\subset\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ je analytická funkcia s výnimkou *konečného počtu izolovancýh singulárnych bodov*. Označme $z_1,\ldots,z_n$ singulárne body ležiace vo vnútri krivky C. Potom

$\int_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n} res_{z\to a_k} f(z)$. $e^{\frac{1}{(z-a)^k}}, \sin\frac{1}{(z-a)^k}, \cos\frac{1}{(z-a)^k}, \ z=a \Rightarrow PSB$

- **Laplaceova transformácia**

$L\{f(t)\}=F(p)$, kde f(t) je originál

Def: Funkcia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ nazývame *Laplaceovým originálom*, ak platí:

a) $f(t)=0$ pre t<0

b) $f(t)$ je po častiach spojitá

c) $|f(t)|<M\cdot e^{\alpha t}, M>0, M\in R, \alpha\in R$

Index rastu funkcie f $\alpha_0=inf\{\alpha:|f(t)|<Me^{\alpha t}\}$

Veta: Pre každý originál $f(t)$ je Laplaceov obraz $F(p)$ a polrovina $Rep>\alpha_0$ analytická funkcia premennej p, pričom $-F'(p)=\int_0^\infty t f(t)e^{-pt}\,dt$, $\lim_{Rep\to\infty} F(p)=0$