n-rozmerné integrály — R-integrál z ohraničenej funkcie $f \subseteq R^n \times R$ na n-kvádri $E(\bar{a},\bar{b})$

($E(\bar{a},\bar{b}) = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n\rangle$ je uzavretý ohraničený interval v R^n.)

- $$\boxed{\int_{E(\bar{a},\bar{b})} l \, d\bar{x}} = l\, C(E(\bar{a},\bar{b})) \quad , \quad l \in R \text{ dané}$$
$$= l(b_1-a_1)(b_2-a_2)\dots(b_n-a_n)$$

pretože, z definície Riemanovho integrálu je $\int_{E(\bar{a},\bar{b})} k \, d\bar{x} = J$, jediné číslo medzi všetkými dolnými integrálnymi súčtami $D(f;\mathcal{D},E(\bar{a},\bar{b})) = \sum_{k=1}^{m} m_k C(E_k)$ a všetkými hornými integrálnymi súčtami $H(f;\mathcal{D},E(\bar{a},\bar{b})) = \sum_{k=1}^{m} M_k C(E_k)$, (ak existuje J jediné!)

$\mathcal{D}$ je delenie $E(\bar{a},\bar{b})$ na čiastočné n-kv. $E_1, E_2, \dots, E_m$

$E = E(\bar{a},\bar{b}) = \bigcup_{k=1}^{m} E_k$, $C(E) = (b_1-a_1)(b_2-a_2)\dots(b_n-a_n)$
$= \sum_{k=1}^{m} C(E_k)$, n-rozmerný obsah E.

$m_k = \inf\{f(\bar{x}) \mid \bar{x} \in E_k\}$ $\quad f \subseteq R^n \times R$ daná funkcia n-premenných
$M_k = \sup\{f(\bar{x}) \mid \bar{x} \in E_k\}$

Ak $f(\bar{x}) = l$ pre všetky $\bar{x} \in E(\bar{a},\bar{b}) = \bigcup_{k=1}^{m} E_k$, $l \in R$ potom $m_k = M_k = l$ a teda pre každé $\mathcal{D}$

je $D(f;\mathcal{D},E(\bar{a},\bar{b})) = \sum_{k=1}^{m} l\, C(E_k) = l \sum_{k=1}^{m} C(E_k) = l \cdot C(E(\bar{a},\bar{b}))$

$H(f;\mathcal{D};E(\bar{a},\bar{b})) = \sum_{k=1}^{m} l\, C(E_k) = l \sum_{k=1}^{m} C(E_k) = l \cdot C(E(\bar{a},\bar{b}))$

$\implies \int_{E(\bar{a},\bar{b})} l \, d\bar{x} = l \cdot C(E(\bar{a},\bar{b}))$ (existuje jediné!)

$$\iiint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle\times\langle -1,2\rangle} (x^2z+y)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle\times\langle -1,2\rangle} x^2z\,dx\,dy\,dz +$$

$$+ \iiint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle\times\langle -1,2\rangle} y\,dx\,dy\,dz = \left(\int_0^1 x^2dx\right)\left(\int_1^2 1dy\right)\left(\int_{-1}^2 z\,dz\right) +$$

$$+\left(\int_0^1 1dx\right)\left(\int_1^2 y\,dy\right)\cdot\left(\int_{-1}^2 1\,dz\right) = \frac{1}{2} + [x]_0^1\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2[z]_{-1}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{10}{2}$$

pretože; podľa vety o výpočte

je: $$\iiint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle\times\langle -1,2\rangle} x^2z\,dx\,dy\,dz = \int_{+1}\left(\iint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle -1,2\rangle} x^2z\,dx\,dz\right)dy =$$

$$= \int_{+1}^2\left(\int_0^1\left(\int_{-1}^2 x^2z\,dz\right)dx\right)dy = \int_1^2\left(\int_0^1 x^2\left(\int_{-1}^2 z\,dz\right)dx\right)dy =$$

$$= \int_1^2\left(\int_0^1 x^2\underbrace{\left[\frac{z^2}{2}\right]_{-1}^2}_{\frac{4}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}}dx\right)dy = \int_1^2\left(\frac{3}{2}\int_0^1 x^2dx\right)dy =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\int_0^1 x^2dx\right)\left(\int_1^2 dy\right) = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1[y]_1^2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}(2-1) = \frac{1}{2}$$

Teda ak za integrálom je súčin funkcií jednej premennej a sú splnené predpoklady vety o výpočte v našom príklade $f(x,y,z) = x^2\cdot z = x^2\cdot 1\cdot z$

$$\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)\cdot\varphi_3(z)$$

tak je ten trojný integrál súčinom jednoduchých integrálov

t.j. $$\iiint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle\times\langle -1,2\rangle} x^2z\,dx\,dy\,dz = \left(\int_0^1 x^2dx\right)\left(\int_1^2 1dy\right)\int_{-1}^2 z\,dz =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1[y]_1^2\left[\frac{z^2}{2}\right]_{-1}^2 = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Podobne vypočítame $$\iiint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle\times\langle -1,2\rangle} y\,dx\,dy\,dz = \frac{9}{2}$$

- Pomocou vety o výpočte ukážme, že ak pre všetky $(x,y,z) \in E(\bar{a},\bar{b}) = \langle a_1,b_1\rangle \times \langle a_2,b_2\rangle \times \langle a_3,b_3\rangle$ je

$f(x,y,z) = f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot f_3(z)$ a sú splnené predpoklady vety o výpočte (napr. ak $f \subseteq R^3 \times R$ je spojitá na $E(\bar{a},\bar{b})$) tak

$$\int_{E(\bar{a},\bar{b})} f(\bar{x})\,d\bar{x} = \iiint_{\langle a_1,b_1\rangle\times\langle a_2,b_2\rangle\times\langle a_3,b_3\rangle} f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot f_3(z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x)dx\right)\left(\int_{a_2}^{b_2} f_2(y)dy\right)\left(\int_{a_3}^{b_3} f_3(z)dz\right)$$

skutočne:

$$\iiint_{\langle a_1,b_1\rangle\times\langle a_2,b_2\rangle\times\langle a_3,b_3\rangle} f_1(x)f_2(y)f_3(z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{b_1}\left(\iint_{\langle a_2,b_2\rangle\times\langle a_3,b_3\rangle} f_1(x)f_2(y)f_3(z)\,dy\,dz\right)dx$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} f_1(x)\left(\iint_{\langle a_2,b_2\rangle\times\langle a_3,b_3\rangle} f_2(y)f_3(z)\,dy\,dz\right)dx =$$

$$= \left(\iint_{\langle a_2,b_2\rangle\times\langle a_3,b_3\rangle} f_2(y)f_3(z)\,dy\,dz\right)\left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x)dx\right) =$$

$$= \left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_3}^{b_3} f_2(y)f_3(z)dz\right)dy\right)\left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x)dx\right) =$$

$$= \left(\int_{a_2}^{b_2} f_2(y)\left(\int_{a_3}^{b_3} f(z)dz\right)dy\right)\left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x)dx\right) =$$

$$= \left(\int_{a_3}^{b_3} f(z)dz\right)\left(\int_{a_2}^{b_2} f_2(y)dy\right)\left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x)dx\right).$$

- $\iiint\limits_{\langle -1,1\rangle\times\langle 0,1\rangle\times\langle -1,0\rangle} (x+z)e^{x+y}\,dx\,dy\,dz =$

$$= \iiint\limits_{\langle -1,1\rangle\times\langle 0,1\rangle\times\langle -1,0\rangle} x\,e^x.e^y\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{\langle -1,1\rangle\times\langle 0,1\rangle\times\langle -1,0\rangle} z e^x e^y\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \left(\int_{-1}^{1} xe^x dx\right)\left(\int_0^1 e^y dy\right)\left(\int_{-1}^{0} 1\,dz\right) + \left(\int_{-1}^{1} e^x dx\right)\left(\int_0^1 e^y dy\right)\left(\int_{-1}^{0} z\,dz\right) =$$

$$= \left(\left[xe^x\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x dx\right)\left[e^y\right]_0^1 \left[z\right]_{-1}^{0} + \left[e^x\right]_{-1}^{1}\left[e^y\right]_0^1\left[\frac{z^2}{2}\right]_{-1}^{0} =$$

$$= \left(e+e^{-1}-(e-e^{-1})\right)(e-1).1 + (e-e^{-1})(e-1)\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2e^{-1}(e-1) - \frac{1}{2}\left(e^2-1-e+e^{-1}\right) =$$

$$= 2-2e^{-1}-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}e^{-1} = \underline{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}e^2-\frac{5}{2}e^{-1}}$$

- $\iiint\limits_{\langle -1,1\rangle\times\langle 0,1\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} (x^2+e^y\sin z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\langle -1,1\rangle\times\langle 0,1\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} x^2\,dx\,dy\,dz +$

$$+ \iiint\limits_{\langle -1,1\rangle\times\langle 0,1\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} e^y \sin z\,dx\,dy\,dz = \left(\int_{-1}^{1} x^2 dx\right)\left(\int_0^1 1\,dy\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1.dz\right) +$$

$$+ \left(\int_{-1}^{1} 1\,dx\right)\left(\int_0^1 e^y \cancel{\sin z}\,dy\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin z\,dz\right) = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}\left[y\right]_0^1\left[z\right]_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

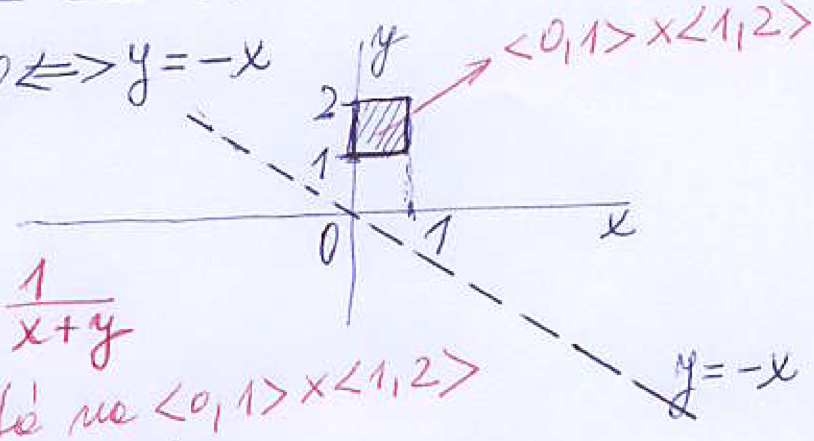
$$+ \left[x\right]_{-1}^{1}\left[e^y\right]_0^1\left[-\cos z\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)(1-0)\left(\frac{\pi}{2}-0\right) +$$

$$+ (1+1)(e-1)\underbrace{\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right)}_{0+1=1} = \underline{\frac{2}{6}\pi + 2(e-1)}$$

$$\iiint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle\times\langle -1,2\rangle} \frac{z}{x+y}\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{2}\Bigg(\iint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle} z\,\frac{1}{x+y}\,dx\,dy\Bigg)dz = (*)$$

pokračuje dolu

pretože: $x+y=0 \Longleftrightarrow y=-x$



$f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$

je spojité na $\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle$

$\Downarrow$ existuje

teda pre každé pevne zvolené $z\in\langle -1,2\rangle$:
$$\iint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle} z\,\frac{1}{x+y}\,dx\,dy = z\iint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle}\frac{1}{x+y}\,dx\,dy$$

pre každé $x\in\langle 0,1\rangle$ existuje $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x+y}\,dy =$
$$= \Big[\ln(x+y)\Big]_1^2 = \ln(x+2) - \ln(x+1)$$

$$(*) = \int_{-1}^{2} z\underbrace{\Bigg(\iint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle}\frac{1}{x+y}\,dx\,dy\Bigg)}_{\text{existuje a je teda = nejaké reálne číslo}}dz = \Bigg(\iint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle}\frac{1}{x+y}\,dx\,dy\Bigg)\cdot\int_{-1}^{2} z\,dz =$$

$$= \Bigg(\int_0^1\Bigg(\int_1^2\frac{1}{x+y}\,dy\Bigg)dx\Bigg)\cdot\underbrace{\Bigg[\frac{z^2}{2}\Bigg]_{-1}^{2}}_{\frac{4}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1\Big[\ln(x+y)\Big]_1^2\,dx = \frac{3}{2}\int_0^1\big(\ln(x+2)-\ln(x+1)\big)\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\Big[(x+2)\ln(x+2) - x - (x+1)\ln(x+1) + x\Big]_0^1 = \underline{\underline{(3\ln 3 - 4\ln 2)\cdot\frac{3}{2}}}$$

$$\iint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle} \frac{x}{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_1^2 \frac{x}{x+y}\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \Big[x \ln(x+y)\Big]_1^2 dx = \int_0^1 \Big(\underbrace{x}_{f_1'}\, \underbrace{\ln(x+2)}_{g_1} - \underbrace{x}_{f_2'}\, \underbrace{\ln(x+1)}_{g_2}\Big) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x+2}dx - \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1 +$$

per partes

$$+ \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2-4)+4}{x+2}dx -$$

$$- \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2-1)+1}{x+1}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x-2+\frac{4}{x+2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - 2x + 4\ln(x+2)\right]_0^1 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} - 2 +$$

$$+ 4\ln 3 - 4\ln 2\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} + \frac{3}{4} - 2\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$$