# KINEMATIKA

**1.** Dva vlaky, z ktorých je jeden dlhý $l_1 = 150$m a druhý $l_2 = 200$m sa stretnú na voľných tratiach. Akú rýchlosť majú oba protiidúce vlaky, keď ich jazda vedľa seba trvá $t = 10$s a keď prvý vlak ubehne za tento čas dráhu $s = 160$m? $[v_1 = 16\mathrm{m.s}^{-1}, v_2 = 19\mathrm{m.s}^{-1}]$

**2.** Akou rýchlosťou $v$ letí a aký smer musí mať lietadlo, aby za čas $t = 1$ hod preletelo v smere na sever dráhu $s = 200$ km, ak počas letu pôsobí severovýchodný vietor pod uhlom $\alpha = 35^o$ k poludníku rýchlosťou $v_1 = 30$ km/hod ? [v = 225.23km.h$^{-1}$, b = 4.38$^o$ k poludníku ]

**3.** Pohyb bodu je určený rovnicami $\mathbf{x} = A_1 t^2 + B_1 1, \mathbf{y} = A_2 t^2 + B_2$, kde $A_1 = 20\ \mathrm{cm.s}^{-2}, A_2 = 15\ \mathrm{cm.s}^{-2}, B_1 = 5\ \mathrm{cm}, B_2 = -3\ \mathrm{cm}$. Nájdite veľkosť aj smer rýchlosti a zrýchlenia v čase $t = 2$ s ! $[v = 2t\sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 1\ \mathrm{m.s}^{-1}, \alpha = 36.87^o$ voči osi $x, a = 2\sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 0.5\ \mathrm{m.s}^{-2}, \beta = \alpha]$

**4.** Bod sa pohybuje po osi $x$ tak, že závislosť jeho dráhy od času ja daná rovnicou $x = k/2(\mathrm{e}^{wt} + \mathrm{e}^{-wt})$, kde $k, w$ sú známe konštanty. Nájdite rýchlosť a zrýchlenie bodu ako funkciu $x$ !( Umocnite výrazy pre x a potom pre rýchlosť.) $[v = w\sqrt{x^2 - k^2}, a = \omega^2 x]$

**5.** Hmotný bod sa pohybuje v rovine tak, že časová závislosť jeho polohového vektora $\mathbf{r} = a\cos(\omega t)\mathbf{i} + a\cos(\omega t + j)\mathbf{j}$, kde $a, j, \omega$ sú známe konštanty. Dokážte, že pre $j = 90^o$ vykonáva rovnomerný pohyb po kružnici a vypočítajte vektor okamžitej rýchlosti hmotného bodu v čase $t$ pre ľubovolné $j$ ! $[x = a\cos(\omega t), y = -a\sin(\omega t), a^2 = x^2 + y^2, \mathbf{v} = -\omega a\{\sin(\omega t)\mathbf{i} + \sin(\omega t + j)\mathbf{j}\}]$

**6.** Vagón sa pohybuje po priamej dráhe so spomalením $a = 0.5\mathrm{ms}^{-2}$. V čase $t_0 = 0$s mal rýchlosť $v_0 = 54$km/h. Za aký čas $t$ a na akej vzdialenosti s sa zastaví ? $[t = \frac{v_0}{a} = 30\mathrm{s}$, s $= \frac{v_0^2}{2a} = 225\mathrm{m}]$.

**7.** Bežec na krátke trate ubehne $s = 100$m za $t = 12$s, z toho prvých $s_1 = 20$m rovnomerne zrýchlene a zvyšok dráhy konštantnou rýchlosťou. Aké má zrýchlenie a akú má rýchlosť, ktorou beží zvyšok trate ? $[a = \frac{(s+s_1)^2}{2s_1 t^2} = 2.5\mathrm{ms}^{-2}, v = \frac{(s+s_1)}{t} = 10\mathrm{ms}^{-1}]$ .

**8.** Akú rýchlosť malo auto, keď vodič po zhliadnutí prekážky až do zastavenia prešiel dráhu $s = 35$m? Jeho reakčný čas $t_r = 0,8$s a brzdil spomalením $a = 6.5\mathrm{ms}^{-2}$. $[v = 16.75\mathrm{ms}^{-1}]$.

**9.** Pozorovateľ stojaci v okamihu rozbehu vlaku pri jeho začiatku zaznamenal, že prvý vagón prešiel popri ňom za čas $t_1 = 4$s. Ako dlho bude popri ňom prechádzať $n$-tý vagón ( $n = 7$ ), keď sú všetky vagóny rovnako dlhé, ak pohyb vlaku je priamočiary rovnomerne zrýchlený ? ( Vyjadrite si zrýchlenie celého vlaku a zrýchlenie vagóna.) $[t_n = t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 0,785\mathrm{s}]$.

**10.** Pozorovateľ stojaci na nástupišti zistil, že prvý vagón vlaku, približujúceho sa k stanici, prešiel okolo neho za čas $t_1 = 4$s a druhý za čas $t_2 = 5$s. Potom vlak zastavil tak, že začiatok vlaku bol $s = 75$m od pozorovateľa. Považujúc pohyb vlaku za priamočiary rovnomerne spomalený, určte spomalenie vlaku! $[a = \frac{2s(t_1-t_2)^2}{\left[\frac{1}{2}(t_1^2-t_2^2)-t_1 t_2\right]^2} = 0.25\mathrm{ms}^{-2}]$.

**11.** Teleso A sa začína pohybovať s počiatočnou rýchlosťou $v_{01} = 2\mathrm{ms}^{-1}$ so stálym zrýchlením $a$. Za čas $\Delta t = 10$s od začiatku pohybu sa z toho istého miesta, začína pohybovať teleso B s počiatočnou rýchlosťou $v_{02} = 12\mathrm{ms}^{-1}$ s tým istým zrýchlením $a$. Pri akom maximálnom zrýchlení $a$ teleso B dohoní teleso A ? [ aby sa stretli v reálnom čase, musí byť $a < \frac{v_{02}-v_{01}}{\Delta t}; a < 1\mathrm{ms}^{-2}$].

**12.** Teleso vykonalo v poslednej sekunde svojho voľného pádu $n$-tinu svojej celkovej dráhy. Ako dlho a z akej výšky padalo? $[t = n\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right), h = \frac{1}{2}g\left[n^2\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)^2\right]]$.

**13.** Teleso vyhodíme z výšky $h$ nad Zemou zvisle nahor s rýchlosťou $v_0$. Za aký čas za ním musíme voľne pustiť z tej istej výšky druhé teleso, aby dopadli na Zem súčasne ? $[\Delta t = \frac{v_0+\sqrt{v_o^2=2gh}-\sqrt{2gh}}{g}]$.

**14.** V miestnosti s výškou $h$ je z podlahy zvislo nahor hodená lopta s počiatočnou rýchlosťou $v_1$. Pri odraze (od stropu aj podlahy ) sa rýchlosť lopty zmenší na hodnotu $v = kv(k < 1)$. Aká musí byť minimálna rýchlosż lopty, aby sa odrazila od stropu dva razy ? $[v_1 > \sqrt{2gh\left(1 - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4}\right)}]$.

**15.** Teleso sa pohybovalo na prvej polovine svojej dráhy rovnomerne zrýchlene a na druhej pokračovalo rovnomeným pohybom. Druhé teleso prebehlo rovnomerne zrýchlene celú dráhu za rovnaký čas. V akom pomere sú zrýchlenia oboch telies? $[\frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{8}]$.

16. Raketa vypustená vo vertikálnom smere sa pohybovala so zrýchlením a počas doby $t_1$ ,kým pracovali motory. Vypočítajte do akej výšky nad Zemou raketa vystúpi, ak zanedbáme odpor vzduchu a závislosť gravitačného zrýchlenia od výšky ! $[h = \frac{1}{2}at_1^2\left(1+\frac{a}{g}\right)]$.

**17.** Teleso bolo vrhnuté po naklonenej rovine smerom nahor. Bod, ktorý sa nachádza vo vzdialenosti $d$ od začiatku pohybu, prebehne teleso dva razy, v čase $t_1$ nahor, a nadol v čase $t_2$ od začiatku pohybu. Určte poèiatoènú rýchlosť telesa $v_0$ a zrýchlenie pohybu $a$! $[v_0 = d\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}, a = \frac{2d}{t_1t_2}]$.

**18.** Elektrický rušeň sa rozbieha z pokoja so zrýchlením, ktoré rovnomerne rastie a to tak, že v čase $t_1 = 100\mathrm{s}$ má zrýchlenie $a_1 = 0.5\mathrm{ms}^{-2}$. Vypočítajte rýchlosť rušňa $v$ čase $t_1$ ako aj dráhu, ktorú rušeň za tento čas prešiel ! $[v_1 = \frac{1}{2}a_1t_1 = 25\mathrm{ms}^{-1}, s_1 = \frac{1}{6}a_1t_1^2 = 833.33\mathrm{m}\ ]$.

**19.** Zrýchlenie hmotného bodu pri jeho priamočiarom pohybe rovnomerne klesá zo začiatočnej hodnoty $a_0 = 10\mathrm{ms}^{-2}$ v čase $t_0 = 0\mathrm{s}$ na nulovú hodnotu v èase $t_1 = 20\mathrm{s}$. Aká je rýchlosť hmotného bodu $v$ èase $t_1$ a akú dráhu za tento čas vykonal, keď v čase $t_0$ bol v pokoji ? $[v_1 = \frac{1}{2}a_ot_1 = 100\ \mathrm{m.s}^{-1}, s_1 = \frac{1}{3}a_0t_1^2 = 1333.3\ \mathrm{m}]$.

**20.** Teleso s počiatočnou rýchlosťou $v_0$ má pod pôsobením brzdiacej sily zrýchlenie $a = -kv^2$ ( k je konštanta ). Určte časovú závislosť rýchlosti a dráhy, ak je pohyb priamočiary? $[v = \frac{v_0}{1+v_0kt}, x = \frac{1}{k}\ln(v_0kt+1)]$.

**21.** Delo je umiestnené na úpätí svahu,ktorý zviera s vodorovnou rovinou uhol $\alpha$ .Nájdite uhol $\beta$, ktorý zviera hlaveň dela so svahom,ak strela vystrelená z dela dopadne na svah pod pravým uhlom! $[\mathrm{cotg}(\alpha) = 2\mathrm{tg}(\beta)]$

**22.** Počiatočná rýchlosť strely z mínometu je $\mathrm{v}_0$ a uhol, ktorý zviera s vodorovnou rovinou je $\alpha$ ($\alpha > 45^0$). Priamo k mínometu sa blíži tank s rýchlosťou $\mathrm{v}_t$. V akej vzdialenosti $\mathrm{d}_1$ tanku od mínometu musí mínomet vystreliť, aby tank zasiahol? V akej vzdialenosti $\mathrm{d}_2$ od mínometu bude tank zasiahnutý? $[\mathrm{d}_1 = \frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{g}}(\mathrm{v}_0\sin(2\alpha) + 2\mathrm{v}_\mathrm{t}\sin(\alpha)), \mathrm{d}_2 = \mathrm{v}_0 2\sin(2\alpha)]$

**23.** Dve telesá sú hodené súčasne z toho istého miesta s počiatočnými rýchlosťami $\mathrm{v}_{01}$ a $\mathrm{vi}_{02}$, ktoré zvierajú s vodorovnou rovinou uhly $\alpha_1$ a $\alpha_2$. Určte závislosť veľkosti a smeru ich vzájomnej rýchlosti od času počas pohybu, ak ich dráhy ležia v jednej rovine! $[\mathbf{v} = (\mathrm{v}_{02}\cos(\alpha_2) - \mathrm{v}_{01}\cos(\alpha_1)\mathbf{i} + (\mathrm{v}_{02}\sin(\alpha_2 - \mathrm{v}_{01}\sin(\alpha_1))\mathbf{j}$, je nezávislá od času, nemení smer ani veľ-kosť. ]

**24.** Dve častice sú vystrelené z toho istého miesta s počiatočnými rýchlosťami $\mathrm{v}_{01}$ a $\mathrm{v}_{02}$ pod uhlami $\alpha_1$ a $\alpha_2$ k vodorovnej rovine ( $\alpha_1 > \alpha_2$ ) tak, aby sa ešte za letu zrazili. Za akú dobu po vystrelení prvej musí byť vystrelená druhá? $[\Delta\mathrm{t} = \frac{2\mathrm{v}_{01}\mathrm{v}_{02}\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\mathrm{g}(\mathrm{v}_{02}\cos(\alpha_2+\mathrm{v}_{01}\cos(\alpha_1)}]$

**25.** Spojnica ústia hlavne a cieľa zviera s vodorovnou rovinou uhol $\phi$ a ich vzdialenosť je d. Určte rýchlosť strely po opustení hlavne, ak hlaveň zviera s vodorovným smerom uhol $\alpha$ ! $[\mathrm{v}_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{gd}\cos^2(\phi)}{2\cos^2(\alpha)(\mathrm{tg}(\alpha)\cos(\phi)-\sin(\phi))}}]$

**26.** Guľôčku sme vystrelili vodorovne vo výške h pri jednej stene. Akú minimálnu rychlosť musíme udeliť guľôčke, aby sa odrazila dva razy od druhej steny pred dopadom na podlahu? Vzdialenosť stien je d a guľôčka pri odraze nestráca žiadnu energiu ( veľkosť rýchlosti sa zachováva a uhol dopadu na stenu je rovný uhlu odrazu ). $[\mathrm{v}_0 > \sqrt{\frac{9\mathrm{gd}^2}{2\mathrm{h}}}]$

**27.** Koleso s polomerom R sa valí po ceste s rýchlosťou v. Kúsky blata sú vymršťované zo všetkých bodov na obvode kolesa. Vypočítajte do akej najväčšej výšky nad cestou môžu vyletovať ! $[\mathrm{h}_{\mathrm{max}} = \mathrm{R} + \frac{\mathrm{R}^2\mathrm{g}}{2\mathrm{v}_0^2} + \frac{\mathrm{v}_0^2}{2\mathrm{g}}]$

**28.** Koleso s polomerom R rotuje s frekvenciou f. Pôsobením brzdiacej sily ho zastavíme za čas $\mathrm{t}_1$. Aké bolo tangenciálne, dostredivé a celkové zrýchlenie počas pohybu ( ak predpokladáme, že tangenciálne zrýchlenie je konštantné ) ? $[\mathrm{a}_\mathrm{t} = \frac{2\pi\mathrm{Rf}}{\mathrm{t}_1}, \mathrm{a}_\mathrm{n} = 4\pi^2\mathrm{Rf}^2\left(1-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{t}_1}\right)^2, \mathrm{a}_\mathrm{c} = 2\pi\mathrm{Rf}\sqrt{\frac{1}{\mathrm{t}_1^2} + 4\pi^2\mathrm{f}^2\left(1-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{t}_1}\right)^4}]$

**29.** Polohový vektor častice závisí od času nasledovne: $\mathbf{r} = \mathrm{t}\ \mathbf{i} + (\mathrm{t} + 0.5\mathrm{t}^2\ )\mathbf{j} + \frac{4}{\pi^2}\sin(\phi t/2)\ \mathbf{k}$. Vypočítajte veľkosť rýchlosti, tangenciálneho a celkového zrýchlenia v čase $\mathrm{t}_1$ ! $[\mathrm{v} = \sqrt{1 + (1+\mathrm{t}_1)^2 + \frac{4}{\pi^2}\cos^2(\frac{\pi}{2}\mathrm{t}_1)},$ $\mathrm{a}_\mathrm{t} = \frac{1+\mathrm{t}_1-\frac{1}{\pi}\sin(\pi\mathrm{t}_1)}{\sqrt{1+(1+\mathrm{t}_1^2+\frac{4}{\pi^2}\cos^2(\frac{\pi}{2}\mathrm{t}_1)}}, \mathrm{a}_\mathrm{c} = \sqrt{1+\sin^2(\frac{\pi}{2}\mathrm{t}_1)}]$

**30.** Hmotný bod sa pohybuje z pokoja po kružnici s polomerom R tak, že jeho uhlová súradnica závisí od času nasledovne $\phi = \mathrm{A} + \mathrm{Bt}^3$, kde A,B sú konštanty. Vypočítajte veľkosť tangenciálneho, dostredivého a celkového zrýchlenia v čase $\mathrm{t}_1$. V akom čase $\mathrm{t}_2$ bude uhol medzi vektorom rýchlosti a vektorom celkového zrýchlenia $\alpha$ ? $[\mathrm{a}_\mathrm{t} = 6\mathrm{RBt}_1, \mathrm{a}_\mathrm{n} = 9\mathrm{RB}^2\mathrm{t}_1^4, \mathrm{a}_\mathrm{c} = 3\mathrm{RBt}_1\sqrt{4+9\mathrm{B}^2\mathrm{t}_1^6}, \mathrm{t}_2 = \sqrt[3]{\frac{2tg(\alpha)}{3B}}]$

**31.** Koleso sa otáča tak, že závislosť uhla otočenia polomeru kolesa od času má tvar $\varphi = A + Bt + Ct^2 +$ $Dt^3$ , kde A = 1 rad, B = 1 rad.$s^{-1}$, C = 1 rad.$s^{-2}$, d = 1 rad.$s^{-3}$. Nájdite polomer kolesa R, ak vieme, že na konci druhej sekundy pohybu normálové zrýchlenie $a_n = 346$ m.$s^{-2}$ ! $[R = \frac{a_n}{(B+2Ct+3Dt^2)^2} = 1.2m]$

**32.** Počet otáčok brúsneho kotúča sa poèas t = 10 s zníži z $n_1 = 3000$ ot.$min^{-1}$ na $n_2 = 2000$ ot.$min^{-1}$. Koľko ráz sa otočí kotúč v uvedenom čase ? $[z = \frac{n_1+n_2}{2}t = 416.65$ ]

**33.** Počas t = 5 s koleso vykoná z = 120 otáčok, pričom sa zdvojnásobí uhlová rýchlosť kolesa. Aká je uhlová rýchlosť na začiatku a na konci tohto deja, ak uhlové zrýchlenie je konštantné ? $[\omega_0 = \frac{4\pi z}{3t} = 100.53s^{-1}$, $\omega_1 = 201.06s^{-1}]$

**34.** Koleso rozbiehajúce sa zo stavu pokoja vykoná v druhej sekunde z = 16 otáčok. Aké je uhlové zrýchlenie kolesa $\epsilon$ , ak je konštantné? $[\epsilon = \frac{4\pi z}{t_2^2 - t_1^2} = 67.02s^{-2}]$

**35.** Bod sa pohybuje po kružnici s polomerom R = 0,1 m s komštantným tangenciálnym zrýchlením $a_t$. Na konci piatej otáčky má obvodovú rýchlosť $v_5 = 0{,}1$ m.$s^{-1}$.

1. Aký čas $t_5$ uplynul od začiatku pohybu, kým bod získal rýchlosť $v_5$ ?
2. Aká je veľkosť normálového zrýchlenia $a_{n1}$ v čase $t_1 = 10$ s od začiatku pohybu ?
3. Aké je celkové zrýchlenie a bodu v čase $t_1$ od začiatku pohybu ?

$[t_5 = \frac{4\pi Rn}{v_5} = 20\pi s, a_n = \frac{t_1^2 v_5^4}{R^3 400\pi^2} = \frac{1}{40\pi^2} m.s^{-2}, a = \frac{1}{40\pi}\sqrt{\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{5}} = 2.99.10^{-3} m.s^{-2}]$

**36.** Bod sa pohybuje z pokoja po kružnici s polomerom R = 0.2 m s konštantným tangenciálnym zrýchlením $a_t$. Aké je normálové zrýchlenie $a_{n1}$ v čase $t_1 = 20$ s od začiatku pohybu, keď na konci tretej otáčky mal obvodovú rýchlosť $v_3 = 0{,}2$ m.$s^{-1}$ ? $[a_{n1} = \frac{v_3^4 t_1^2}{R^3 144\pi^2} = 0.0563 m.s^{-2}]$

**37.** Bod sa pohybuje po kružnici s polomerom R tak, že prebehnutá dráha s = $v_0$ t - 0.5 k $t^2$, kde k,$v_0$ sú konštanty. Určte

1. veľkosť tangenciálneho zrýchlenia
2. veľkosť normálového zrýchlenia
3. veľkosť celkového zrýchlenia
4. v ktorom čase $t_x$ je celkové zrýchlenie rovné konštante k ?
5. počet obehov $n_x$ bodu za čas $t_x$ !

$[a_t = -k, a_n = \frac{(v_0 - kt)^2}{R}, a = \sqrt{k^2 + \frac{(v_0-kt)^4}{R^2}}, t_x = \frac{v_0}{k}, n_x = \frac{v_0^2}{4\pi Rk}]$

**38.** Koleso s polomerom r = 0.3 m sa dáva do pohybu pomocou namotaného vlákna, na ktorom je zavesené závažie. Za čas t = 12 s klesne závažie o h = 5.4 m. Akú má frekvenciu f a koľko otočení z vykoná koleso za tento čas? $[f = \frac{h}{\pi rt} = 0.47746s^{-1}, z = \frac{h}{2\pi r} = 2.864$ ]

**39.** Koleso s polomerom R sa začína valiť po vodorovnej ceste tak, že jeho stred sa pohybuje so zrýchlením $a_0$. Vypočítajte rýchlosť a zrýchlenie bodu na obvode kolesa, ktorý sa na začiatku pohybu dotýka cesty, ako funkciu času ! Smery v a a určte pre uhol pootočenia kolesa z pôvodnej polohy o $30^o$ len graficky na obrázku. (Riešte ako zložený pohyb - sústava S' sa bude pohybovať priamočiaro so zrýchlením $a_0$.) $[\ v = v_0 + v',\ \text{kde}\ v' = a_0 t, a = a_0 + a',\ \text{kde}\ a' = \frac{a_0^2 t^2}{R}]$

**40.** Hmotný bod sa pohybuje z vrcholu kužeľa pozdåž povrchovej priamky so zrýchlením $a_0$ vzhľadom na kužeľ. Vypočítajte veľkosť rýchlosti a zrýchlenia v čase t, ak kužeľ rotuje s uhlovou rýchlosťou $\omega$ a povrchová priamka zviera uhol $\alpha$ s osou kužeľa ! $[v = a_0 t\sqrt{1 + \frac{1}{4}t^2\omega^2\sin^2(\alpha)}, a = a_o\sqrt{1 + \omega^2 t^2 \sin^2(\alpha)\left(4 + \frac{1}{4}\omega^2 t^2\right)}\ ]$