

1. Akú prácu  $W$  vykonal hráč kolkov pri vrhu gule, valiacej sa rýchlosťou  $v = 30$  km/hod. ? Guľa je homogénna, hmotnosti  $m = 5$  kg .

$$[ W = 7/10 mv^2 = 243 \text{ J} ]$$

2. Akými silami je namáhané lano, prevesené cez kladku s polomerom  $R$  a momentom zotrvačnosti  $J$  ( vzhľadom na jej os otáčania), na konci ktorého sú upevnené bremená s hmotnosťami  $m$  a  $M$  ak sa bremená samovoľne pohybujú ?

$$[ f_m = gm \frac{2M+J/R^2}{M+m+J/R^2}, f_M = gM \frac{2m+J/R^2}{M+m+J/R^2} ]$$

3. Majme dva zotrvačníky umiestnené na osi a oddelené trecou spojku. Keď je spojka rozpojená roztočíme prvý zotrvačník s momentom zotrvačnosti  $J_1$ . Potom zapneme spojku, čím sa roztočí aj druhý zotrvačník. Aký má byť moment zotrvačnosti druhého zotrvačníka  $J_2$ , aby sa na druhý zotrvačník preniesla maximálna energia ?

$$[ J_2 = J_1 ]$$

4. Aká je napínacia sila  $f$  vlákna matematického kyvadla hmotnosti  $m$  v závislosti od uhla  $\varphi$ , ktorý zvierá vlákno so zvislicou, ak jeho amplitúda je  $\varphi_0$  ?

$$[ f = mg(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0) ]$$

5. Aká je uhlová rýchlosť  $\omega$  homogénnej tenkej tyče, ktorá sa môže otáčať okolo osi kolmej na tyč prechádzajúcej jej ťažiskom, ak v nej uviazne strela s hmotnosťou  $m$  vo vzdialenosti  $L/2$  od ťažiska? Strela dopadla rýchlosťou  $v$  kolmou na tyč aj os otáčania tyče. Hmotnosť tyče je  $M$  a jej dĺžka  $2L$ .

$$[ \omega = \frac{6m}{3m+4M} \cdot \frac{v}{L} ]$$

6. Na homogénnom plnom válci, ktorý sa môže otáčať okolo svojej osi symetrie, je namotané tenké lanko. Os má vodorovnú polohu. Na jednom konci lanka visí bremeno hmotnosti  $m$ , druhý je upevnený na valci. Akou silou je namáhané lanko, ak necháme bremeno samovoľne sa pohybovať? Válec má polomer  $R$  a hmotnosť  $M$ . Trecie sily aj hmotnosť lanka zanedbajte!

$$[ f = \frac{Mm}{M+2m} g ]$$

7. Aká časť kinetickej energie sa "stratila" pri centrálnej zrážke dvoch gúľ s hmotnosťami  $m$  a  $M$ , ktorých rýchlosti pred zrážkou boli  $v$  a  $0$  a po zrážke boli rovnaké ?

$$[ \frac{M}{M+m} ]$$

8. Cez kladku zanedbateľnej hmotnosti je prevesené lano, na koncoch ktorého sú upevnené bremená s hmotnosťami  $m$  a  $M$ . Určte silu  $F$ , ktorou je namáhaný záves kladky, ak sa bremená samovoľne pohybujú!

$$[ F = \frac{4mM}{m+M} g ]$$

9. Určte redukovanú dĺžku kyvadla tvaru homogénneho kruhového kotúča s polomerom  $R$ , ktoré kýva okolo vodorovnej osi kolmej na kotúč a prechádzajúcej bodom na obvode kotúča.

$$[ \frac{3}{2} R ]$$

10. Po naklonenej rovine pustíme homogénnu dutú guľu. Guľa sa bude valiť bez šmýkania a po poklese jej výšky o hodnotu  $h$  nadobudne rýchlosť  $v$ . Aké hodnoty môže nadobúdať pomer translačnej časti kinetickej energie a zmeny potenciálnej energie  $\eta = v^2/2gh$ ?

$$[ \eta \in \langle \frac{3}{5}, \frac{5}{7} \rangle ]$$

11. Dve rovnaké pružné guľky visia na nitiach rovnakej dĺžky vedľa seba. Prvú vychýlime o uhol  $\alpha$  a pustíme. O aký maximálny uhol sa po zrážke vychýli druhá guľka?

$$[ \alpha ]$$

12. Loďka s dĺžkou  $d$  a hmotnosťou  $m_0$  stojí na pokojnej hladine vody. Človek s hmotnosťou  $m$  prejde z jedného jej konca na druhý. O akú vzdialenosť  $x$  sa pri tom loďka posunie?

$$[ x = d \frac{m}{m+m_0} ]$$

13. Tenkú homogénnu polkruhovou dosku zavesíme na jednom rohu. O aký uhol  $\alpha$  je priemer dosky odklonený od zvislice za rovnováhy?

$$[ \alpha = \arctan(\frac{4}{3\pi}) ]$$

14. Drôt ohnutý do tvaru rovnoramenného trojuholníka so stranami  $a$ ,  $b$ ,  $b$  je zavesený vo vrchole pri strane  $a$ . O aký uhol  $\alpha$  je v rovnovážnej polohe odklonená strana  $a$  od zvislého smeru?

$$[ \alpha = \arctan \frac{b}{a} \sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}} ]$$

15. Homogénny plech tvaru pravouhlého trojuholníka s preponou  $c$  visí vo vrchole oproti prepone. Aká je redukovaná dĺžka  $l$  takéhoto fyzikálneho kyvadla ak jeho os otáčania je vodorovná a kolmá na rovinu plechu?

$$[ l = c/2 ]$$

16. Majme priamu tenkú homogénnu tyč dĺžky  $L$ . V akej vzdialenosti  $d$  od konca treba zvoliť vodorovnú os otáčania, kolmú na tyč, aby tyč kývala okolo nej s minimálnou dobou kyvu?

$$[ d = \frac{L}{2}(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}) ]$$

17. Nájdite vzdialenosť  $r$  ťažiska homogénneho drôtu ohnutého do tvaru štvrtkružnice s polomerom  $R$  od jej stredú!

$$[ r = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}R ]$$

18. Aká je ťažná sila  $f$  raketového motora, z ktorého trysky unikajú za jednotku času plyny o hmotnosti  $\mu$  relatívnou rýchlosťou  $v$ ?

$$[ f = \mu \cdot v ]$$

19. Otáčavé javisko sa zotrvačnosťou otáča okolo svojho stredú uhlovou rýchlosťou  $\omega$ . Na jeho okraji, vo vzdialenosti  $R$  od stredú stojí človek s hmotnosťou  $m$ . Akú prácu  $W$  vykoná, keď prejde do stredú javiska? Moment zotrvačnosti javiska je  $J$ .

$$[ W = \frac{1}{2}J\omega^2 x(1+x), \text{ kde } x = \frac{mR^2}{J} ]$$

20. V molekule amoniaku ( $NH_3$ ) sú ťažiská atómov vodíka navzájom vzdialené o  $a=6,28 \cdot 10^{-11}m$ , vzdialenosť vodík - dusík je  $b=10,14 \cdot 10^{-11}m$ . Určte vzdialenosť ťažiska molekuly amoniaku  $c$  od atómu dusíka keď vieme, že pomer atomových hmotností dusíka a vodíka  $\gamma = 13,9$ !

$$[ c = \frac{\sqrt{b^2 - a^2/3}}{1 + \gamma/3} = 1,41 \cdot 10^{-11}m ]$$

21. Do protónu, ktorý je v pokoji vzhľadom na pozorovateľa pružne narazí druhý protón a odchýli sa od pôvodného smeru pohybu. Aký uhol zvierajú rýchlosti oboch protónov po zrážke?

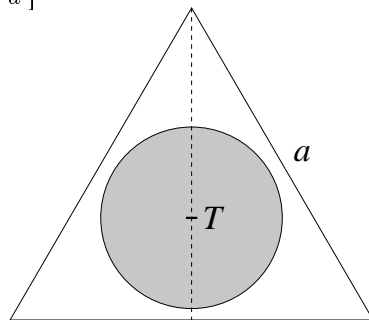
$$[ \pi/2 ]$$

22. Stredy dvoch plných homogénnych gúľ s polormi  $R_1 < R_2$ , zhotovených z rovnakého materiálu, sú od seba vzdialené o  $l$ . Dokážte, že ťažisko tejto sústavy  $\mathbf{r}^*$  je v tom istom mieste ako ťažisko hmotných bodov s hmotnosťami gúľ, ležiacich v mieste stredov gúľ  $\mathbf{r}_1^*$  a  $\mathbf{r}_2^*$ . V akej vzdialenosti od stredú menšej gule sa nachádza ťažisko tejto sústavy?

$$[ \text{Priamym výpočtom treba ukázať, že platí vzťah: } \mathbf{r}^* = (M_1\mathbf{r}_1^* + M_2\mathbf{r}_2^*)/(M_1 + M_2); x^* = \frac{R_2^3}{R_1^3 + R_2^3}l ]$$

23. V homogénnej tenkej doske tvaru rovnostranného trojuholníka so stranou  $a$  vyrežeme kruhový otvor s polomerom  $a/4$  tak, že jeho stred leží práve v ťažisku trojuholníka. V akej vzdialenosti  $b$  od strany trojuholníka leží ťažisko dosky po vyrezaní kruhového otvoru?

$$[ \text{Poloha ťažiska sa nezmení; } b = \frac{\sqrt{3}}{6}a ]$$



24. Dve telesá tvaru plnej gule rovnakej hmotnosti s rôznymi polormi sa súčasne valia z kľudového stavu bez valivého odporu po naklonenej rovine dĺžky  $l$  s uhlom sklonu  $\alpha$ . Ktorá guľa sa dostane skôr na koniec naklonenej roviny? Za aký čas sa každá z gúľ dokotúľa? (Moment zotrvačnosti gule vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom je  $J^* = 2/5 mR^2$ )

♠(Návod: Guľa sa bude pohybovať s konštantným zrýchlením lebo sily pôsobiace na ňu sú konštantné. Potom stačí určiť rýchlosť na konci dráhy s použitím zákona zachovania energie a z nej čas pohybu  $t$ .)

$$[ t = \sqrt{\frac{14l}{5g \sin \alpha}} ]$$

25. Valec a guľa tej istej hmotnosti a polomeru mali v spodnej časti naklonenej roviny s uhlom sklonu  $\alpha$  rovnakú začiatočnú rýchlosť  $v$ . Ktoré z telies sa po naklonenej rovine smerom nahor dokotúľa ďalej? O aký dráhový úsek?

$$[ \text{Valec sa dokotúľa ďalej o } \Delta s = \frac{v^2}{20g \sin \alpha} ]$$

26. Koleso upravené takýmto spôsobom namontované na hĺbkoch  $l$  do kolies (sú v strede) pohybuje vo zvislej rovine do hĺbky  $l$ . Za aký čas sa vráti do hornej polohy? (Moment zotrvačnosti kolesa na hriadieli vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom je  $J$ , hmotnosť kolesa je  $m$ .)

♠(Návod: Použite zákon zachovania energie na určenie rýchlosti pohybu osi kolesa. Potom dokážte, že tento pohyb je rovnomerne zrýchlený a zo známej rýchlosti a dráhy určíte čas  $t$ .)

$$[ t = \sqrt{\frac{8l(J+mR^2)}{mgR^2}} ]$$

27. Vypočítajte polohu ťažiska homogénneho rotačného kužeľa s výškou  $h$ !

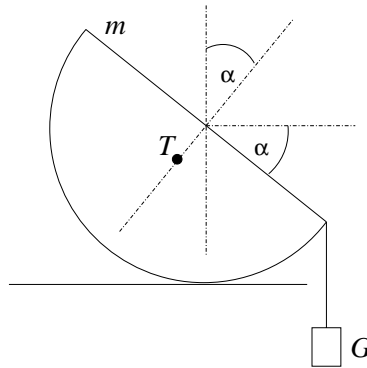
$$[ y^* = h/4 ]$$

28. Nájdite polohu ťažiska homogénneho telesa tvaru tenkej polkruhovej dosky s polomerom  $R$ !

$$[ y^* = \frac{4R}{3\pi} ]$$

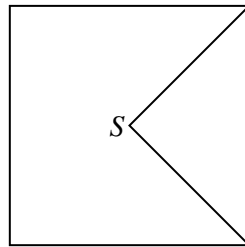
29. Závažie tiaže  $G$  je zavesené na okraji polgule hmotnosti  $m$ , pričom guľa je položená na vodorovnej podložke. Ako bude naklonená guľa v stave rovnováhy ( $\alpha = ?$ ) ?

$$[ \alpha = \arctan \frac{8G}{3mg} ]$$



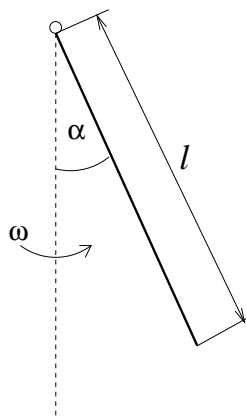
30. Zo štvorca so stranou  $a$  vystrihneme trojuholník podľa obrázku. Nájdite vzdialenosť  $x^*$  ťažiska tohto útvaru od stredu štvorca!

$$[ x^* = -a/9 ]$$



31. Tyč dĺžky  $l$  upevnená na zvislej osi otáčania kĺbovým mechanizmom rotuje s konštantnou uhlovou rýchlosťou. Aká musí byť táto uhlová rýchlosť, aby tyč bola pôsobením odstredivých síl vychýlená o uhol  $\alpha$  od zvislej polohy?

$$[ \omega = \sqrt{\frac{3g}{2l \cos \alpha}} ]$$



32. Valcový zotrvačník s celkovým momentom zotrvačnosti  $J$  má pri práci motora uhlovú rýchlosť  $\omega_0$ . Ak motor vypneme, zotrvačník sa pôsobením síl trenia zastaví za čas  $t$ . Aký je moment síl trenia (predpokladáme, že je konštantný)? Akú prácu bolo potrebné vykonať na úplné zastavenie zotrvačníka? Koľko otáčok zotrvačník vykonal od vypnutia motora do svojho úplného zastavenia?

$$[ D = \frac{J\omega_0}{t}; A = \frac{1}{2}J\omega_0^2; n = \frac{\varphi(t)}{2\pi} = \frac{\omega_0 t}{4\pi} ]$$

33. Zotrvačník tvaru homogénneho plného valca polomeru  $R$  a hmotnosti  $m$  sa roztáča z kľudového stavu pôsobením motora s uhlovým zrýchlením  $\varepsilon$ . Akú prácu vykoná motor za čas  $t$ ? Akú veľkosť má krútiaci moment, pôsobiaci na zotrvačník? (Trenie neuvažujeme.)

34. Teleso tvaru tenkého tuhého drôtu ohnutého do tvaru polkružnice s polomerom  $R$  je zavesené na klinici zatĺčenom v stene tak, že stred polkružnice je v kľudovom stave zvislo pod klincom. Ak teleso vychýlime z rovnovážnej polohy, kýva ako fyzikálne kyvadlo. Aká je doba kmitu tohto kyvadla?

♠(Návod: Moment zotrvačnosti drôtu vzhľadom na os otáčania vypočítajte s použitím Steinerovej vety z momentu zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu stredom polkružnice.)

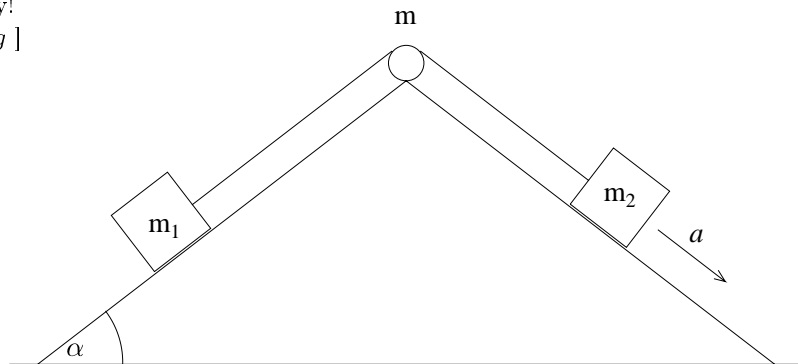
$$[ T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}} ]$$

35. Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej kruhovej dosky hmotnosti  $M$  a polomeru  $R$  vzhľadom na os a prekrývajúcu sa s priemerom dosky!

$$[ J = \frac{1}{4}MR^2 ]$$

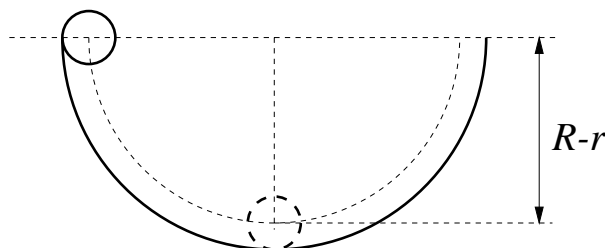
36. Cez kladku hmotnosti  $m$  sú na (pod osou kladky) symetricky umiestnených naklonených rovinách, zvierajúcich s vodorovnou rovinou uhol  $\alpha$ , uložené a lankom spojené dve telesá hmotnosti  $m_1$  a  $2m_1$ . Sústava sa pohybuje (bez trenia) v dôsledku prevažujúcej tiaže druhého telesa. Vypočítajte zrýchlenie sústavy!

$$[ a = \frac{m_1 \sin \alpha}{3m_1 + m/2}g ]$$



37. V žľabe vyfrézovanom tak, že jeho polomer je  $R$ , sa od jedného okraja k druhému valí guľôčka polomeru  $r$  ( $r < R$ ) bez trenia, len vplyvom vlastnej tiaže. Aká bude rýchlosť guľôčky v spodnom bode žľabu?

$$[ v = \sqrt{\frac{10}{7}g(R-r)} ]$$



38. Na člne stojí poľovník s puškou. Hmotnosť člna, pušky a člna je spolu  $m_1$ . Poľovníka vystrelí z pušky náboj hmotnosti  $m_2$ . V dôsledku spätného nárazu sa čln spolu s poľovníkom začne pohybovať opačným smerom, ako je smer výstrelu. Odpor vody zanedbávame. Aký je pomer kinetických energií náboja a poľovníka s člnom a puškou v okamihu tesne po výstrele?

$$[ \frac{K_2}{K_1} = \frac{m_1}{m_2} ]$$

39. Rebrík dĺžky  $l$  s ťažiskom vo vzdialenosti  $l/3$  od spodného konca rebríka je opretý o stenu tak, že s podlahou zvierá uhol  $\alpha$ . Koeficient trenia rebríka o podlahu je  $\mu$ . Trenie o stenu je zanedbateľné. Do akej výšky od podlahy môže vystúpiť chlapec hmotnosti trikrát väčšej, ako je hmotnosť rebríka, aby rebrík ešte neskĺzol na zem?

$$[ h = l \sin \alpha \cdot (12\mu \tan \alpha - 1)/9 ]$$

40. Dve homogénne gule z rovnakého materiálu s polermi  $R$  a  $2R$  sú spolu zlepené. Určte moment zotrvačnosti tejto sústavy vzhľadom na os kolmú na spojnicu stredov gulí, prechádzajúcu ťažiskom tejto sústavy, ak jej hmotnosť je  $M$ .

$$[ J = \frac{106}{45}MR^2 ]$$