

1. Akú prácu W vykonal hráč kolkov pri vrhu gule, valiacej sa rýchlosťou $v = 30$ km/hod. ? Guľa je homogénna, hmotnosti $m = 5$ kg .

$$[W = 7/10 mv^2 = 243 \text{ J}]$$

2. Akými silami je namáhané lano, prevesené cez kladku s polomerom R a momentom zotrvačnosti J (vzhľadom na jej os otáčania), na konci ktorého sú upevnené bremená s hmotnosťami m a M ak sa bremená samovoľne pohybujú ?

$$[f_m = gm \frac{2M+J/R^2}{M+m+J/R^2}, f_M = gM \frac{2m+J/R^2}{M+m+J/R^2}]$$

3. Majme dva zotrvačníky umiestnené na osi a oddelené trecou spojku. Keď je spojka rozpojená roztočíme prvý zotrvačník s momentom zotrvačnosti J_1 . Potom zapneme spojku, čím sa roztočí aj druhý zotrvačník. Aký má byť moment zotrvačnosti druhého zotrvačníka J_2 , aby sa na druhý zotrvačník preniesla maximálna energia ?

$$[J_2 = J_1]$$

4. Aká je napínacia sila f vlákna matematického kyvadla hmotnosti m v závislosti od uhla φ , ktorý zvierá vlákno so zvislicou, ak jeho amplitúda je φ_0 ?

$$[f = mg(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0)]$$

5. Aká je uhlová rýchlosť ω homogénnej tenkej tyče, ktorá sa môže otáčať okolo osi kolmej na tyč prechádzajúcej jej ťažiskom, ak v nej uviazne strela s hmotnosťou m vo vzdialenosti $L/2$ od ťažiska? Strela dopadla rýchlosťou v kolmou na tyč aj os otáčania tyče. Hmotnosť tyče je M a jej dĺžka $2L$.

$$[\omega = \frac{6m}{3m+4M} \cdot \frac{v}{L}]$$

6. Na homogénnom plnom válci, ktorý sa môže otáčať okolo svojej osi symetrie, je namotané tenké lanko. Os má vodorovnú polohu. Na jednom konci lanka visí bremeno hmotnosti m , druhý je upevnený na valci. Akou silou je namáhané lanko, ak necháme bremeno samovoľne sa pohybovať? Válec má polomer R a hmotnosť M . Trecie sily aj hmotnosť lanka zanedbajte!

$$[f = \frac{Mm}{M+2m} g]$$

7. Aká časť kinetickej energie sa "stratila" pri centrálnej zrážke dvoch gúľ s hmotnosťami m a M , ktorých rýchlosti pred zrážkou boli v a 0 a po zrážke boli rovnaké ?

$$[\frac{M}{M+m}]$$

8. Cez kladku zanedbateľnej hmotnosti je prevesené lano, na koncoch ktorého sú upevnené bremená s hmotnosťami m a M . Určte silu F , ktorou je namáhaný záves kladky, ak sa bremená samovoľne pohybujú!

$$[F = \frac{4mM}{m+M} g]$$

9. Určte redukovanú dĺžku kyvadla tvaru homogénneho kruhového kotúča s polomerom R , ktoré kýva okolo vodorovnej osi kolmej na kotúč a prechádzajúcej bodom na obvode kotúča.

$$[\frac{3}{2} R]$$

10. Po naklonenej rovine pustíme homogénnu dutú guľu. Guľa sa bude valiť bez šmýkania a po poklese jej výšky o hodnotu h nadobudne rýchlosť v . Aké hodnoty môže nadobúdať pomer translačnej časti kinetickej energie a zmeny potenciálnej energie $\eta = v^2/2gh$?

$$[\eta \in \langle \frac{3}{5}, \frac{5}{7} \rangle]$$

11. Dve rovnaké pružné guľky visia na nitoch rovnakej dĺžky vedľa seba. Prvú vychýlime o uhol α a pustíme. O aký maximálny uhol sa po zrážke vychýli druhá guľka?

$$[\alpha]$$

12. Loďka s dĺžkou d a hmotnosťou m_0 stojí na pokojnej hladine vody. Človek s hmotnosťou m prejde z jedného jej konca na druhý. O akú vzdialenosť x sa pri tom loďka posunie?

$$[x = d \frac{m}{m+m_0}]$$

13. Tenkú homogénnu polkruhovou dosku zavesíme na jednom rohu. O aký uhol α je priemer dosky odklonený od zvislice za rovnováhy?

$$[\alpha = \arctan(\frac{4}{3\pi})]$$

14. Drôt ohnutý do tvaru rovnoramenného trojuholníka so stranami a , b , b je zavesený vo vrchole pri strane a . O aký uhol α je v rovnovážnej polohe odklonená strana a od zvislého smeru?

$$[\alpha = \arctan \frac{b}{a} \sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}]$$

15. Homogénny plech tvaru pravouhlého trojuholníka s preponou c visí vo vrchole oproti prepone. Aká je redukovaná dĺžka l takéhoto fyzikálneho kyvadla ak jeho os otáčania je vodorovná a kolmá na rovinu plechu?

$$[l = c/2]$$

16. Majme priamu tenkú homogénnu tyč dĺžky L . V akej vzdialenosti d od konca treba zvoliť vodorovnú os otáčania, kolmú na tyč, aby tyč kývala okolo nej s minimálnou dobou kyvu?

$$[d = \frac{L}{2}(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3})]$$

17. Nájdite vzdialenosť r ťažiska homogénneho drôtu ohnutého do tvaru štvrtkružnice s polomerom R od jej stredu!

$$[r = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}R]$$

18. Aká je ťažná sila f raketového motora, z ktorého trysky unikajú za jednotku času plyny o hmotnosti μ relatívnou rýchlosťou v ?

$$[f = \mu \cdot v]$$

19. Otáčavé javisko sa zotrvačnosťou otáča okolo svojho stredu uhlovou rýchlosťou ω . Na jeho okraji, vo vzdialenosti R od stredu stojí človek s hmotnosťou m . Akú prácu W vykoná, keď prejde do stredu javiska? Moment zotrvačnosti javiska je J .

$$[W = \frac{1}{2}J\omega^2 x(1+x), \text{ kde } x = \frac{mR^2}{J}]$$

20. V molekule amoniaku (NH_3) sú ťažiská atómov vodíka navzájom vzdialené o $a=6,28 \cdot 10^{-11}m$, vzdialenosť vodík - dusík je $b=10,14 \cdot 10^{-11}m$. Určte vzdialenosť ťažiska molekuly amoniaku c od atómu dusíka keď vieme, že pomer atomových hmotností dusíka a vodíka $\gamma = 13,9$!

$$[c = \frac{\sqrt{b^2 - a^2/3}}{1 + \gamma/3} = 1,41 \cdot 10^{-11}m]$$

21. Do protónu, ktorý je v pokoji vzhľadom na pozorovateľa pružne narazí druhý protón a odchýli sa od pôvodného smeru pohybu. Aký uhol zvierajú rýchlosti oboch protónov po zrážke?

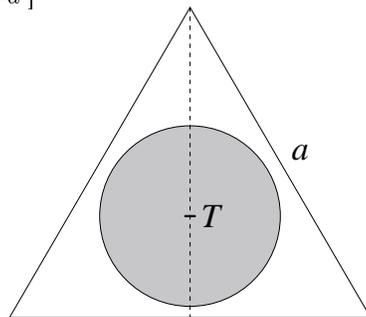
$$[\pi/2]$$

22. Stredy dvoch plných homogénnych gúľ s polormi $R_1 < R_2$, zhotovených z rovnakého materiálu, sú od seba vzdialené o l . Dokážte, že ťažisko tejto sústavy \mathbf{r}^* je v tom istom mieste ako ťažisko hmotných bodov s hmotnosťami gúľ, ležiacich v mieste stredov gúľ \mathbf{r}_1^* a \mathbf{r}_2^* . V akej vzdialenosti od stredu menšej gule sa nachádza ťažisko tejto sústavy?

$$[\text{Priamym výpočtom treba ukázať, že platí vzťah: } \mathbf{r}^* = (M_1\mathbf{r}_1^* + M_2\mathbf{r}_2^*)/(M_1 + M_2); x^* = \frac{R_2^3}{R_1^3 + R_2^3}l]$$

23. V homogénnej tenkej doske tvaru rovnostranného trojuholníka so stranou a vyrežeme kruhový otvor s polomerom $a/4$ tak, že jeho stred leží práve v ťažisku trojuholníka. V akej vzdialenosti b od strany trojuholníka leží ťažisko dosky po vyrezaní kruhového otvoru?

$$[\text{Poloha ťažiska sa nezmení; } b = \frac{\sqrt{3}}{6}a]$$



24. Dve telesá tvaru plnej gule rovnakej hmotnosti s rôznymi polormi sa súčasne valia z kľudového stavu bez valivého odporu po naklonenej rovine dĺžky l s uhlom sklonu α . Ktorá guľa sa dostane skôr na koniec naklonenej roviny? Za aký čas sa každá z gúľ dokotúľa? (Moment zotrvačnosti gule vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom je $J^* = 2/5 mR^2$)

♠(Návod: Guľa sa bude pohybovať s konštantným zrýchlením lebo sily pôsobiace na ňu sú konštantné. Potom stačí určiť rýchlosť na konci dráhy s použitím zákona zachovania energie a z nej čas pohybu t .)

$$[t = \sqrt{\frac{14l}{5g \sin \alpha}}]$$

25. Valec a guľa tej istej hmotnosti a polomeru mali v spodnej časti naklonenej roviny s uhlom sklonu α rovnakú začiatočnú rýchlosť v . Ktoré z telies sa po naklonenej rovine smerom nahor dokotúľa ďalej? O aký dráhový úsek?

$$[\text{Valec sa dokotúľa ďalej o } \Delta s = \frac{v^2}{20g \sin \alpha}]$$

26. Koleso upravené takýmto spôsobom namontované na hĺbkoch l do kolies (sú v strede) pohybuje vo zvislej rovine do hĺbky l . Za aký čas sa vráti do hornej polohy? (Moment zotrvačnosti kolesa na hriadieli vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom je J , hmotnosť kolesa je m .)

♠(Návod: Použite zákon zachovania energie na určenie rýchlosti pohybu osi kolesa. Potom dokážte, že tento pohyb je rovnomerne zrýchlený a zo známej rýchlosti a dráhy určíte čas t .)

$$[t = \sqrt{\frac{8l(J+mR^2)}{mgR^2}}]$$

27. Vypočítajte polohu ťažiska homogénneho rotačného kužeľa s výškou h !

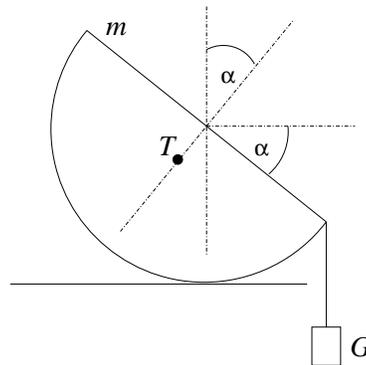
$$[y^* = h/4]$$

28. Nájdite polohu ťažiska homogénneho telesa tvaru tenkej polkruhovej dosky s polomerom R !

$$[y^* = \frac{4R}{3\pi}]$$

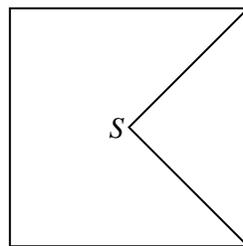
29. Závažie tiaže G je zavesené na okraji polgule hmotnosti m , pričom guľa je položená na vodorovnej podložke. Ako bude naklonená guľa v stave rovnováhy ($\alpha = ?$) ?

$$[\alpha = \arctan \frac{8G}{3mg}]$$



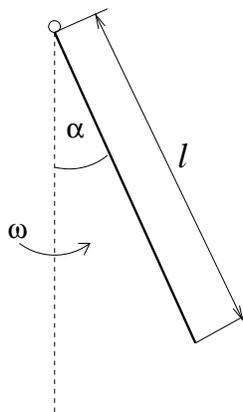
30. Zo štvorca so stranou a vystrihne trojuholník podľa obrázku. Nájdite vzdialenosť x^* ťažiska tohto útvaru od stredu štvorca!

$$[x^* = -a/9]$$



31. Tyč dĺžky l upevnená na zvislej osi otáčania kľbovým mechanizmom rotuje s konštantnou uhlovou rýchlosťou. Aká musí byť táto uhlová rýchlosť, aby tyč bola pôsobením odstredivých síl vychýlená o uhol α od zvislej polohy?

$$[\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l \cos \alpha}}]$$



32. Valcový zotrvačník s celkovým momentom zotrvačnosti J má pri práci motora uhlovú rýchlosť ω_0 . Ak motor vypneme, zotrvačník sa pôsobením síl trenia zastaví za čas t . Aký je moment síl trenia (predpokladáme, že je konštantný)? Akú prácu bolo potrebné vykonať na úplné zastavenie zotrvačníka? Koľko otáčok zotrvačník vykonal od vypnutia motora do svojho úplného zastavenia?

$$[D = \frac{J\omega_0}{t}; A = \frac{1}{2}J\omega_0^2; n = \frac{\varphi(t)}{2\pi} = \frac{\omega_0 t}{4\pi}]$$

33. Zotrvačník tvaru homogénneho plného valca polomeru R a hmotnosti m sa roztáča z kľudového stavu pôsobením motora s uhlovým zrýchlením ε . Akú prácu vykoná motor za čas t ? Akú veľkosť má krútiaci moment, pôsobiaci na zotrvačník? (Trenie neuvažujeme.)

34. Teleso tvaru tenkého tuhého drôtu ohnutého do tvaru polkružnice s polomerom R je zavesené na klinici zatĺčenom v stene tak, že stred polkružnice je v kľudovom stave zvislo pod klincom. Ak teleso vychýlime z rovnovážnej polohy, kýva ako fyzikálne kyvadlo. Aká je doba kmitu tohto kyvadla?

♠(Návod: Moment zotrvačnosti drôtu vzhľadom na os otáčania vypočítajte s použitím Steinerovej vety z momentu zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu stredom polkružnice.)

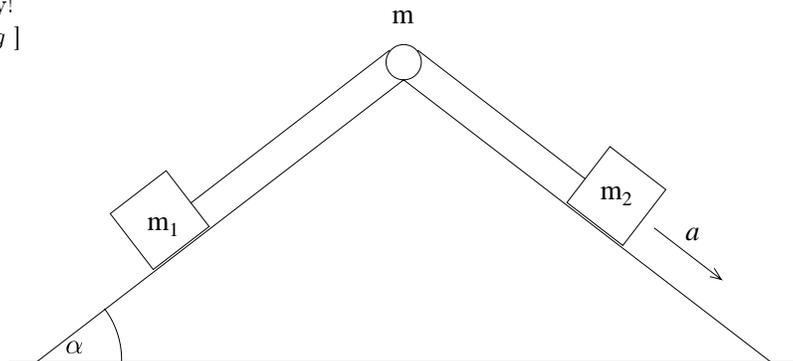
$$[T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}]$$

35. Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej kruhovej dosky hmotnosti M a polomeru R vzhľadom na os a prekrývajúcu sa s priemerom dosky!

$$[J = \frac{1}{4}MR^2]$$

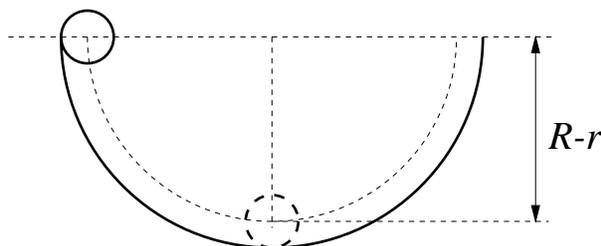
36. Cez kladku hmotnosti m sú na (pod osou kladky) symetricky umiestnených naklonených rovinách, zvierajúcich s vodorovnou rovinou uhol α , uložené a lankom spojené dve telesá hmotnosti m_1 a $2m_1$. Sústava sa pohybuje (bez trenia) v dôsledku prevažujúcej tiaže druhého telesa. Vypočítajte zrýchlenie sústavy!

$$[a = \frac{m_1 \sin \alpha}{3m_1 + m/2}g]$$



37. V žľabe vyfrézovanom tak, že jeho polomer je R , sa od jedného okraja k druhému valí guľôčka polomeru r ($r < R$) bez trenia, len vplyvom vlastnej tiaže. Aká bude rýchlosť guľôčky v spodnom bode žľabu?

$$[v = \sqrt{\frac{10}{7}g(R-r)}]$$



38. Na člne stojí poľovník s puškou. Hmotnosť člna, pušky a člna je spolu m_1 . Poľovníka vystrelí z pušky náboj hmotnosti m_2 . V dôsledku spätného nárazu sa čln spolu s poľovníkom začne pohybovať opačným smerom, ako je smer výstrelu. Odpor vody zanedbávame. Aký je pomer kinetických energií náboja a poľovníka s člnom a puškou v okamihu tesne po výstrele?

$$[\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_1}{m_2}]$$

39. Rebrík dĺžky l s ťažiskom vo vzdialenosti $l/3$ od spodného konca rebríka je opretý o stenu tak, že s podlahou zvierá uhol α . Koeficient trenia rebríka o podlahu je μ . Trenie o stenu je zanedbateľné. Do akej výšky od podlahy môže vystúpiť chlapec hmotnosti trikrát väčšej, ako je hmotnosť rebríka, aby rebrík ešte neskĺzol na zem?

$$[h = l \sin \alpha \cdot (12\mu \tan \alpha - 1)/9]$$

40. Dve homogénne gule z rovnakého materiálu s polormi R a $2R$ sú spolu zlepené. Určte moment zotrvačnosti tejto sústavy vzhľadom na os kolmú na spojnicu stredov gulí, prechádzajúcu ťažiskom tejto sústavy, ak jej hmotnosť je M .

$$[J = \frac{106}{45}MR^2]$$