Riešenia príkladov:

1. Na tenkej kovovej obruči s polomerom R je rovnomerne rozložený náboj +Q. V strede obruče sa nachádza statická častica s hmotnosťou m a nábojom +q. Vplyvom nekonečne malej poruchy sa táto častica máličko vychýli zo stredu a vplyvom pôsobiacich elektrostatických síl bude vymŕštená do veľmi veľkej vzdialenosti (teoreticky do nekonečna). Určte jej maximálnu rýchlosť akou sa bude častica pohybovať. Predpokladajte, že pohyb sa odohráva vo vákuu bez vplyvu iných síl. (6 bodov)

Na riešenie využijeme zákon zachovania energie keď pri maximálnej rýchlosti častice s hmotnosťou m, bude jej kinetická energia rovná rozdielu potenciálnej energie v strede obruče a v nekonečne. Rozdiel potencialnej energie v elektrostatickom poli určujeme ako súčin testovacieho náboja a rozdielu potenciálov (napätia), tj. $\Delta E_p = +q.\left(\varphi(0)-\varphi(\infty)\right) = +qU$ a nárast kinetickej energie bude $\Delta E_k = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_{\max}^2 - \frac{1}{2}m\mathrm{v}_{\min}^2$

Pre výpočet potenciálu využijeme vzťah pre výpočet potenciálu bodového náboja tj. $\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_x}{r}$, kde Q_x sme označili náboj zdroja a r vzdialenosť zdroja od miesta v ktorom potenciál určujeme. V ďalšom potrebujeme určiť závislosť potenciálu zdroja v tvare nabitej obruče od vzdialenosti (najvhodnejšie je zvoliť vzdialenosť od stredu obruče). Celý náboj +Q rovnomerne rozložený na obruči budeme považovať za nekonečný počet nekonečne malých nábojov a preto pre výpočet potencialú môžeme použiť infinitezimálny tvar predchádzajúceho vzorca $d\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\gamma\, dl}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2\pi R}\frac{Rd\alpha}{r}$, kde γ je dĺžková hustota náboja a α je uhol cez ktorý budeme v ďalšom integrovať. Pre výpočet $\varphi(0)$, tj. potenciálu v strede obruče využijeme skutočnosť, že r=R a dostávame $\varphi(0) = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2\pi R}\frac{R}{R}d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$. Potenciál vo veľmi veľkej vzdialenosti od obruče (v nekonečne) bude vplyvom člena $\sim\frac{1}{r}$ nulový. Ak uvážime, že častica bola pôvodne v strede obruče v kľude, môžeme písať zákon zachovania energie v tvare $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}.q = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_{\max}^2$

resp. výslednú rýchlosť $\mathrm{v}_{\max} = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q.Q}{R}}$

2. Máme určiť mernú vodivosť (σ) neznámeho materiálu z ktorého je vysústružený zrezaný kužeľ s polomerom spodnej podstavy r_L, hornej podstavy r_U a výškou h, keď meraním odporu medzi hornou a dolnou podstavou sme namerali celkový odpor R. (8 bodov)

Riešenie vychádza z definície odporu $R = U/I$ a Ohmovho zákona v tvare $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. V každej výške y kužeľa je prúdová hustota podiel konštantného prúdu I a kruhového prierezu S=πr(y)². Vzhľadom na rovnorodosť kužeľa bude rozdelenie prúdu v celom priereze rovnaké tj. $\frac{I}{\pi r^2(y)} = \sigma E$. Z definície intenzity vieme, že $\vec{E} = -grad\,\varphi$, čo v našom jednorozmernom prípade predstavuje $E = -\frac{d\varphi}{dy}$. Zostavíme rovnicu $\frac{I}{\pi r^2(y)} = -\sigma\frac{d\varphi}{dy}$, ktorú upravíme do tvaru $\int_0^h \frac{dy}{\pi r^2(y)} = -\frac{\sigma}{I}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi$. Závislosť $r^2(y)$ je stredoškolský geometrický problem riešiteľný napr. podobnosťou trojuholníkov a dostávame $r(y) = r_L - \frac{r_L - r_U}{h}y$. Tento výsledok dosadíme do predchádzajucej rovnice a integrujeme pravú stranu $\int_0^h \frac{dy}{\pi\left(r_L - \frac{r_L - r_U}{h}y\right)^2} = \pm\frac{\sigma}{I}U$.

Podiel U/I na pravej strane je meraný odpor R a znamienko závisí od smeru použitého meracieho prúdu voči smeru integrovania, v našom konkrétnom prípade je kladné. Integrovanie ľavej strany vykonáme pomocou substitúcie $t = r_L - \frac{r_L - r_U}{h}y$, pričom $dt = -\frac{r_L - r_U}{h}dy$ a úpravou integračných hraníc dostávame

$\frac{-h}{p\,(r_L - r_U)}\int_{r_L}^{r_U}\frac{dt}{t^2} = s\ R$ Po integrovaní a úpravách dostávame $\frac{-h}{p\,(r_L - r_U)}\left(\frac{1}{r_L}-\frac{1}{r_U}\right) = s\ R$ Ďalšie úpravy vedú k výsledku $s = \frac{1}{R}\frac{h}{p\,.r_L r_U}$, v ktorom je vidieť, že odpor zrezaného kužeľa môžeme nahradiť vodičom s dĺžkou h a konštantným polomerom rovným geometrickému priemeru polomerov podstáv kužeľa.

3. Florián dostal za vysvedčenie modelársky vláčik pozostávajúci z lokomotívy, dvoch vagónikov a koľají z ktorých sa dá postaviť trať v tvare uzavretej slučky s celkovou dĺžkou L. Lokomotívu poháňa jednosmerný elektrický motorček napájaný napatím U. Otec čoskoro spozoroval neúmernú spotrebu bateriek a rozhodol sa ich nahradiť akumulátorom s výstupným napatím U a známou kapacitou Q [mAh]. Florián odmeral odpor motorčeka lokomotívy, nameral hodnotu R a zistil, že na jedno nabitie akumulátora vláčik prejde N krát dookola celú dráhu. Určte rýchlosť jeho pohybu. Pri riešeni predpokladajte, že celý vykon motora sa stráca na prekonávanie roznych druhov trení, odporov a pohyb vláčika je rovnomerný (bez zrýchlenia). (7 bodov)

Pri rovnomernom pohybe je celý vykon motora spotrebovávaný na prekonávanie odporov a je konštantný. Pretože vykon je $P=U.I=R.I^2$ aj prúd I bude konštantný. Pomocou odporu motora a napájacieho napatia určíme prúd ako I=U/R a zo známej kapacity akumulátora Q aj dobu počas ktorej bude napájať hračku $t = \frac{Q}{I} = \frac{QR}{U}$.Za ten istý čas vláčik prejde dráhu NL a jeho rýchlosť teda bude $\mathrm{v} = \frac{NL}{t} = \frac{NLU}{QR}$

4. K nepohyblivej vodivej stene je na dvoch pružinách upevnená kovová tyč s hmotnosťou m (každá z pružín má tuhosť k a je upevnená na konci tyče). Pri vychýlení z rovnovážnej polohy sme namerali periódu vlastných (netlmených) kmitov T_0. Stena, pružiny aj tyč predstavujú uzavretý obvod s celkovým odporom R. Keď tento systém umiestnime do magnetického poľa kolmého na kmity tyče zistíme, že kmity už nemožno považovať za netlmené a nameriame periódu kmitov T. Určte indukciu B pôsobiaceho magnetického poľa. (9 bodov)

Bez prítomnosti magnetického poľa predstavuje kovová tyč upevnená na pružinách harmonický oscilátor popísaný rovnicou $m\frac{d^2y}{dt^2} = F_c$, kde y je výchylka z rovnovážnej polohy a $F_c = -2ky$. Kruhová frekvencia vlastných kmitov potom bude $w_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ alebo perióda $T_0 = 2p.\sqrt{\frac{m}{2k}}$ Keď tento systém umiestnime do magnetického poľa s vektorom indukcie kolmo na smer kmitov, zmena toku magnetického indukčného toku vo vnútri obvodu bude generovať indukované napatie $U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dS}{dt} = -BL\frac{dy}{dt}$. Pretože sa jedná o uzavretý obvod s odporom R potečie ním indukovaný prúd $I_{ind} = -\frac{BL}{R}\frac{dy}{dt}$ Tento prúd tečúci tyčou zasa vytvára vo vonkajšom poli silu pôsobiacu na tyč (všetko je vzájomne kolmé) $F_m = BI_{ind}L = -\frac{B^2L^2}{R}\frac{dy}{dt}$ Pri kmitoch vo vonkajšom poli potom bude celková pôsobiaca sila $F_c = -2ky - \frac{B^2L^2}{R}\frac{dy}{dt}$ Pohybová rovnica má teda tvar $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{B^2L^2}{mR}\frac{dy}{dt} + \frac{2k}{m}y = 0$ Člen $\frac{B^2L^2}{mR} = 2b$ je klasický tlmiaci člen s tlmením b. Pre kruhovú frekvenciu tlmeného pohybu platí $w = \sqrt{w_0^2 - b^2}$ Po dosadení dostávame $\frac{2p}{T} = \sqrt{\left(\frac{2p}{T_0}\right)^2 - \left(\frac{B^2L^2}{2mR}\right)^2}$

a úpravou $B = \frac{2}{L}\sqrt{p\,mR}.\left(\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}\right)^{\frac{1}{4}}$