1. Cievka s **N** závitmi má v priereze tvar rovnobežníka s podstavou dĺžky **a**, bočnou stranou **b** a výškou $\mathbf{v_0}$, ku ktorej je pripojený presný voltmeter. Umiestnime ju tak aby jej os smerovala v smere sever-juh. Následne pristúpime k jej spojitej a rovnomernej deformácii tak, že za čas **T** ju úplne sploštíme, pričom hodnota ktorú voltmeter zaznamenal bola $\mathbf{U_0}$.
   Určte intenzitu horizontálnej zložky intenzity magnetického poľa Zeme (H_h=?) v mieste experimentu. (4 body)

   Riešenie:
   V nateraz neznámom magnetickom poli Zeme s horizontálnou zložkou H_h bude magnetický indukčný tok tok cievkou danný ako

$$\Phi = \int \vec{B}.d\vec{S} = \mu_0 H_h N S \tag{1.1}$$

   kde S je plocha rovnobežníka. Túto z elementárnej geometrie určíme ako

$$S = a.\mathrm{v} \tag{1.2}$$

   Indukované napätie je potom rovné

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(\mu_0 H_h Na.\mathrm{v}\right)}{dt} = -\mu_0 H_h Na\frac{d\mathrm{v}}{dt} \tag{1.3}$$

   pretože v čase sa z použitých veličín mení len výška rovnobežníka. Rovnomerná deformácia zo zadania znamená, že výška rovnobežníka sa zmenšuje podľa funkcie času

$$\mathrm{v(t)} = \mathrm{v}_0 - kt \tag{1.4}$$

   kde kde k je konštanta úmernosti. Dosadiac (1.4) do (1.3) dostávame

$$U_{ind} = -\mu_0 H_h Na\frac{d\left(\mathrm{v}_0 - kt\right)}{dt} = \mu_0 H_h Na\, k \tag{1.5}$$

   použitú konštantu k určíme z koncovej podmienky v zmysle vzťahu (1.4)

$$0 = \mathrm{v}_0 - kT \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{\mathrm{v}_0}{T} \tag{1.6}$$

   a po dosadení do (1.5) a úprave dostávame

$$U_0 = \mu_0 H_h Na\frac{\mathrm{v}_0}{T} \qquad \Rightarrow H_h = \frac{U_0 T}{\mu_0 Na\,\mathrm{v}_0} \tag{1.7}$$

2. Cievka má vlastnú indukčnosť **L**, má tvar povrchu válca s polomerom $\mathbf{R_v}$ na ktorom je navinutých **N** závitov medeného drôtu s polomerom $\mathbf{r_0}$ a merným odporom ρ. Vypočítajte ako dlho (t_x=?) bude trvať pokiaľ prevádzkový prúd poklesne na **1/10** hodnoty pri odpojení cievky od od zdoja EMS a skratovaniu jej terminálov (3 body)

   Riešenie:
   Pri zmene prúdu v cievke sa bude v zmysle zákona elektromagnetickej indukcie indukovať napätie

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \tag{2.1}$$

Uvedené indukované napätie zasa vyvolá v cievke prúd, ktorý sa bude snažiť anulovať skutočnosť odpojenia od zdroja EMS, ktorého veľkosť určíme ako

$$I_{ind} = \frac{U_{ind}}{R} \tag{2.2}$$

kde R je odpor cievky, ktorý určíme z Ohmovho zákona ako

$$R = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{2\pi R_v N}{\pi r_0^2} = \rho\frac{2R_v N}{r_0^2} \tag{2.3}$$

Po dosadení (2.1) a (2.3) do (2.2) dostávame indukovaný prúd je

$$I_{ind} = -\frac{r_0^2}{2R_v N\rho}L\frac{dI}{dt} \tag{2.4}$$

Vzťah (2.4) integrujeme po separácii premenných v tvare

$$-\frac{2R_v N\rho}{Lr_0^2}\int dt = \int\frac{dI}{I} \tag{2.5}$$

Riešenie rovnice (2.5) vedie k vzťahu

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{2R_v N\rho}{Lr_0^2}t\right) \tag{2.6}$$

kde I_0 sme označili počiatočný prúd (prúd v čase t=0). Rovnaký vzťah musí platiť pre všetky časy, tj. aj v čase t_x keď prúd poklesne na $I_0/10$, tj.

$$\frac{1}{10}I_0 = I_0 \exp\left(-\frac{2R_v N\rho}{Lr_0^2}t_x\right) \quad\Rightarrow\quad t_x = \frac{Lr_0^2}{2R_v N\rho}\ln(10) \tag{2.7}$$

3. Rovinná elektromagnetická vlna dopadá (kolmo) na dielektrickú vrstvu (magneticky neaktívnu) hrúbky **L**, ktorej relatívna permitivita lineárne rastie z hodnoty ε_1 (na vstupe) po hodnotu ε_2 (na výstupe). Určte dobu prechodu tejto vlny (jej konkrétnej fázy) cez túto vrstvu. (3 body)

Riešenie:
Fázová rýchosť šírenia elektromagnetickej vlny v zmysle vlnovej rovnice je

$$\mathrm{v}_f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \tag{3.1}$$

pričom pre magneticky neaktívne prostredie je $\mu_r=1$. Čas potrebný na prekonanie nejakej nekonečne malej dráhy dx potom určíme ako

$$dt = \frac{dx}{\mathrm{v}_f} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}\,\frac{dx}{c} = \sqrt{\varepsilon_r}\,\frac{dx}{c} \tag{3.2}$$

Zo zadania vyjadríme lineárny nárast permitivity ako

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1 + kx \tag{3.3}$$

Koeficient k určíme z okrajovej podmienky na druhom okraji tj.

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + kL \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{L} \tag{3.4}$$

Dosadením vzťahu (3.3) a (3.4)do (3.2) dostávame

$$dt = \frac{1}{c}\sqrt{\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{L}x}\;dx \tag{3.5}$$

Rovnicu (3.5) je možné integrovať v tvare

$$\int_0^{t_p} dt = \frac{1}{c}\int_0^L \sqrt{\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{L}x}\;dx \tag{3.6}$$

a pri použití substitúcie

$$z = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{L}x \qquad ; \qquad dz = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{L}dx \tag{3.7}$$

dostávame

$$t_p = \frac{1}{c}\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sqrt{z}\,\frac{L}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}\;dz = \frac{L}{c\left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right)}\left(\frac{z^{3/2}}{3/2}\right]_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} = \frac{2L}{3c\left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right)}\left(\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_2} - \varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_1}\right) \tag{3.8}$$

resp. po finálnej úprave

$$t_p = \frac{2}{3}\frac{L}{c}\frac{\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_2} - \varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_1}}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \tag{3.9}$$