1. Kovový zberač náboja Van de Graafovho generátora má tvar dutej gule s polomerom R a jeho stred sa nachádza vo výške h nad podlahou experimentálnej miestnosti. Vo vzdialenosti d od opory generátora a v blízkosti podlahy nameral pracovník absolútnou hodnotu intenzity poľa E [V/m].
   a) Určte celkový uložený náboj na zberači náboja.
   b) Určte napätie medzi zberačom náboja a miestom merania intenzity. (8 bodov)

Riešenie:

Ľubovoľný sféricky symetricky rozložený náboj, je možné nahradiť rovnako veľkým bodovým nábojom umiestneným v strede symetrie. Pre intenzitu bodového náboja platí $\vec{E}(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\dfrac{Q}{r^3}\vec{r}$ resp. v zmysle zadania príkladu pre absolútnu hodnotu intenzity $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\dfrac{Q}{\left(h^2+d^2\right)}$ a pre hodnotu zhromaždeného náboja dostávame $Q = 4\pi\varepsilon\left(h^2+d^2\right)E$

Napätie medzi zberačom náboja a miestom merania určíme ako

$$U = -\int_R^{\sqrt{h^2+d^2}} \vec{E}(r).d\vec{r} = -\int_R^{\sqrt{h^2+d^2}} \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^3}\vec{r}.d\vec{r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_R^{\sqrt{h^2+d^2}} \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left|-\frac{1}{r}\right|_R^{\sqrt{h^2+d^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+d^2}} - \frac{1}{R}\right)$$

Do predchádzajúceho vzťahu dosadíme výsledok z časti a) a dostávame

$$U = \frac{4\pi\varepsilon\left(h^2+d^2\right)E}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+d^2}} - \frac{1}{R}\right) = \left(\sqrt{h^2+d^2} - \frac{h^2+d^2}{R}\right)E$$

2. V niektorých oblastiach sa ešte aj dnes prenáša telefónny signál pomocou bežných vzdušných vedení. Uvažujme jednu dvojicu drôtov vedených rovnobežne vedľa seba vo vzájomnej vzdialenosti d a s celkovou dĺžkou L. Vlastný polomer drôtov je r_0 a je oveľa menší ako ich vzdialenosť. Určte celkovú kapacitu vedenia.(7 bodov)

Riešenie:

Predpokladajme, že na vedení (v istom okamžiku) nastane nerovnováha náboja pričom na prvom drôte bude bližšie neurčený +Q náboj a v zmysle zákona zachovania náboja na druhom drôte zasa náboj –Q. Podľa zadania príkladu, je vzdialenosť drôtov d>> r_0 čo znamená, že elektrické pole každého z nich (aspoň v najdôležitejšej oblasti) len málo ovplyvnené prítomnosťou druhého drôtu. Intenzitu elektrického poľa preto môžeme určiť vychádzajúc z Gaussovej vety ako $\oint \mathbf{E}.d\mathbf{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon}$ .Pre dlhé vodiče (L>>d) môžeme zanedbať koncové podstavy uzatvárajúce válcovú plochu okolo vodiča a pre tok intenzity napíšeme $\oint \mathbf{E}.d\mathbf{S} = E(r).2\pi r.L$ Dosadením do predchádzajúceho vzťahu dostávame pre priebeh intenzity $\mathrm{E}(r) = \dfrac{Q}{2\pi r L\varepsilon}$. Druhý vodič prispieva do intenzity poľa analogickým výrazom ale z iného miesta a inou polaritou náboja tj. na spojnici medzi drôtmi platí pre veľkosť intenzity

$$\mathrm{E}(r) = \frac{1}{2\pi L\varepsilon}\left(\frac{Q}{r} - \frac{-Q}{d-r}\right) = \frac{Q}{2\pi L\varepsilon}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right)$$

keď znamienka sú výsledkom vektorového skladania dvoch intenzít určovaných voči polohe prvého náboja.

Pre výpočet kapacity v zmysle definície $C = \dfrac{Q}{U}$ potrebujeme určiť napätie (rozdiel potenciálov) medzi vodičmi, tj.

$$\mathrm{U} = -\int_{\mathrm{r}_0}^{d-\mathrm{r}_0} \mathrm{E}(r)\,dr = -\int_{\mathrm{r}_0}^{d-\mathrm{r}_0} \frac{Q}{2\pi L\varepsilon}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right)dr = \frac{-Q}{2\pi L\varepsilon}\int_{\mathrm{r}_0}^{d-\mathrm{r}_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right)dr = \frac{-Q}{2\pi L\varepsilon}\left(\int_{\mathrm{r}_0}^{d-\mathrm{r}_0}\frac{1}{r}dr + \int_{\mathrm{r}_0}^{d-\mathrm{r}_0}\frac{1}{d-r}dr\right) =$$

$$= \frac{-Q}{2\pi L\varepsilon}\left(\int_{\mathrm{r}_0}^{d-\mathrm{r}_0}\frac{1}{r}dr - \int_{\mathrm{r}_0}^{d-\mathrm{r}_0}\frac{1}{d-r}d(d-r)\right) = \frac{-Q}{2\pi L\varepsilon}\left(\ln\frac{d-\mathrm{r}_0}{\mathrm{r}_0} - \ln\frac{d-d+\mathrm{r}_0}{d-\mathrm{r}_0}\right) = \frac{-Q}{2\pi L\varepsilon}2\ln\frac{d-\mathrm{r}_0}{\mathrm{r}_0} \doteq \frac{-Q}{\pi L\varepsilon}\ln\frac{d}{\mathrm{r}_0}$$

Znamienko napatia je pre výpočet kapacity nepodstatné a pre výslednú kapacitu vedenia dostávame (berúc do úvahy spomenuté zanedbania pre L>>d a d>> r_0)

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{\pi L\varepsilon}\ln\frac{d}{\mathrm{r}_0}} = \frac{\pi L\varepsilon}{\ln\frac{d}{\mathrm{r}_0}} = \pi L\varepsilon \ln\frac{\mathrm{r}_0}{d}$$

3. Uzavretá vodivá slučka ktorou tečie prúd I má tvar troch štvrťkružníc s rovnakým polomerom R, ktoré sú umiestnené v rovine XY, XZ a YZ so stredom v počiatku súradníc (bode S=[0,0,0]). Prúd v slučke tečie v smere od súradnice x smerom k y, potom smerom k z a naspäť k súradnici x. Určte smer a absolútnu hodnotu indukcie magnetického poľa vytvoreného touto slučkou. (7 bodov)

Riešenie:

Pre vypočet je vhodné rozdeliť slučku na tri samostatne útvary, určiť akú indukciu generujú a potom ich výsledky vektorovo spočítať. Uvažujme preto ¼ kružnicu v rovine XY s polomerom R ktorou tečie prúd I. Podľa Biot-Savartovho zákona bude mať výsledná indukcia smer osi Z určíme ju vychádzajúc zo vzťahu $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{I\,\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3}$, ktorý si rozpíšeme do troch (prakticky identických) častí, ktoré spolu budú tvoriť uzavretú slučku pričom pre každý v zmysle zadania píšeme pre veľkosť príslušnej zložky

$$\mathrm{B}_{1,2,3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi R}{2}} \frac{IR\,dl}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\int_0^{\frac{\pi R}{2}} dl = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\frac{\pi R}{2} = \frac{\mu_0}{8}\frac{I}{R}$$

Smery jednotlivých príspevkov určíme z vektorového súčinu (podľa pravidla pravej ruky) a zistíme, ze slučka v rovine XY generuje $\vec{\mathrm{B}}_1 = \frac{\mu_0}{8}\frac{I}{R}\vec{k}$ v rovine YZ $\vec{\mathrm{B}}_2 = \frac{\mu_0}{8}\frac{I}{R}\vec{i}$ a v rovine ZX $\vec{\mathrm{B}}_3 = \frac{\mu_0}{8}\frac{I}{R}\vec{j}$. Výsledný vektor má teda tvar $\vec{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0}{8}\frac{I}{R}\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)$, alebo zložkovo $\vec{\mathrm{B}} = \left(\frac{\mu_0}{8}\frac{I}{R}, \frac{\mu_0}{8}\frac{I}{R}, \frac{\mu_0}{8}\frac{I}{R}\right)$, tj. smeruje z bodu S pod 45^o uhlom voči rovinám XY, YZ aj ZX. Jeho absolútna hodnota je $\left|\vec{\mathrm{B}}\right| = \sqrt{B_1^2+B_2^2+B_3^2} = \sqrt{3}\frac{\mu_0}{8}\frac{I}{R}$

4. Drôtený závit v tvare kružnice s polomerom R a prierezom drôtu S je vyrobený z veľmi čistej medi s merným odporom ρ je umiestnený v homogénnom magnetickom poli tak, že indukcia poľa je kolmá na rovinu závitu. Samotné magnetické pole je časovo premenné podľa funkcie B(t)=B_0.sin(ωt), kde B_0 aj ω sú konštanty. Určte časový priebeh indukovaného prúdu v závite. Vlastnú indukciu závitu zanedbajte(8 bodov)

Riešenie:

Prúd v závite je vyvolaný v dôsledku elektromagnetickej indukcie , keď cez plochu ohraničenú závitom tečie časovo premenlivý magnetický indukčný tok. V homogénnom magnetickom poli môžeme pre časový priebeh indukčného toku písať $\Phi(t) = \int B(t).dS = B(t).\pi R^2 = \pi R^2.B_0\sin\omega t$

Časová zmena tohoto indukčného toku generuje emf, ktorá následne vyvolá vznik prúdu. Formálne to môžema zapísať ako $R.I(t) = U_{emf} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\pi R^2.B_0\sin\omega t\right) = -\pi R^2.B_0\omega\cos\omega t$

Využijúc úplne ľavú a úplne pravú časť predchádzajúceho výrazu a klasický vzťah pre odpor vodiča dostávame $\rho\frac{2\pi R}{S}.I(t) = -\pi R^2.B_0\omega\cos\omega t$ z čoho $I(t) = -\frac{SR.B_0\omega}{2\rho}\cos\omega t$