1. Na tenkej kovovej obruči s polomerom R je rovnomerne rozložený náboj +Q. Stredom obruče a kolmo na jej rovinu prechádza tenké nevodivé lanko (rybársky silon) pozdĺž ktorého sa može pohybovať navlečená malá kovová gulička s hmotnosťou M. Určte ako sa mení potenciál a intenzita elektrického poľa pozdĺž (v smere) lanka (ako funkcia vzdialenosti od roviny obruče). Predpokladamje, že spomínanú guľku nabijeme rovnako veľkým ale opačným nábojom –Q. Nájdiťe miesto na osi, kde bude na takúto nabitú guľku pôsobiť najvačšia sila (v smere lanka). Ak je celý systém umiestnený v gravitačnom poli so zrýchlením g (rovnobežným s lankom) nájdite akú maximálnu hmotnosť M može mať aby mohla „visieť“ pod obručou. (8 bodov)

Pre určenie potenciálu použijeme vzťah v ktorom predpokládame, že každý infinitezimálne malý kúsok obruče (a zodpovedajúci malý náboj) prispievaju do potenciálu nezávisle, tj.

$d\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dQ}{r} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dQ}{\sqrt{R^2+y^2}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\gamma dl}{\sqrt{R^2+y^2}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\frac{Q}{2\pi R}Rd\alpha}{\sqrt{R^2+y^2}}$, kde y je vzdialenosť od roviny obruče, γ dĺžková hustota náboja a α uhol zodpovedajúci dĺžke dl. Riešenie je priamočiaré integrovanie podľa uhla s výsledkom

$\varphi(y) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{\sqrt{R^2+y^2}} + c$, kde c odráža voľnosť určenia potenciálu vzhľadom na ľubovoľnú konštantu.

Podľa zadania príkladu nás ďalej zaujíma určenie zložky intenzity v smere lanka, tj..zložky E_y. Všeobecne intenzitu poľa môžeme vypočítať zo všeobecného vzťahu

$\vec{E} = -grad\varphi$, ktorý sa v našom (zjednodušenom) prípade redukuje na

$E_y = \left(-grad\varphi\right)_y = -\dfrac{d\varphi}{dy}$ Dosadením výsledku pre potenciál dostávame

$$E_y(y) = -\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+y^2}} + c\right) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dy}\left(R^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(R^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}(2y) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{\left(R^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Ak je guľka nabitá nábojom Q pôsobí na ňu sila $\vec{F} = Q.\vec{E}$, resp v našom pripade nás zaujíma len y-nová zložka $F_y = Q.E_y$, tj.

$$F_y(y) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{\left(R^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Jej maximálnu hodnotu vypočítame klasickou metódou hľadania extrému funkcie jednej premennej

$\dfrac{dF_y}{dy} = 0$, z ktorej určíme hodnotu súradnice y, v ktorej je táto sila maximálna, tj.

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{\left(R^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = 0$$

$$\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{d}{dy}\left(y.\left(R^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right) = 0$$

$$1.\left(R^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} + y.\left(-\frac{3}{2}\right)\left(R^2+y^2\right)^{-\frac{5}{2}}(2y) = 0$$

$1 - \dfrac{3y^2}{\left(R^2+y^2\right)} = 0$ Riešenie tejto rovnice umožňuje určiť polohu miesta v ktorom pôsobí maximálna sila ako

$y_{\max} = \pm\dfrac{R}{\sqrt{2}}$, kde znamienko udáva, že existujú symetrické riešenia nad a pod rovinou obruče.

Dosadením polohy maxima sily dostávame pre hodnotu maximálnej sily vzťah

$$F_{y\max}(y)=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y_{\max}}{\left(R^2+y_{\max}^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{R}{\sqrt{2}}}{\left(R^2+\frac{R^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{R}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{3R^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\sqrt{2}R}{3\sqrt{2}\sqrt{3}R^3}=\frac{Q^2}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}$$

Ak guľka má hmotnosť M, potom na ňu pôsobí gravitačná sila $F_g=Mg$ s ktorou má byť vypočítaná elektrostatická sila porovnávaná, tj.

$Mg=\frac{Q^2}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}$, alebo presnejsie $M_{\max}=\frac{Q^2}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 g}\frac{1}{R^2}$

2. V polárnych oblastiach Zeme (v okolí severného a južného magnetického pólu) sa počas zvýšenej slnečnej aktivity pozoruje polárna žiara (Aurora Borealis). Tento jav má pôvod v svetielkovaní atmosféry, keď sa v nej pohybujú veľmi rýchle častice slnečného vetra zachytrené magnetickým poľom Zeme. Počas obzvlášť vzorových (ale veľmi zriedkavých) prípadov sa dájú odpozorovať závitniciam podobné trajektórie častíc slnečného vetra. Predpokladáme že slnečný vietor je tvorený hlavne protónmi tj. časticami s hmotnosťou m a nábojom e. Ak pozorujeme polomer zavitnicovej trajektórie R a stúpanie h určte kinetickú energiu častíc slnečného vetra. Magnetické pole Zeme má v okolí pólov len verikálnu zložku (použité zanedbanie) s indukciou B a smerom pozdĺž osi pozorovanej závitnice. (7 bodov)

Pri riešení uvažujme, že vektor rýchlosti pohybu protónov sa dá rozložiť do dvoch zložiek a síce v_d (dotyčnicová zložka rýchlosti kruhového pohybu) a v_o (zložka rýchlosti v smere osi závitnice).
Keď sa nabitá častica pohybuje v magnetickom poli pôsobí na ňu tzv. Lorentzová sila, ktorá je kolmá na smer pohybu častice aj smeru poľa a v našom prípade je zdrojom dostredivej sily nútiacej častice vykonávať pohyb po kružnici, čo môžeme vyjadriť v tvare rovnice ako

$m\frac{\mathrm{v}_d^2}{R}=eB\mathrm{v}_d$, (vektorový súčet vynechaný v zmysle orientácie veličín zo zadania), tj.

$$\mathrm{v}_d=\frac{eBR}{m}$$

Z kinematiky môžeme určiť ako súvisia rýchlosti v_d a v_o napr. v tvare

$\frac{2\pi R}{\mathrm{v}_d}=T=\frac{h}{\mathrm{v}_o}$, z ktorého môžeme určiť v_o ako $\mathrm{v}_o=\frac{h}{2\pi R}\mathrm{v}_d=\frac{h}{2\pi R}\frac{eBR}{m}=\frac{eBh}{2\pi m}$

Pre ich kinetickú energiu pre to dostávame v zmysle vzťahu

$\mathrm{E_k}=\frac{1}{2}\mathrm{mv_c^2}=\frac{1}{2}\mathrm{m}\left(\frac{eBR}{m}\vec{e}_d+\frac{eBh}{2\pi m}\vec{e}_0\right)^2=\frac{(eB)^2}{2\mathrm{m}}\left(R^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\right)$ lebo $\vec{e}_d.\vec{e}_0=0$

3. Velmi veľká (teoreticky nekonečná) kolmá stena je rovnomerne nabitá plošnou hustotou náboja σ. K stene je v istom mieste prilepená nevodivá šnúra s dĺžkou L na konci ktorej je upevnená kovová (ale na počiatku nenabitá) gulička s hmotnosťou M. Ak necháme guličku dotknúť sa nabitej steny odskočí a po nejakej dobe sa ustáli v kolmej vzdialenosti d od steny. Určte aký veľký náboj Q preskočil počas dotyku zo steny na guličku. (7 bodov)

V malej vzdialenosti od veľkej plochy s nábojom (alebo v ľubovoľnej vzdialenosti od nekonečnej plochy) sa vytvára elektrostatické pole, ktorého intenzitu môžeme určiť podľa Gaussovej vety v tvare

$\int\vec{E}.d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho.dV$, kde E je intenzita elektrostatického poľa a ρ objemová hustota náboja. V našom prípade sa objemový integrál redukuje na plošný, pretože jedine zložka intenzity kolmá na plochu je nenulová (ostatné sa vzájomne kompenzujú). Teda môžeme postupne písať

$2.\int\limits_{S_0}E_\perp dS+\int\limits_{S_p}E_\parallel\, dS=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{S_0}\sigma\, dS$ a dostávame pre kolmú zložku intenzity vzťah

$$E_\perp=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Ak nabitá gulička zavesená na závese dĺžky l je vychýlená na vzdialenosť d, musí sa elektrostatická sila v tomto bode kompenzovať so zodpovedajúcou zložkou gravitačnej sily pochádzajúcou z rozkladu tiaže guličky. Systém sa bude snažiť uviesť do rotácie sila

$F_1 = Mg.\sin\alpha$ proti čomu posobí zložka elektrickej sily $F_{e\perp} = Q\,\mathrm{E}_{\perp} = \dfrac{Q\sigma}{2\varepsilon_0}$

Táto má ale odlišný smer a sila F_1 musí byť presne kompenzovaná silou

$F_2 = F_{e\perp}.\cos\alpha = \dfrac{Q\sigma}{2\varepsilon_0}\cos\alpha$ aby systém nemohol rotovať. Z rovnice F_1=F_2 dostávame potom

$Mg.\sin\alpha = \dfrac{Q\sigma}{2\varepsilon_0}\cos\alpha$, kde α je uhol odklonu šnúry od steny. Úpravou pre veľkosť náboja dostávame

$$Q = \frac{2\varepsilon_0 Mg}{\sigma}.tg\alpha = \frac{2\varepsilon_0 Mg}{\sigma}.\frac{d}{\sqrt{l^2 - d^2}}$$

4. V minulosti sa pre pohon motorových leteckých modelov používali hlavne dvojtaktné spaľovacie motory. Pokrok v oblasti akumulátorov a malých elektrických motorov umožnil použitie podstatne tichšieho a ľahšie regulovateľného elektrického pohonu. Uvažujme, že letecký model má celkovú hmotnosť M, je vybavený N akumulátormi, každý s nominálnym napätím U [V] a kapacitou Q [mAh]. Samotný motor má celkový odpor R, je vybavený samárium-kobaltovým magnetom s indukciou B v medzere medzi pólovými nástavcami. Vinutie motora pozostáva z 12 tich obdĺžnikových závitov dĺžky ***l*** a šírky **d** tesne vedľa seba v jednej rovine. Určte maximálny krútiaci moment motora (aby ste vedeli akú veľkú vrtuľu použiť) a maximálnu teoretickú výšku, ktorú môže model dosiahnuť. Všetky trenia a odpory zanedbajte, gravitačné zrýchlenie je g. (8 bodov)

Krútiaci moment (tj. moment sily) môžeme určiť pomocou vzťahu pre silu pôsobiacu na prúdovodič v magnetickom poli v tvare $\vec{F} = I.\vec{B}\times\vec{l}$, ktorá závisí od veľkosti (a smeru) prúdu I a vzájomnej orientácie vektora magnetickej indukcie a závitu. V kažom praktickom motore je vinutie a smer indukcie vzájomne kolmé a smer sily pôsobiaci na (napr. ľavú časť, prednú) závitu je rovnako veľká ale opačná ako sila pôsobiaca na druhú (pravú, zadnú) časť závitu. Celková výslednica síl je preto vždy nulová. Moment síl je definovaný ako $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$, kde polohovy vektor **r** udáva polohu závitu voči osi rotácie. Krútiaci moment preto može nadobúdať hodnoty od maximálnej (keď polohový vektor je kolmý na vyvolanú silu) po nulovú, keď sila a polohový vektor sú kolineárne. Pre maximálny krútiaci moment jedného závitu potom platí

$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = \left(\dfrac{d}{2}\vec{e}_0\right)\times I.\left(B\vec{e}_1\times l\vec{e}_2\right).2 = (l.d.B.I)\left(\vec{e}_0\times\left(\vec{e}_1\times\vec{e}_2\right)\right)$, kde $\mathbf{e}_{012}$ sú jednotkové vektory udávajúce smer polohového vektora závitu **r**, smer indukcie poľa a smer závitu pozdĺž l. Výsledkom viacnásobného vektorového súčinu je najskôr jednotkový vektor normály k ploche závitu, ktorého následný súčin s jednotkovým vektorom smeru indukcie pôsobí, že výsledná zložka krútiaceho momentu má smer pozdlž osi rotácie a absolútnu veľkosť

$M = l.d.B.I\sin\alpha = BIS.\sin\alpha$, kde S je plocha závitu a α uhol medzi normálou závitu a vektorom magnetickej indukcie. Pretože sinα môže nadobúdť maximálnu hodnotu 1, máme 12 identických závitov a tečúci prúd určíme v zmysle $I = \dfrac{N.U}{R}$, je maximálna hodnota momenu síl (krútiaceho momentu)

$$M_{\max} = 12.l.d.B\frac{NU}{R}$$

Maximálnu (idealizovanú) výšku ktorú by model mohol dosiahnuť určíme so zákona zachovania energie, keď predpokladáme, že celá energia uložená v akumulátroroch

$E = N.U.I.T = N.U.Q$, kde Q je kapacita akumulátorov udaná v mAh če sú jednotky veľkosti (uloženého náboja). Táto energia sa premení na potenciálnu energiu modelu tj.

$E_p = M.g.h$, kde M je hmotnosť modelu, g gravitačné zrýchlenie a h dosiahnutá výška.

Ak zanedbáme všetky straty a odpory (hlavne aerodynamický odpor) môžeme napísať rovnicu

$M.g.h = N.U_0.Q$ z ktorej ľahko dostávame pre maximálnu výšku

$$h_{\max} = \frac{N.U.Q}{M.g}$$