

1. Príklad

V strede dvoch navzájom kolmých (krátkych) cievok s polomeri R a $2R$ a počtom závitov N a $2N$ umiestnime magnetku kompasu podopretú v ťažisku tak, že sa môže otáčať okolo osí oboch cievok. Os menšej cievky smeruje horizontálne v smere východ-západ, os väčšej kolmo na Zemský povrch. Obe cievky sú navinuté z rovnakého drôtu s priemerom ϕ a mernou vodivosťou σ . Ak zapojíme na zdroj elektromotorického napätia U menšiu cievku magnetka vychýli o uhol α vľavo. Ak zapojíme na ten istý zdroj napätia väčšiu cievku magnetka vychýli o uhol β dole. Určte celkovú intenzitu magnetického poľa Zeme v mieste merania. Magnetické pole Zeme má približne dipólový charakter a na zemskom povrchu je charakterizované horizontálnou a kolmou zložkou (z výnimkou pólův a na rovníku kde má len jednu zložku, určte kde akú). (8 bodov)

Riešenie

Obe cievky produkujú v strede magnetické pole s intenzitou $H = \frac{nI}{2r}$, kde n je počet závitov cievky,

I prúd tečúci cievkou a r jej polomer. V zmysle zadania príkladu menšou cievkou potečie prúd

$$I_{\text{menšia}} = \frac{U}{\frac{1}{\sigma} \frac{2\pi R N}{\pi \left(\frac{\phi}{2}\right)^2}} = \frac{\sigma \phi^2 U}{8RN} \text{ a väčšou } I_{\text{väčšia}} = \frac{U}{\frac{1}{\sigma} \frac{2\pi 2R 2N}{\pi \left(\frac{\phi}{2}\right)^2}} = \frac{\sigma \phi^2 U}{32RN}$$

Menšia cievka teda vytvorí

oddatočnú zložku magnetickej intenzity v smere východ-západ o intenzite

$$H_{\text{menšia}} = \frac{\frac{\sigma \phi^2 U}{8RN} N}{2R} = \frac{\sigma \phi^2 U}{16R^2} \text{ a väčšia v smere hore-dole } H_{\text{väčšia}} = \frac{\frac{\sigma \phi^2 U}{32RN} 2N}{2 \cdot 2R} = \frac{\sigma \phi^2 U}{64R^2}$$

Horizontálna zložka Zemského magnetického poľa H_h je kolmá na dodatočnú intenzitu od malej

cievky a môžeme napísať $\text{tg} \alpha = \frac{H_h}{H_{\text{menšia}}}$ a úplne analogicky $\text{tg} \beta = \frac{H_k}{H_{\text{väčšia}}}$, kde H_k je označená

kolmá zložka poľa. celková intenzita je $H_c = \sqrt{H_h^2 + H_k^2}$ čo po dosadení a úprave dáva výsledok

$$H_c = \sqrt{(H_{\text{menšia}} \cdot \text{tg} \alpha)^2 + (H_{\text{väčšia}} \cdot \text{tg} \beta)^2} = \frac{\sigma \phi^2 U}{16R^2} \cdot \sqrt{\text{tg}^2 \alpha + \frac{1}{16} \text{tg}^2 \beta}$$

Na rovníku má magnetické pole Zeme len vodorovnú zložku a na póloch len kolmú zložku.

2. Príklad

Tyčový magnet s magnetickým momentom \mathbf{m} , hmotnosťou \mathbf{M} a dĺžkou \mathbf{L} je zavesený na tenkom silonovom lanku tak, že sa môže otáčať okolo vertikálnej osi prechádzajúcej jeho stredom (ťažiskom), pričom os magnetu zostáva stále vodorovná. Po ustálení v rovnovážnej orientácii (v smere sever juh) ho vyhlíme o malý uhol a pozorujeme jeho periodické kmity s periódou T_0 . Určte intenzitu horizontálnej zložky Zemského magnetického poľa. Torzný moment tenkého silonu zanedbajte. (8 bodov)

Riešenie

Magnet s magnetickým momentom \vec{m} je vystavený v magnetickom poli Zeme pôsobeniu momentu síl $\vec{m} \times \vec{B}$. V zmysle zadania príkladu moment sily môže v yvolávať len pohyb okolo vertikálnej osi. Preto stačí uvažovať vertikálnu zložku momentu síl do ktorej prispieva len horizontálna zložka

magnetického poľa Zeme a horizontálna zložka momentu magnetu (čo je celý moment magnetu ak je zavesený vodorovne). Pri výchylke o uhol α je absolútna hodnota momentu síl rovná $\mu_0 m H_h \sin \alpha$, kde H_h je horizontálna zložka intenzity magnetického poľa Zeme a m absolútna hodnota magnetického momentu magnetu. Ak uvažujeme len malé výchylky môžeme použiť priblíženie $\sin \alpha \rightarrow \alpha$ a pohybovú rovnicu systému zapíšeme v tvare $I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \mu_0 m H_h \alpha = 0$, kde I je moment zotrvačnosti pri rotácii okolo osi prechádzajúcej stredom (ťažiskom) magnetu. Moment hybnosti magnetu je rovný $I = \frac{1}{12} M L^2$ (Vid'. Fyzika 1). Upravenú pohybovú rovnicu preto píšeme

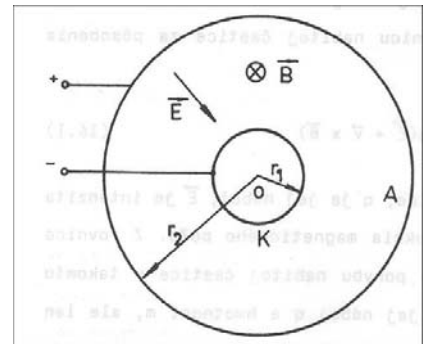
ako $\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{12 \mu_0 m H_h}{M L^2} \alpha = 0$ čo je známa pohybová rovnica periodických kmitov s kruhovou

frekvenciou $\omega^2 = \frac{12 \mu_0 m H_h}{M L^2}$, odkiaľ ďalšou úpravou dostávame vyjadrenie $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{12 \mu_0 m H_h}{M L^2}}$,

resp. $H_h = \frac{M L^2}{12 \mu_0 m} \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2$.

3. Príklad

Uvažujme diódu s dvoma válcovými elektródami (použitú pri laboratórnej úlohe č. 16) s polermi r_1 a r_2 umiestnenú v dutine solenoidu, ktorý vytvára magnetické pole s konštantnou indukciou \mathbf{B} so smerom pozdĺž elektrónky. Na vnútornú a vonkajšiu elektródu je pripojené napätie U (vid'. obrázok).



a) Nájdite vzťah pre intenzitu a potenciál elektrického poľa v dutine medzi elektródami.

b) Určte absolútnu hodnotu okamžitej rýchlosti elektrónu (elektrón má náboj e a hmotnosť m), ktorý sa nachádza vo vzdialenosti r ($r_2 > r > r_1$) a pri uvoľnení z menšej elektródy bola jeho rýchlosť nulová.

c) Napíšte pohybovú rovnicu opisujúcu pohyb elektrónu v tejto elektrónke. Vzťažnú sústavu si zvolte podľa vlastného uváženia ale zreteľne ju vyznačte na náčrte, resp. slovne popíšte.

(9 bodov)

Riešenie

Intenzitu poľa určíme pomocou Gaussovej vety o toku elektrickej indukcie $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$.

Vzhľadom na osovú symetriu elektrónky (znázornené an ja priloženom obrázku) má intenzita len radiálny smer, tj. tok sa dá zapísať ako $E \cdot 2\pi r L = \frac{Q}{\epsilon_0}$, kde r je polomer zvolenej válcovej plochy cez

ktorú počítame tok (a miesto kde počítame intenzitu), L a Q sú dočasné premenné označujúce dĺžku elektrónky a náboj na menšej elektróde. Intenzitu vo vzdialenosti r môžeme teraz vyjadriť ako

$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \frac{1}{r}$. V príklade je zadanné napätie pripojené na elektródy, tj. rozdiel potenciálov

ktorý vieme určiť zo vzťahu $U = \Delta\varphi = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{r_1}{r_2}$ Z; poslednej časti vieme

určiť dočasnú premennú Q/L a pre intenzitu dostávame $E(r) = \frac{U}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \cdot \frac{1}{r}$ Analogicky pre potenciál

$$\text{zasa } \varphi(r) - \varphi(r_1) = \frac{U}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \int_r^{r_1} \frac{dr}{r} = \frac{U}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r_1}{r}$$

Absolútnu hodnotu okamžitej rýchlosti elektrónu určíme zo zákona zachovania energie, keď $e \cdot \Delta\varphi = \frac{1}{2} m v^2$, tj. po dosadení z predchádzajúcej časti $\frac{eU}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r_1}{r} = \frac{1}{2} m v^2$ a po úprave

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m} \cdot \frac{(\ln r_1 - \ln r)}{(\ln r_1 - \ln r_2)}}$$

Pri zápise pohybovej rovnice zvolíme vzťažnú sústavu napr. tak, že os x smeruje od stredu elektrónky hore, os y od stredu doprava a os z pozdĺž osi elektrónky dozadu. V tejto pravouhlej, pravotočivej vzťažnej sústave je najjednoduchším vyjadrením pohybovej rovnice vektorová rovnica $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e \left[\vec{E} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) \times \vec{B} \right]$. V zvolenej sústave má magnetické pole nenulovú len zložku indukcie a elektrické pole zasa nenulové zložky E_x, E_y . Preto môžeme po zložkách zapísať predchádzajúcu

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= e \left[E_x + B_z \frac{dy}{dt} \right] \\ \text{rovnica v tvare} \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} &= e \left[E_y - B_z \frac{dx}{dt} \right] \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= 0 \end{aligned}$$

4. Príklad

Rodinný dom je vykurovaný zemným plynom s ročnou spotrebou plynu **2650** m³. Výhrevnosť plynu (množstvo energie získanej spálením 1 m³) je **39** MJ (megajoulov). Cena 1 m³ plynu je **14** Sk. Majiteľ uvažuje o prechode na vykurovanie elektrinou. Cena za 1 kWh elektrickej energie je **2,3** Sk (tzv. nočný prúd). Ktorý spôsob vykurovania je ekonomickejší a o koľko? Počítajte bez pomoci kalkulačiek, numerická presnosť na celé Sk je postačujúca (ceny sú z roku 2007 zaokrúhlené pre jednoduchšie počítanie). **(5 bodov)**

Riešenie

Pri spotrebe 2650 m³ plynu je energetická spotreba Q=2650·39=103 350 MJ energie. Cena zaplatená za uvedené množstvo zemného plynu je 37 100 Sk. Energeticky je 1 kWh = 1000 [J/s]*3600 [s] = 3.6 MJ, tj ročná spotreba energie vyjadrená v kWh je 28 708,33 kWh. Táto energia by pri uvedenej cene elektriny stála 66 029 Sk, tj. kúrenie plynom je ekonomickejšie o 28 929 Sk.