

vzniklý otáčaním prúžka s nábojom  $dQ$  uhlovou rýchlosťou  $\omega$ ,  $S = \pi \rho^2$  plochu obopnutú prúdom  $dI$ . Pre magnetický moment prúžka platí

$$dm = S dI = \frac{Q}{4} \omega R^2 \sin^3 \vartheta d\vartheta$$

Celkový magnetický moment dutej gule dostaneme integráciou príspevkov  $dm$  v intervale uhlov od  $\vartheta = 0$  po  $\vartheta = \pi$ , teda

$$m = \frac{Q}{4} \omega R^2 \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{Q}{3} \omega R^2$$

Moment hybnosti otáčajúcej sa dutej gule s hmotnosťou  $M$  je  $L = (2/3)\omega MR^2$ , takže gyromagnetický (magnetomechanický) pomer (pozri odsek 8.1)

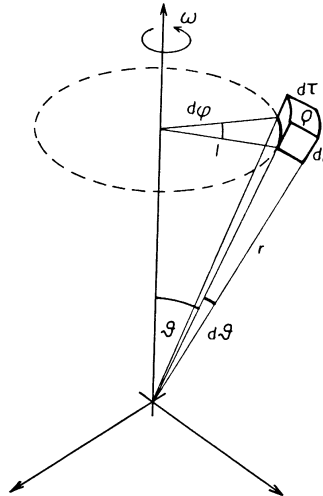
$$\gamma = \frac{m}{L} = \frac{Q}{2M}$$

**165.** Guľu možno rozložiť na objemové elementy  $d\tau = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr$  vo sférických súradniciach podľa obr. R165. Objemová hustota náboja v guli je  $\rho = 3Q/(4\pi R^3)$  a náboj v objemovom elemente  $d\tau$

$$dQ = \rho d\tau = \frac{3Q}{4\pi R^3} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr$$

Tento náboj sa otáča okolo osi rotácie gule uhlovou rýchlosťou  $\omega$  a vytvára tak kruhový prúd  $\delta I = \omega dQ / (2\pi)$  s polomerom  $l = r \sin \vartheta$ . Elementárny magnetický moment tohoto prúdu je

$$dm = \pi l^2 dI = \frac{3\omega Q}{8\pi R^3} r^4 \sin^3 \vartheta d\vartheta d\varphi dr$$



Obr. R165

Celkový magnetický moment gule dostaneme integráciou týchto príspevkov cez  $\varphi$  od 0 po  $2\pi$ , cez  $\vartheta$  od 0 po  $\pi$  a cez  $r$  od 0 po  $R$ , teda

$$m = \frac{3\omega Q}{8\pi R^3} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin^3 \vartheta d\varphi d\vartheta dr = \frac{\omega QR^2}{5}$$

Moment hybnosti plnej gule s polomerom  $R$  a hmotnosťou  $M$  je  $L = 2\omega MR^2/5$  a gyromagnetický pomer

$$\gamma = \frac{m}{L} = \frac{Q}{2M}$$

Vektor magnetického momentu má smer vektora uhlovej rýchlosti.

**166.** Podľa vzťahu (6.59) z odseku 6.1.9 magnetická indukcia na osi dipólu vo vzdialenosti  $R$  je daná výrazom

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi R^3} \quad \text{z čoho magnetický moment} \quad m = \frac{2\pi R^3 B}{\mu_0}$$

Dosadením hodnôt  $R = 6.10^6$  m a  $B = 0,62.10^{-4}$  T dostaneme pre magnetický moment zemského dipólu hodnotu  $m = 6,7.10^{22}$  A.m<sup>2</sup>.

Ekvivalentný prúd na rovníku by bol obrovský a mal by hodnotu

$$I = \frac{m}{\pi R^2} = 5,92.10^8 \text{ A}$$

**167.** Podľa výsledku úlohy 165 magnetický moment plnej gule s nábojom  $Q$  a polomerom  $R$  rotujúcej uhlovou rýchlosťou  $\omega$  je rovný  $m = \omega QR^2/5$ , pričom podľa vzťahu (6.59) z odseku 6.1.9 magnetická indukcia vo vzdialenosti  $R$  v smere magnetického momentu je

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi R^3} = \frac{\mu_0 \omega Q}{10\pi R} \quad \text{z čoho} \quad Q = \frac{10\pi RB}{\mu_0 \omega}$$

a objemová hustota náboja  $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} = \frac{15B}{2\mu_0 \omega R^2}$

Dosadením hodnôt  $B = 0,62.10^{-4}$  T,  $R = 6.10^6$  m a  $\omega = 2/(24.60.60) = 7,3.10^{-5}$  rad/s, dostaneme objemovú hustotu náboja v Zemi  $\rho = 1,41.10^{-7}$  C/m<sup>3</sup>, čo zodpovedá koncentrácii  $n = \rho/e = 8,8.10^{11}$  elementárnych nábojov na 1 m<sup>3</sup>. Na povrchu Zeme by bola intenzita elektrického poľa

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} = 3,18.10^{10} \text{ V/m}$$

$Q$  je celkový náboj a  $R$  je polomer Zeme. Je to obrovská nereálna intenzita elektrického poľa, a preto uvažovaná hypotéza je neprijateľná.

**168.** Intenzita magnetického poľa vo vnútri kábla je

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

Zvoľme objemový element  $d\tau$  s jednotkovou dĺžkou v dutine kábla  $d\tau = 2\pi r dr$ , potom energia nahromadená vo ferite na jednotku dĺžky kábla je

$$W_1 = \frac{\mu_0 \mu_r}{2} \int_{\tau} H^2 d\tau = \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{4\pi} \int_1^2 \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{4\pi} \ln 2 = 3,465 \cdot 10^{-6} \text{ J/m}$$

a energia vo zvyšku dutiny kábla na jednotku dĺžky

$$W_2 = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_2^5 \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln 2,5 = 9,110 \cdot 10^{-8} \text{ J/m}$$

Celková energia na jednotku dĺžky kábla

$$W = W_1 + W_2 = 3,556 \cdot 10^{-6} \text{ J/m}$$

Percentuálny podiel energie vo ferite

$$\eta = \frac{W_1}{W_1 + W_2} 100 \% = 97,6 \%$$

**169.** Celková magnetická indukcia dipólu je daná výrazom (6.60) z odseku 6.1.9

$$B = \sqrt{B_r^2 + B_{\vartheta}^2} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta} = B_0 \frac{R^3}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}$$

kde

$$B_0 = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} = 3,1 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

je magnetická indukcia na rovníku. Energiu magnetického poľa Zeme dostaneme integráciou

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int_{\infty} \left( \frac{B}{\mu_0} \right)^2 d\tau$$

cez celý nekonečný priestor mimo objemu Zeme. Integrovat' je najvýhodnejšie v sférických súradniciach s objemovými elementmi  $d\tau = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr$  takže

$$W = \frac{B_0^2 R^6}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_R^{\infty} \frac{1 + 3 \cos^2 \vartheta}{r^4} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr = \frac{4\pi B_0^2 R^3}{3\mu_0} = 6,9 \cdot 10^{17} \text{ J} \approx 165 \text{ megaton TNT}$$

1 tona TNT =  $4,2 \cdot 10^9$  J. Z výsledku je zrejmé, že výbuch atómovej bomby s energiou jednej megatony TNT nemôže podstatne ovplyvniť magnetické pole Zeme. Aj odpovede na takéto otázky trápili konštruktérov prvej atómovej bomby v Los Alamos National Laboratory, New Mexico, USA, na jar v roku 1945.

**170.** a)  $I = \frac{ev}{2\pi a} = 1,0510^{-3} \text{ A}$

b) Magnetická indukcia v strede atómu

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a} = 12,5168 \text{ T}$$

Je to obrovská indukcia, ktorú nemožno dosiahnuť bežnými prostriedkami experimentálnej fyziky, ale iba v solenoidoch v impulznom režime prípadne v supravodivých magnetoch.

c) Magnetický moment (Bohrov magnetón)

$$m = \frac{e}{2} av = \frac{eh}{4\pi m_e} = \mu_B \approx 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$$

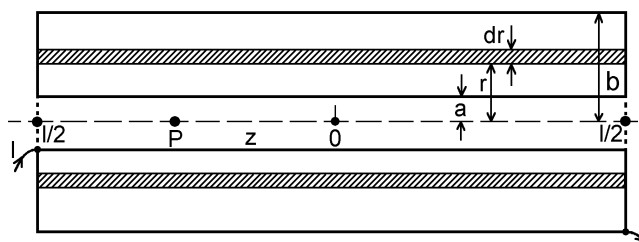
je jedna z dôležitých fyzikálnych konštánt.

**171.** Hrubú cievku možno rozložiť na nekonečne tenké valcové prúdy (solenoidy) podľa obr. R171, pričom magnetická indukcia od takého solenoidu vo vzdialenosti  $z$  od stredu cievky je

$$dB = \frac{\mu_0 n dI}{2l} \left[ \frac{l/2 - z}{\sqrt{r^2 + (l/2 - z)^2}} + \frac{l/2 + z}{\sqrt{r^2 + (l/2 + z)^2}} \right]$$

kde

$$dI = \frac{p I dr}{b - a}$$



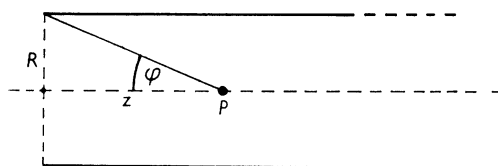
Obr. R171

je prúd v elementárnom solenoide s hrúbkou  $dr$ . Integráciou  $dB$  cez  $r$  od  $a$  po  $b$  dostaneme celkovú magnetickú indukciu

$$B = \frac{\mu_0 n p I}{2l(b-a)} \left[ (l/2 - z) \int_a^b \frac{dr}{\sqrt{(l/2 - z)^2 + r^2}} + (l/2 + z) \int_a^b \frac{dr}{\sqrt{(l/2 + z)^2 + r^2}} \right] =$$

$$= \frac{\mu_0 n p I}{2l(b-a)} \left[ f \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + f^2}}{a + \sqrt{a^2 + f^2}} + g \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + g^2}}{a + \sqrt{a^2 + g^2}} \right]$$

kde  $f = l/2 - z$  a  $g = l/2 + z$ .



Obr. R172

**172.** Veľmi dlhý solenoid možno považovať za "polonekonečný" s jedným koncom v nekonečne (obr. R172). Magnetická indukcia v bode  $P$  vo vzdialenosti  $z$  od čela solenoidu je daná výrazom

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \varphi - \cos \pi) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left( \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} + 1 \right)$$

Sila pôsobiaca na paramagnetickú vzorku bude maximálna v tom mieste, kde

$$\frac{d}{dz} \left( B \frac{dB}{dz} \right) = 0$$

čo je splnené vo vzdialenosti  $z = R/\sqrt{15}$  od čela solenoidu.

173. Využitím vektorovej identity (pozri tabuľku 2)

$$\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \text{ div } \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{ div } \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}$$

dostaneme

$$\text{rot } \mathbf{B} = k \mathbf{J}_z \text{ div } \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -k \frac{\mathbf{J}_z}{r^3}$$

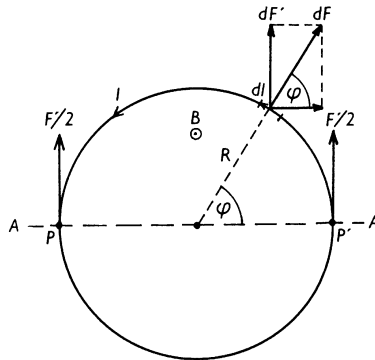
Príklad možno riešiť aj inak. Vektor  $\mathbf{B}$  má iba azimutálnu zložku

$$B_\varphi = \frac{k J_z}{r^2}$$

takže v cylindrických súradniciach (pozri tabuľku 22)

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r} \mathbf{e}_z = -k \frac{\mathbf{J}_z}{r^3}$$

174.  $\text{rot } \mathbf{B} = k \mathbf{J}_z \text{ div } \mathbf{r} - k \mathbf{r} \text{ div } \mathbf{J}_z = 2k \mathbf{J}_z$



Obr. R175

175. Na každý element závitú pôsobí sila (obr. R175)

$$dF = \frac{1}{2} IB dl$$

ktorej zložka kolmá na rovinu  $AA'$  je

$$dF' = \frac{1}{2} IB dl \sin \varphi = \frac{1}{2} IB R \sin \varphi d\varphi$$

Integráciou cez  $\varphi$  od 0 po  $\pi$  dostaneme celkovú silu

$$F' = \frac{1}{2} IBR \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = IBR$$

ktorá napína závit v miestach  $P$  a  $P'$ . Závit sa začne trhať, keď sila  $F'$  dosiahne hodnotu  $F' = 2\eta\pi a^2$ , kde  $\eta$  je pevnosť v ťahu materiálu závitú a  $a$  je polomer drôtu. Porovnaním posledných výrazov a uvážením, že

$$I = \frac{B}{\mu_0 n} = \frac{2Ba}{\mu_0}$$

dostaneme výraz pre kritickú magnetickú indukciu v tvare

$$B_{krit} = \sqrt{\frac{\pi\mu_0\eta a}{R}}$$

Dosadením numerických hodnôt  $a = 0,15$  mm,  $\eta = 2 \cdot 10^8$  N/m<sup>2</sup> a  $R = 3$  cm dostaneme  $B_{krit} = 1,98$  T.

**176.** Pohybová rovnica pre vektor momentu hybnosti gule je tvaru

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad \text{alebo} \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\gamma} \mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

Zavedme súradnicový systém  $xyz$  tak, že  $\mathbf{B}$  má iba  $z$ -ovú zložku  $B_z$ . V tom prípade možno poslednú rovnicu napísať v zložkovom tvare

$$\frac{dL_x}{dt} = \gamma L_y B \quad \frac{dL_y}{dt} = -\gamma L_x B \quad \frac{dL_z}{dt} = 0$$

Riešenie tohto systému možno hľadať tak, že si zavedieme komplexnú veličinu

$$\mathbf{L}_{kompl} = L_x - jL_y$$

a od prvej rovnice odpočítame druhú, násobenú imaginárnou jednotkou  $j$ . Tak dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$\frac{d\mathbf{L}_{kompl}}{dt} = j\gamma B \mathbf{L}_{kompl}$$

ktorej riešenie je tvaru

$$\mathbf{L}_{kompl} = A e^{j\gamma B t} = A(\cos \gamma B t + j \sin \gamma B t)$$

Z čoho

$$L_x = A \cos \gamma B t \quad L_y = -A \sin \gamma B t$$

Riešenie tretej rovnice je

$$L_z = \text{konšt.}$$

Z týchto riešení vidieť, že vektor  $\mathbf{L}$  (viazaný s osou otáčania gule) skutočne vykonáva precesný pohyb okolo smeru magnetickej indukcie  $\mathbf{B}$  s uhlovou rýchlosťou

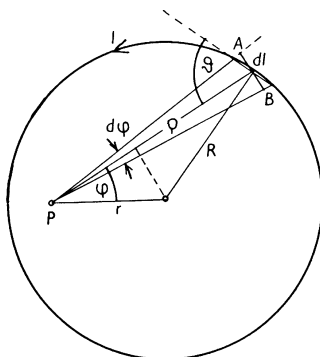
$$\omega_L = \gamma B = \frac{Q}{2m} B$$

**177.** Magnetická indukcia v rovine kruhového závitú má iba zložku  $B_z$  kolmú na rovinu závitú. V bode  $P$  (obr. R177) vo vzdialenosti  $r$  od stredu závitú príspevek k magnetickej indukcii od prúdového elementu  $Idl$  je

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \vartheta}{\rho^2}$$

a indukcia od celého závitu s prúdom  $I$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dl \sin \vartheta}{\rho^2}$$



Obr. R177

pričom integrujeme po dĺžke celého závitu  $2\pi R$ . Z obrázka vidieť, že  $dl \sin \vartheta = \overline{AB} = \rho d\varphi$  a

$$\rho = \sqrt{R^2 - (r \sin \varphi)^2} + r \cos \varphi = R \left( \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + k \cos \varphi \right)$$

kde  $k = r/R < 1$ . Dosadením za  $dl \sin \vartheta$  a  $\rho$  vo výraze pre  $B_z$  dostávame

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi(1-k^2)R} \left( \int_0^{2\pi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - k \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right)$$

Druhý integrál sa rovná nule. Hodnota  $\sin^2 \varphi$  sa opakuje v každom zo štyroch kvadrantov závitu, takže

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{\pi(1-k^2)R} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{\pi(1-k^2)R} E(k)$$

kde

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

je úplný eliptický integrál druhého druhu. Niekoľko jeho hodnôt je uvedených v nasledujúcej tabuľke:

$k$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$E(k)$	1,571	1,567	1,554	1,534	1,504	1,467	1,416	1,351	1,277	1,165	1,000

Hodnoty magnetickej indukcie mimo stredy závitu sú vyššie ako v strede. Tak napr. vo vzdialenosti  $r = R/2$  ( $k = 0,5$ )

$$B_z = \frac{2 \cdot 1,467}{\pi(1 - 0,5^2)} \frac{\mu_0 I}{2R} = 1,245 \frac{\mu_0 I}{2R}$$

čo je hodnota o 24,5 % väčšia ako hodnota  $B_0 = \mu_0 I / (2R)$  v strede závitú.

**178.** Uvažujme integrálnu identitu

$$\int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi$$

kde  $S$  je ľubovoľná plocha ohraničená krivkou  $l$  a  $\Phi$  je indukčný tok plochou  $S$ . Platí teda

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Phi$$

t. j. integrál z vektorového potenciálu  $\mathbf{A}$  po uzavretej krivke  $l$  sa rovná celkovému indukčnému toku  $\Phi$  plochou  $S$ . Môžeme teda vedľa seba napísať dva integrálne výrazy

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_S \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I \qquad \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi$$

Analogickými veličinami sú teda  $\mu_0 I$  a  $\Phi$ , alebo  $\mu_0 \mathbf{J}$  a  $\mathbf{B}$ . Zvoľme cylindrický súradnicový systém  $r, \varphi, z$ , v ktorom pozdĺž osi  $z$  môže byť uložený valcový vodič alebo solenoid rovnakého polomeru  $R$ . Vo vodiči existuje  $z$ -ová zložka prúdovej hustoty a  $z$ -ová zložka vektorového potenciálu (pozri odsek 6.1.8), zatiaľ čo magnetická indukcia má azimutálny smer. V solenoide existuje  $z$ -ová zložka magnetickej indukcie a teda indukčného toku, zatiaľ čo vektorový potenciál má iba azimutálnu zložku (pozri odsek 6.1.9.1). Analogickými veličinami sú teda  $\mu_0 I$  a  $\Phi$ , kde  $I$  je prúd tečúci pozdĺž osi vodiča (v smere osi  $z$ ) a  $\Phi$  je indukčný tok pričným prierezom solenoidu, alebo zložky vektorov  $\mu_0 J_z$  a  $B_z$ .

Pre magnetickú indukciu vo vnútri valcového vodiča s polomerom  $R$  (pre  $r < R$ ) platí

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 J_z r}{2}$$

a analogicky pre vektorový potenciál v solenoide polomeru  $R$  pre  $r < R$

$$A_\varphi = \frac{\Phi r}{2\pi R^2} = \frac{B_z r}{2}$$

Pre  $r > R$  v okolí valcového vodiča

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 J_z R^2}{2r} \qquad \text{a v okolí solenoidu} \qquad A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi r} = \frac{B_z R^2}{2r}$$

Ak vypočítame rotáciu vektorového potenciálu, dostaneme pre  $r < R$

$$\text{rot } (A_\varphi \mathbf{e}_\varphi) = B_z \mathbf{e}_z \qquad \text{a pre } r > R \qquad \text{rot } (A_\varphi \mathbf{e}_\varphi) = 0$$

$\mathbf{e}_\varphi$  a  $\mathbf{e}_z$  sú jednotkové vektory v smeroch súradníc  $\varphi$  a  $z$ .

**179.** Ak je vedenie pod napätím  $U$ , potom na vodičoch vznikajú náboje s dĺžkovou hustotou  $\pm \lambda$ . Jeden vodič pôsobí na druhý príťažlivou silou

$$F_e = \lambda E = \frac{\lambda^2}{2\pi \epsilon_0 d}$$



na jednotku dĺžky vedenia. Podľa úlohy 53 možno  $\lambda$  vyjadriť ako

$$\lambda = C'U = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{a}} U$$

kde  $C'$  je kapacita na jednotku dĺžky vedenia. Po dosadení za  $\lambda$  vo výraze pre  $F_e$  dostaneme

$$F_e = \frac{\pi\epsilon_0}{2d \ln^2 \frac{d}{a}} U^2$$

Magnetická sila medzi vodičmi je odpudivá a vyplýva z Ampérovho zákona:

$$F_m = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}$$

na jednotku dĺžky vedenia. Pre pomer týchto síl platí

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{\ln^2 \frac{d}{a}}{\pi^2 R^2}$$

kde  $R = U/I$  je odpor záťaže vedenia. Výsledná sila pôsobiaca medzi vodičmi vedenia môže byť prítlačlivá (ak  $F_e > F_m$ ) alebo odpudivá (ak  $F_e < F_m$ ). Tvrdenie, že dva vodiče, ktorými tečie ten istý elektrický prúd v opačných smeroch sa odpuďujú, platí iba vtedy, ak elektrické pôsobenie je zanedbateľné, t. j. ak odpor  $R$  je dostatočne malý. Sily sa kompenzujú vtedy, ak  $F_e/F_m = 1$ , t. j. pri hodnote odporu

$$R = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \ln \frac{d}{a} \approx 120 \ln \frac{d}{a} \quad [\Omega]$$

Je zaujímavé, že je to hodnota, ktorá sa rovná vlnovému odporu  $\sqrt{L'/C'}$  vedenia, kde  $L'$  a  $C'$  sú indukčnosť a kapacita na jednotku dĺžky vedenia (pozri úlohy 53 a 207 a tiež odsek 11.6.3).

**180.**  $M = \frac{\mu_0 I_0}{\pi} (b-a) \sin \varphi$ . Pri danom smere prúdov vektor  $\mathbf{M}$  smeruje na obrázku doprava.

**181.** Čiara, po ktorej sa má počítať cirkulácia vektora  $\mathbf{H}$ , je kružnica so stredom na osi pohybu náboja  $q$  a prechádzajúca bodom  $P$  (pozri obr. R181a). Označme polomer kružnice  $R$ . Teda

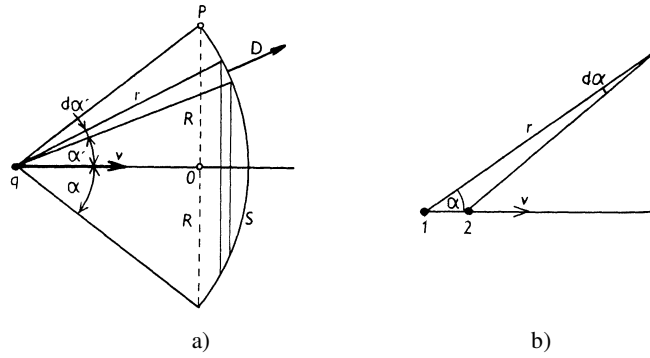
$$2\pi R H = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

Plocha  $S$  je ľubovoľná plocha napnutá na zvolenej kružnici. Pre výpočet toku vektora elektrickej indukcie  $\mathbf{D}$  je najvýhodnejšie vziať guľovú plochu s polomerom  $r$ . Na tejto ploche zvolíme elementárne kruhové prúžky s plochou  $dS = 2\pi r^2 \sin \alpha' d\alpha'$ . Elementárny tok

$$D ds = \frac{q}{4\pi r^2} 2\pi r^2 \sin \alpha' d\alpha' = \frac{q}{2} \sin \alpha' d\alpha'$$

a tok celou plochou

$$\int_S D dS = \frac{q}{2} \int_{\alpha}^{\pi/2} \sin \alpha' d\alpha' = \frac{q}{2} (1 - \cos \alpha)$$



Obr. R181

Derivujme tento výraz podľa času:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S D dS = \frac{q}{2} \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

Pri premiestnení náboja z bodu 1 do bodu 2 (obr. R181b) na vzdialenosť  $v dt$  je  $v dt \sin \alpha = r d\alpha$ , z čoho

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{v \sin \alpha}{r}$$

Dosadením výsledku do predchádzajúceho a potom do prvého vzťahu dostaneme

$$H = \frac{qv}{4\pi r^2} \sin \alpha$$

pričom sme využili skutočnosť, že  $R = r \sin \alpha$ . Vo vektorovom tvare

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad \text{alebo} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

čo je rovnaký výsledok ako udáva výraz (6.5) získaný z experimentálnej skúsenosti.

**182. a)** Napätie na kondenzátore

$$U_C = U_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

kde  $C = \epsilon_0 \pi b^2 / l$ .

b) Intenzita elektrického poľa medzi doskami kondenzátora

$$E_C = \frac{U_C}{l} = \frac{U_0}{l} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

c) Pri osovej symetrii kondenzátora má posuvný prúd medzi doskami kondenzátora hustotu

$$J_{pos} = \frac{dD}{dt} = \epsilon_0 \frac{dE_C}{dt} = -\epsilon_0 \frac{E_C}{RC}$$

paralelnú s osou symetrie kondenzátora. Siločiarly magnetického poľa budú sústredné kružnice so stredmi na osi symetrie. Zo zákona celkového prúdu aplikovaného na kružnicu s polomerom  $r$  plynie pre intenzitu magnetického poľa  $H$

$$2\pi rH = \pi r^2 J_{pos} = -\frac{\pi \varepsilon_0 r^2 E_C}{RC} \quad \text{z čoho} \quad H = -\frac{\varepsilon_0 r E_C}{2RC} = -\frac{lr}{2RS} E_C$$

**183.** Označme začiatočnú plošnú hustotu náboja na doske kondenzátora  $\sigma_0 = Q_0/S$ , kde  $S = \pi a^2$  je plocha dosky kondenzátora a  $C = \varepsilon_0 S/d$  je kapacita kondenzátora. Potom:

$$\text{a) } \sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad \text{b) } Q = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad \text{c) } I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma_0 S}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

d) Hustota posuvného prúdu v kondenzátore

$$J_{pos} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\sigma_0}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

a celkový posuvný prúd ako funkcia vzdialenosti  $d$  od osi kondenzátora a od času

$$I_{pos} = J_{pos} \pi r^2 = -\frac{\sigma_0 \pi r^2}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

e) Magnetická indukcia má v kondenzátore iba azimutálnu zložku  $B_\varphi$ , pre ktorú platí

$$2\pi r B_\varphi = \mu_0 (I + I_{pos})$$

z čoho

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 Q_0}{2\pi RC} \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

**184.** a)  $n = 3,32 \cdot 10^{11}$ ;

b)  $16 \times 20 \text{ cm}^2$ , vzdialenosť dosiek  $d = 2 \text{ mm}$ ,  $n = 3,32 \cdot 10^{11}$ ,  $E = 1,875 \cdot 10^5 \text{ V/m}$ ;

c)  $20 \times 20 \text{ cm}^2$ ,  $d = 1,6 \text{ mm}$ ,  $n = 3,32 \cdot 10^{11}$ ,  $E = 1,5 \cdot 10^5 \text{ V/m}$ .

**185.** V pohybujúcej sa (čiarkovanej) sústave polia sú dané výrazmi

$$\begin{aligned} E_{\parallel}' &= E_{\parallel} & B_{\parallel}' &= B_{\parallel} \\ E_{\perp}' &= \frac{E_{\perp}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & B_{\perp}' &= \frac{-\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}}{c^2 \sqrt{1-(v/c)^2}} \end{aligned}$$

kde zložky s označením  $\parallel$  sú paralelné so smerom rýchlosti sústavy a zložky s označením  $\perp$  sú kolmé na jej rýchlosť. Pre zložky polí v smere súradných osí z týchto výrazov plynie

$$E_x' = \frac{E_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{E_0 \cos \varphi}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad E_y' = E_y = E_0 \sin \varphi$$

$$E_z' = B_x' = B_y' = 0$$

$$B_z' = \frac{v E_x}{c^2 \sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{v E_0 \cos \varphi}{c^2 \sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Číselne:  $E_x' = 35,72 \text{ V/m}$ ,  $E_y' = 16,5 \text{ V/m}$ ,  $E_z' = B_x' = B_y' = 0$ ,  $B_z' = 7,15 \cdot 10^{-8} \text{ T}$ .

**186.** a) V sústave, v ktorej sú elektróny v pokoji, pôsobia na seba iba elektrostatickou odpudivou silou

$$\mathbf{F} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r = e\mathbf{E} \quad \text{kde} \quad \mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

je intenzita elektrického poľa vytvorená prvým elektrónom v mieste druhého elektrónu a  $\mathbf{e}_r$  je jednotkový vektor v smere od prvého ku druhému elektrónu.

b) V laboratórnej sústave, v ktorej sa elektróny pohybujú rýchlosťou  $v$ , odpudivá sila medzi elektrónmi je

$$\mathbf{F}' = e(\mathbf{E}'_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_{\perp})$$

kde

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}'_{\perp}}{c^2 \sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}}{c^2}$$

sú elektrické a magnetické polia elektrónu v laboratórnej sústave. Sila  $\mathbf{F}'_{\perp}$  je potom

$$\mathbf{F}'_{\perp} = e \left( \mathbf{E}'_{\perp} + \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}'_{\perp}}{c^2} \right) = e\mathbf{E}'_{\perp} \left[ 1 - (v/c)^2 \right] = e\mathbf{E}_{\perp} \sqrt{1-(v/c)^2} = \mathbf{F}_{\perp} \sqrt{1-(v/c)^2}$$

Priečna sila k smeru pohybu sa do laboratórnej sústavy transformuje vzťahom

$$\mathbf{F}_{\perp} = \frac{\mathbf{F}'_{\perp}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

čo dáva taký istý výsledok ako v predchádzajúcom prípade. Pre malé rýchlosti  $\mathbf{F}'_{\perp} = \mathbf{F}_{\perp}$ . Ak  $v \rightarrow \infty$ , potom  $\mathbf{F}_{\perp} \rightarrow 0$ .

**187.** Ak  $|\epsilon| \ll 1$ , potom

$$\sin \vartheta = \sin \left( \frac{\pi}{2} + \epsilon \right) \approx \cos \epsilon \quad \text{a keďže} \quad \frac{v^2}{c^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}$$

možno výraz pre intenzitu elektrického poľa elektrónu napísať v tvare

$$E' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{\gamma}{\left( \gamma^2 \sin^2 \epsilon + \cos^2 \epsilon \right)^{3/2}}$$

Ak dosadíme  $\sin^2 \epsilon \approx \epsilon^2$ ,  $\cos^2 \epsilon \approx 1$ , potom

$$E' \approx \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{\gamma}{\left( \gamma^2 \epsilon^2 + 1 \right)^{3/2}}$$

**188.** Polovica toku intenzity elektrického poľa elektrónu je  $e/(2\epsilon_0)$  a je daná výrazom

$$\frac{e}{2\epsilon_0} = \int E' dS = \frac{e\gamma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \frac{2\pi r'^2 \cos \epsilon d\epsilon}{r'^2 \left( \gamma^2 \epsilon^2 + 1 \right)^{3/2}} = \frac{e}{2\epsilon_0} \frac{2\gamma\alpha}{\sqrt{4 + \gamma^2 \alpha^2}}$$

z čoho

$$\alpha = \alpha_{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}\gamma}$$

189. Z transformačných vzťahov pre polia

$$\begin{aligned} E_{\parallel}' &= E_{\parallel} & B_{\parallel}' &= B_{\parallel} \\ E_{\perp}' &= \frac{E_{\perp} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} & B_{\perp}' &= \frac{B_{\perp} - (\mathbf{v} \times \mathbf{E})_{\perp} / c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{aligned}$$

plynie, že sústavy, v ktorých je elektrické alebo magnetické pole nulové, sa musia pohybovať kolmo na  $E_y$  a  $B_z$ , teda pozdĺž súradnice  $x$ . V takýchto sústavách má elektrické a magnetické pole zložky

$$E_y' = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad B_z' = \frac{c^2 B_z - vE_y}{c^2 \sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

a) Elektrické pole  $E_y'$  bude nulové v sústave, ktorá sa pohybuje v smere osi  $x$  rýchlosťou  $v = E_y/B_z$  pričom musí platiť  $cB_z > E_y$ . Magnetické pole má v tomto prípade zložku

$$B_z' = \sqrt{B_z^2 - \frac{E_y^2}{c^2}}$$

V prípade ak  $cB_z < E_y$ , potom neexistuje sústava s nulovým elektrickým poľom.

b) Magnetické pole  $B_z'$  bude nulové v sústave, ktorá sa pohybuje v smere osi  $x$  rýchlosťou

$$v = c^2 \frac{B_z}{E_y}$$

za predpokladu, že  $cB_z < E_y$ . Elektrické pole má pritom zložku

$$E_y' = \sqrt{E_y^2 - c^2 B_z^2}$$

190. V sústave, v ktorej je náboj a priamka v pokoji, pôsobí na náboj odpudivá sila

$$\mathbf{F} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 a} \mathbf{e}_r = q\mathbf{E}$$

kde  $\mathbf{e}_r$  je jednotkový vektor kolmý na priamku a smerujúci k náboju  $q$ . V pohybujúcej sa sústave pôsobí na náboj elektrické pole dané výrazom

$$\mathbf{E}' = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 a} \mathbf{e}_r \quad \text{kde} \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

je dĺžkový náboj pohybujúcej sa priamky, u ktorej dochádza k relativistickej kontrakcii, takže

$$\mathbf{E}' = \frac{\lambda' \mathbf{e}_r}{2\pi\epsilon_0 a \sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Okrem elektrického poľa pôsobí na náboj magnetické pole

$$\mathbf{B}' = \frac{\mu_0 I'}{2\pi a} \mathbf{e}_{\varphi} = \frac{\mu_0 \lambda' v}{2\pi a} \mathbf{e}_{\varphi} = \frac{v}{c^2} \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 a} \mathbf{e}_{\varphi} = \frac{v}{c^2} \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \mathbf{e}_{\varphi}$$

kde  $\mathbf{e}_{\varphi}$  je jednotkový vektor. V pohybujúcej sa sústave pôsobí na náboj  $q$  celková sila

$$\mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{v} \times \mathbf{B}') = \frac{q\mathbf{E}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \frac{v^2}{c^2} \frac{q\mathbf{E}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = q\mathbf{E}\sqrt{1-(v/c)^2}$$

191. a) Vektory elektrického a magnetického poľa možno rozložiť na zložky paralelné a kolmé na smer pohybu sústavy, teda

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp}$$

Skalárny súčin je

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{E}'_{\parallel} \cdot \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp} \cdot \mathbf{B}'_{\perp}$$

Z transformačných vzťahov pre polia plynie, že

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{E}'_{\parallel} \cdot \mathbf{B}'_{\parallel}$$

Pre kolmé zložky platí

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\perp} \cdot \mathbf{B}'_{\perp} &= \frac{[\mathbf{E}_{\perp} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}] \cdot [\mathbf{B}_{\perp} - (\mathbf{v} \times \mathbf{E})_{\perp} / c^2]}{1 - (v/c)^2} = \\ &= \frac{1}{1 - (v/c)^2} \left[ \mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{E}_{\perp} \cdot \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{E})_{\perp}}{c^2} - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{E})_{\perp}}{c^2} \right] \end{aligned}$$

Druhý člen v hranatej zátvorke sa rovná nule pretože vektor  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}$  je kolmý na  $\mathbf{B}_{\perp}$ , takisto tretí člen sa rovná nule, lebo  $(\mathbf{v} \times \mathbf{E})_{\perp}$  je kolmé na  $\mathbf{E}_{\perp}$ . Štvrtý člen možno napísať v tvare

$$-\frac{v^2}{c^2} \mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp}$$

takže  $\mathbf{E}'_{\perp} \cdot \mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp}$ , z čoho plynie, že

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{E}_{\parallel} \cdot \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

Súčin  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  je teda relativistický invariant.

b) Pri dôkaze možno postupovať podobným spôsobom.

192. a) Na každý elektrón pôsobí prítlačlivá sila od roviny

$$F_{\sigma} = \frac{e\sigma}{2\epsilon_0}$$

a v laboratórnej sústave tiež odpudivá sila medzi elektrónmi (pozri úlohu 186)

$$F_e = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} \sqrt{1-(v/c)^2}$$

Tieto sily budú v rovnováhe ( $F_{\sigma} = F_e$ ), ak

$$\sigma = \frac{e}{8\pi a^2} \sqrt{1-(v/c)^2}$$

b) Plošný náboj, ktorý bude kompenzovať odpudivú silu medzi elektrónmi v pokoji, je

$$\sigma_0 = \frac{e}{8\pi a^2} \quad \text{takže} \quad \frac{\sigma}{\sigma_0} = \sqrt{1-(v/c)^2}$$

Pokožová energia elektrónu je  $W_0 = m_0c^2$  a energia pohybujúceho sa elektrónu

$$W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad \text{a teda} \quad \frac{W_0}{W} = \sqrt{1-(v/c)^2} = \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

Pre číselné hodnoty  $W_0 = 0,5 \text{ MeV}$  a  $W = 500 \text{ MeV}$  je

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 10^{-3}$$

**193. a)** V sústave spojennej s tyčami pôsobí na tyče príťažlivá sila elektrického pôvodu

$$F_e = \tau E = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d}$$

kde  $E = \lambda/(2\pi\epsilon_0 d)$  je intenzita elektrického poľa v kolmej vzdialenosti  $d$  od tyče.

b) V pohybujúcej sa sústave existuje elektrické pole  $E'$  a magnetické pole

$$\mathbf{B}' = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}'}{c^2}$$

takže výsledná sila pôsobiaca medzi tyčami je

$$\mathbf{F}' = \lambda'(\mathbf{E}' + \mathbf{v} \times \mathbf{B}') = \lambda' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \mathbf{E}'$$

Avšak  $E' = \lambda'/(2\pi\epsilon_0 d)$  a  $\lambda' = \lambda \sqrt{1-(v/c)^2}$ , takže  $F' = F_e$ .

## 7 Elektromagnetická indukcia

**194.** Intenzita indukovaného elektrického poľa v tyči je

$$E = vB = r\omega B$$

a napätie medzi koncami tyče

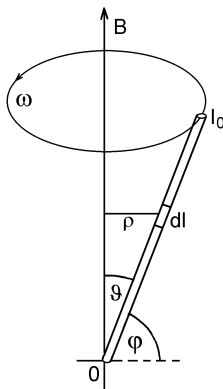
$$U = B \left( \int_0^{2l/3} \omega r dr - \int_0^{l/3} \omega r dr \right) = \frac{\omega B l^2}{6} = 66,7 \text{ mV}$$

**195.** Z obr. R195 je zrejmé, že indukované napätie  $d\mathcal{E}$  v elemente  $dl$  precesujúcej tyče je

$$d\mathcal{E} = vBdl \cos\varphi = vBdl \sin\vartheta$$

kde  $v = \omega r = \omega l \sin\vartheta$  je obvodová rýchlosť elementu  $dl$ . Teda

$$d\mathcal{E} = \omega B \sin^2\vartheta dl \quad \text{a} \quad \mathcal{E} = \omega B \sin^2\vartheta \int_0^{l_0} dl = \frac{\omega B l_0^2}{2} \sin^2\vartheta$$



Obr. R195

196. a) Pri pohybe tyče vzniká v nej elektromotorické napätie  $\mathcal{E}_{ind} = vbB$  a v obvode tečie prúd

$$I = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = \frac{vbB}{R}$$

Na tyč bude pôsobiť sila

$$F = bIB = \frac{vb^2B^2}{R}$$

smerujúca proti smeru pohybu tyče. Táto sila je zviazaná s rýchlosťou tyče pohybovou rovnicou

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{vb^2B^2}{R} = -F$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice so začiatočnou podmienkou  $v = v_0$  v čase  $t = 0$  dostaneme pre rýchlosť tyče výraz

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{b^2B^2t}{mR}\right)$$

Tyč sa bude pohybovať nekonečne dlho s exponenciálne klesajúcou rýchlosťou v čase.

b) Dráha, ktorú tyč prejde, je

$$s = \int_0^{\infty} v(t) dt = \frac{v_0 m R}{b^2 B^2}$$

c) Pohybujúca sa tyč vykonáva prácu proti pôsobiacej sile od magnetického poľa. Táto práca sa vznikom elektrického prúdu v obvode mení na Joulovo teplo v odpore  $R$ . Energia premenená na teplo

$$W_T = R \int_0^{\infty} I^2 dt = \frac{b^2 B^2}{R} \int_0^{\infty} v^2(t) dt = \frac{mv_0^2}{2}$$

je rovná začiatočnej kinetickej energii tyče. Číselne:  $W_T = 5.10^{-5} \text{ J}$ ,  $s = 1 \text{ m}$ .



197. V čase, keď sa rámček pohybuje, tečie ním prúd  $I = \mathcal{E}_{ind}/R$ , kde  $\mathcal{E}_{ind} = -d\Phi/dt$ . Náboj, ktorý pretečie rámčekom, je

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$$

Veľkosť pretečeného náboja závisí teda iba od začiatočného a konečného indukčného toku. Tieto toky sú

$$\Phi_1 = \int_{b-a}^b \frac{\mu_0 I a}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{b}{b-a} \quad \Phi_2 = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b}$$

takže

$$Q = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R} \ln \frac{b+a}{b-a}$$

198. Indukované EMN v prstenci v dôsledku jeho otáčania v magnetickom poli je

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

kde  $\Phi = BS \cos \omega t = \pi a^2 B \cos \omega t$  je magnetický indukčný tok plochou ohraničenou prstencom. Po dosadení dostaneme

$$\mathcal{E}_{ind} = \pi \omega B a^2 \sin \omega t = U_m \sin \omega t$$

Stredný tepelný výkon v prstenci je

$$P = \frac{U_m^2}{2R} = \frac{\pi^2 \omega^2 B^2 a^4}{2R}$$

kde  $R$  je celkový elektrický odpor prstenca. Jediným zdrojom tohoto tepelného výkonu je kinetická energia prstenca  $W = \omega^2 J/2$ , kde  $J = ma^2/2$  je moment zotrvačnosti prstenca vzhľadom na os otáčania ( $m$  je hmotnosť prstenca). Podľa zákona zachovania energie

$$\frac{dW}{dt} = -P \quad \text{teda} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{ma^2 \omega^2}{4} \right) = -\frac{\pi^2 \omega^2 B^2 a^4}{2R}$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice je

$$\omega = \omega_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

kde  $\tau$  je hľadaný charakteristický čas, za ktorý kruhová frekvencia poklesne na 1/e-tinu začiatočnej hodnoty  $\omega_0$ . Tento čas je daný výrazom

$$\tau = \frac{mR}{\pi^2 B^2 a^2}$$

Ak si uvedomíme, že hmotnosť prstenca  $m = 2\pi a \rho S$ , odpor  $R = 2\pi a / (\sigma S)$  ( $S$  je prierezová plocha prstenca), potom

$$\tau = \frac{4\rho}{\sigma B^2} = 1,5 \text{ s}$$

199. V padajúcom rámcu sa indukuje prúd

$$I = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = \frac{aBv}{R}$$

kde  $v$  je rýchlosť rámcu a  $R$  jeho elektrický odpor. Sila pôsobiaca na rámček je

$$F = mg - aIB = mg - v \frac{a^2 B^2}{R}$$

kde  $m$  je hmotnosť rámcu a  $g$  je gravitačné zrýchlenie. Pohybová rovnica pre rámček je

$$m \frac{dv}{dt} = F = mg - v \frac{a^2 B^2}{R} \quad \text{ktorej riešenie je} \quad v(t) = v_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

kde

$$v_0 = \frac{gRm}{a^2 B^2} = \frac{16g\rho}{\sigma B^2} = 12 \text{ mm/s} \quad \tau = \frac{Rm}{a^2 B^2} = \frac{16\rho}{\sigma B^2} = 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

200. Intenzita elektrického poľa vo vode  $E = vB$  a prúdová hustota

$$J = \sigma E = \sigma vB = 0,14 \cdot 10^{-4} \text{ A/m}^2$$

201. Magnetická indukcia v okolí priameho vodiča

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

je kolmá na rovinu slučky. Indukované napätie v slučke

$$\mathcal{E} = av_0 [B(r) - B(r+b)] = \frac{\mu_0 I a b v_0}{2\pi r(r+b)}$$

202. V obvode sa indukuje elektromotorické napätie

$$\mathcal{E}_{ind} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(-\mathcal{E}) = \mathcal{E}$$

Toto napätie spôsobí prúd v slučke  $I = \mathcal{E}/R$ . Označme  $R_1$  odpor kratšieho oblúka  $AB$ , dlhší oblúk  $BA$  má odpor  $R - R_1$ . Výsledok merania napätia závisí od spôsobu pripojenia voltmetra. Ak sa voltmeter pripojí vodičmi pozdĺž kratšieho oblúka  $AB$ , nameria sa napätie  $U_{AB} = IR_1 = \mathcal{E}R_1/R$ , ak sa pripojí pozdĺž dlhšieho oblúka  $BA$ , nameria sa napätie  $U_{BA} = I(R - R_1) = \mathcal{E}(R - R_1)/R$ . Predpokladá sa, že spojovacie vodiče nepretínajú indukčný tok. Medzi dvoma bodmi  $A$  a  $B$  nameria teda voltmeter dve rôzne hodnoty napätia.

Tento na prvý pohľad paradoxný výsledok súvisí so skutočnosťou, že elektrické pole v závite je vírovým poľom a dráhový integrál jeho intenzity je nenulový, na rozdiel od elektrostatických prípadov. Súčet napätí v obvode je teda tiež nenulový a v danom prípade

$$U_{AB} + U_{BA} = \mathcal{E} \neq 0$$

203. Vo veľkej vzdialenosti od závitú je magnetické pole poľom dipólu a magnetická indukcia na jeho osi je

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3}$$

kde  $m = \pi a^2 I$  je magnetický moment závitů. Magnetický tok protínající druhý závit je

$$\Phi_2 = \pi a^2 B(b) = \frac{\pi \mu_0 I a^4}{2b^3} \quad \text{takže vzájemná indukčnost} \quad M = \frac{\Phi_2}{I} = \frac{\mu_0 \pi a^4}{2b^3}$$

$$204. \quad Q = \frac{SB}{R_i}$$

205. Ak je proud vo valcovom vodiči rozložený homogénne, potom vo zvolenej valcovej časti vodiča o polomere  $r < R$  tečie časť prúdu  $I' = r^2/R^2$  ktorý vytvára vo vzdialenosti  $r$  od osi valca magnetickú indukciu

$$B = \frac{\mu_0 I' r}{2\pi R^2}$$

Elementárny indukčný tok v dutine vymedzenej valcami s polormi  $r$  a  $r + dr$  a s jednotkovou dĺžkou viazaný s prúdom  $I'$  je

$$d\Phi = B \frac{r^2}{R^2} dr = \frac{\mu_0 I' r^3}{2\pi R^4} dr \quad \text{a celkový tok} \quad \Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^4} \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu_0 I}{8\pi}$$

z čoho indukčnosť na jednotku dĺžky

$$L' = \frac{\mu_0}{8\pi}$$

Výraz platí iba pre jednosmerné a nízkofrekvenčné prúdy, keď možno zanedbať skinefekt.

206. Ak páskovým vedením tečie prúd  $I$  v navzájom opačných smeroch, potom magnetická indukcia medzi páskami je (pozri odsek 6.1.9, bod 6.)

$$B = \mu_0 J = \frac{\mu_0 I}{w}$$

a indukčný tok medzi páskami na jednotku dĺžky vedenia je

$$\Phi = Bd = \frac{\mu_0 Id}{w}$$

takže indukčnosť na jednotku dĺžky vedenia je

$$L' = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 d}{w}$$

207. Ak vodičmi tečie prúd  $I$  v navzájom opačných smeroch, potom každý z vodičov budí vo svojom okolí magnetickú indukciu

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

a celkový tok medzi vodičmi na jednotku dĺžky vedenia je

$$\Phi = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^{d-a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

Indukčnosť na jednotku dĺžky vedenia

$$L' = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a} \quad \text{a ak } d \gg a, \text{ potom} \quad L' \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a}$$

**208.** Systém valcový vodič – rovina sa dá pre potreby výpočtu indukčnosti nahradiť dvojicou paralelných valcových vodičov uložených vo vzdialenosti  $2d$ , ktorými tečú prúdy  $I$  v navzájom opačných smeroch. Indukčný tok medzi vodičom a rovinou je rovný polovici indukčného toku medzi vodičmi, teda indukčnosť systému valcový vodič – rovina bude rovná polovici indukčnosti dvojlinky. Využitím výsledok predchádzajúcej úlohy dostaneme

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2d-R}{R} \quad \text{alebo približne} \quad L' \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2d}{R}$$

**209.** Ak vonkajším solenoidom tečie prúd  $I_1$ , potom magnetická indukcia v jeho vnútri je

$$B = \frac{\mu_0 I_1 N_2}{b^2}$$

a pretína  $N_1$  závitov vnútorného solenoidu s celkovou plochou  $N_1 \pi a_1^2$ . Indukčný tok vnútorným solenoidom je teda

$$\Phi_2 = \pi \mu_0 I_1 N_1 N_2 \frac{a_1^2}{b_2} \quad \text{a vzájomná indukčnosť} \quad M = \frac{\Phi_2}{I_1} = \pi \mu_0 N_1 N_2 \frac{a_1^2}{b_2}$$

**210.** Magnetická indukcia v okolí priameho vodiča s prúdom  $I_1$  je

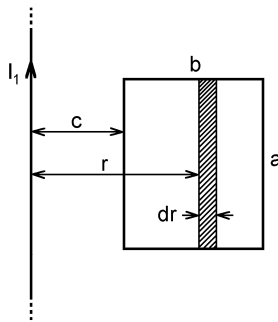
$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

a tok štvoruholníkovou slučkou podľa obr. R210

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \int_c^{c+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \ln \frac{c+b}{c}$$

z čoho vzájomná indukčnosť

$$M = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{c+b}{c}$$



Obr. R210

$$211. M = \mu_0 p \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{p^2}} \right)$$

212. Pole závitů 1 vo veľkej vzdialenosti  $d$  je póľom magnetického dipólu. Na osi dipólu je magnetická indukcia

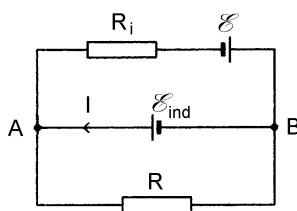
$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi d^3}$$

Indukované elektromotorické napätie v závite 2 je

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \frac{dS}{dt}$$

kde  $S = \pi a^2 \cos \alpha$ , takže

$$\mathcal{E} = \frac{\omega \mu_0 I a^4}{2d^3} \sin \omega t$$



Obr. R213

213. Predovšetkým treba vypočítať prúd, ktorý tečie pohybujúcim sa vodičom  $AB$ . Tento prúd je daný zdrojom EMN  $\mathcal{E}$  a indukovaným EMN  $\mathcal{E}_{ind} = lvB$ , závislým od rýchlosti  $v$  vodiča. Pre sústavu možno nakresliť náhradný obvod podľa obr. R213, v ktorom prúd vodičom  $AB$  je

$$I = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R'} + \frac{\mathcal{E}}{R_i} = \frac{lvB}{R'} + \frac{\mathcal{E}}{R_i}$$

kde  $R' = R_i R / (R_i + R)$ . Sila pôsobiaca na vodič v gravitačnom a magnetickom poli  $B$  je výslednicou gravitačnej sily  $mg$  smerujúcej nadol a magnetickej sily  $lIB$  smerujúcej nahor, teda

$$F = mg - lIB = mg - \frac{lB\mathcal{E}}{R_i} - v \frac{l^2 B^2}{R'}$$

Pre pohyb vodiča  $AB$  platí pohybová rovnica

$$m \frac{dv}{dt} = F = mg - \frac{lB\mathcal{E}}{R_i} - v \frac{l^2 B^2}{R'}$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice pre  $v$  je tvaru

$$v(t) = v_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad \text{kde} \quad v_0 = \frac{(mgR_i - \mathcal{E}lB)R}{(R_i + R)l^2 B^2} = 0,31 \text{ m/s}$$

je hľadaná ustálená rýchlosť vodiča. Časová konštanta pohybu

$$\tau = \frac{mR_i R}{(R_i + R)l^2 B^2} = 1 \text{ s}$$

Doba, po ktorej možno rýchlosť považovať za ustálenú, je väčšia ako  $5\tau$ .

**214.** Vodičom  $AB$  pri jeho pohybe rýchlosťou  $v$  nadol tečie prúd

$$I = \frac{2\mathcal{E}_{ind}}{3R} = \frac{2vIB}{3R}$$

Na vodič pôsobí výsledná sila smerom nadol

$$F = mg - \frac{2vl^2 B^2}{3R}$$

Riešením pohybovej rovnice pre rýchlosť vodiča

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{2vl^2 B^2}{3R}$$

dostaneme riešenie v tvare  $v(t) = v_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$

kde

$$v_0 = \frac{3mgR}{2l^2 B^2} = 1,47 \text{ cm/s}$$

je hľadaná rýchlosť (bez započítania odporu vzduchu).

**215.** Na oboch stranách pásy budú plošné náboje veľkosti  $\sigma = \epsilon_0 v B = 10^{-6} \text{ C/m}^2$ . Kladné náboje na páske sa posunú v smere vektora  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  a záporné v opačnom smere.

**216.** V otáčajúcom sa valci pôsobí na viazané náboje Lorentzova sila, ktorej je ekvivalentná intenzita elektrického poľa

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\omega} B r$$

ak vektory  $\boldsymbol{\omega}$  a  $\mathbf{B}$  majú rovnaký smer. Vzniknuté viazané náboje znížia túto intenzitu  $\epsilon_r$ -krát, takže výsledná intenzita  $\mathbf{E}$  v objeme valca bude daná výrazom

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r} = \frac{1}{\epsilon_r} \boldsymbol{\omega} B r$$

Vektor polarizácie  $\mathbf{P}$  v objeme valca (pre  $r_1 < r < r_2$ ) je daný výrazom

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} = \epsilon_0 \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \boldsymbol{\omega} B r$$

$$\text{a) } \rho_v = -\text{div } \mathbf{P} = -2\epsilon_0 \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \boldsymbol{\omega} B$$

$$\text{b) } Q_v = \pi(r_2^2 - r_1^2) \rho = 2\pi(r_2^2 - r_1^2) \epsilon_0 \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \boldsymbol{\omega} B$$

$$\text{c) } \sigma_v(r_1) = -P(r_1) = -\epsilon_0 \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \boldsymbol{\omega} B r_1 \quad \sigma_v(r_2) = -P(r_2) = -\epsilon_0 \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \boldsymbol{\omega} B r_2$$

$$d) Q'_v = 2\pi r_2 \sigma_v(r_2) - 2\pi r_1 \sigma_v(r_1) = 2\pi(r_2^2 - r_1^1) \epsilon_0 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \omega B$$

$$e) Q_v + Q'_v = 0$$

217. V súhlase s výsledkom úlohy 209 vzájomná indukčnosť cievčky a solenoidu je

$$M = \mu_0 n N S = 10^{-2} \text{ H}$$

a napätie indukované v solenoide

$$\mathcal{E} = \pm M \frac{di}{dt} = \pm \omega M I \cos \omega t = \pm 2,5 \cos \omega t \quad [\text{V}]$$

Znamienko závisí od vzájomného smeru vinutí.

218. a) Časová zmena indukčného toku na kruhu s polomerom  $R$  je

$$\frac{d\Phi}{dt} = \pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

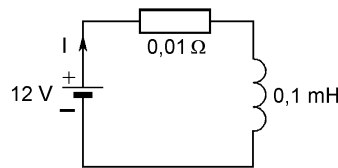
pričom indukované elektrické pole na kružnici s polomerom  $R$  je dané výrazom

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi R E = \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{z čoho plynie, že} \quad E = \frac{R}{2} \frac{d\bar{B}}{dt}$$

b) Zmena hybnosti elektrónu spôsobená zmenou magnetickej indukcie na polomere  $R$  je  $mdv = eR dB_R$  a musí byť rovná zmene hybnosti od účinku intenzity elektrického poľa  $E$ , teda

$$mdv = eE dt = \frac{eR}{2} d\bar{B}$$

Z posledných dvoch výrazov plynie, že  $dB_R = d\bar{B}/2$ .



Obr. R219

219. a) Náhradný obvod cievky a zdroja je na obr. R219. Pre prúd  $I$  v obvode platí diferenciálna rovnica

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}$$

ktorej riešenie so začiatočnou podmienkou  $I = 0$  pre  $t = 0$  je

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{R}{L} t\right) \right]$$

Prúd dosiahne maximálnu hodnotu  $I_{max} = \mathcal{E}/R$  po nekonečnej dobe. Pre čas  $t_0$ , v ktorom prúd dosiahne 90 % maximálnej hodnoty, t. j.  $I = 0,9I_{max}$ , z posledného výrazu plynie

$$t_0 = \frac{L}{R} \ln \frac{I_{max}}{I_{max} - 0,9I_{max}} = \frac{L}{R} \ln 10 = 0,115 \text{ s}$$

b) Energia magnetického poľa v čase  $t = t_0$  je

$$W_{mag} = \frac{L}{2} (0,9I_{max})^2 = 291,5 \text{ J}$$

c) Celková energia odobratá zo zdroja v čase  $t = t_0$  je

$$W_{zdroj} = \int_0^{t_0} \mathcal{E} dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^{t_0} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right] dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \left\{ t_0 - \frac{L}{R} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right] \right\} = 1010 \text{ J}$$

**220.** Pre prúdy v zapojení na obr. R220 platia rovnice

$$I_1 + I_2 = I \quad L \frac{dI_2}{dt} + R_i I = \mathcal{E} \quad RI_1 - L \frac{dI_2}{dt} = 0$$

Postupnými substitúciami v druhej rovnici a jej úpravou dostaneme rovnicu

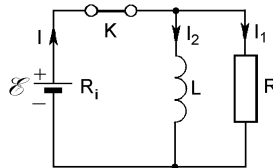
$$\frac{dI_2}{dt} + \frac{R_i}{kL} I_2 = \frac{\mathcal{E}}{kL}$$

kde  $k = (1 + R_i/R)$ . V čase  $t = 0$  je  $I_2 = 0$ , a v čase  $t = \infty$  je  $I_2 = \mathcal{E}/R_i$ . Riešenie poslednej rovnice je potom tvaru

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_i} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{R_i}{kL}t\right) \right] \quad \text{a prúd odporom } R \quad I_1 = \frac{L}{R} \frac{dI_2}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{kR} \exp\left(-\frac{R_i}{kL}t\right)$$

Celkový náboj  $Q_R$ , ktorý pretečie odporom  $R$  dostaneme integráciou tohto prúdu v časovom intervale  $t = 0$  až po  $t = \infty$ , teda

$$Q_R = \int_0^{\infty} I_1 dt = \frac{\mathcal{E}}{RR_i}$$



Obr. R220

Úlohu však možno riešiť oveľa jednoduchšie. Pre prúdy  $I_1$  a  $I_2$  v zapojení podľa obr. R220 platí

$$RI_1 = L \frac{dI_2}{dt}$$



Prúd  $I_1 = dQ_R/dt$ , kde  $Q_R$  je náboj tečúci odporom  $R$ . Po dosadení do poslednej rovnice dostaneme rovnicu

$$R \frac{dQ_R}{dt} = L \frac{dI_2}{dt} \quad \text{a jej integráciou dostaneme} \quad Q_R = \frac{L}{R} \int_0^{I_\infty} dI_2 = \frac{L}{R} I_\infty$$

Prúd indukčnosťou v okamihu zopnutia kľúča sa rovná nule. Prúd  $I_\infty = \mathcal{E}/R_i$  je prúd po nekonečne dlhom čase (ustálený prúd v indukčnosti). Teda

$$Q_R = \frac{\mathcal{E}L}{RR_i}$$

**221.** Uvažujme najprv elektromagnet s nulovým odporom, premostený kapacitou  $C$  a napájaný konštantným prúdom  $I_0$  podľa obr. R221a. Po prerušení prúdu bude pre obvod v každom okamihu platiť rovnica

$$U_L + U_C = 0 \quad \text{alebo} \quad L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt = 0$$

Derivovaním tejto rovnice podľa času dostaneme diferenciálnu rovnicu pre prúd v obvode

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{C} = 0$$

ktorej riešenie so začiatočnou podmienkou  $I = I_0$  v čase  $t = 0$  (v okamihu prerušenia prúdu dodávaného do elektromagnetu) je

$$I = I_0 \cos \omega t$$

kde  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . Napätie na indukčnosti reprezentovanej elektromagnetom je

$$U_L = -L \frac{dI}{dt} = \omega L I_0 \sin \omega t$$

Z tohoto výrazu vidieť, že napätie na indukčnosti má periodický priebeh s amplitúdou

$$U_m = \omega L I_0 = I_0 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Pri požiadavke  $U_m = 10\,000$  V plyní pre kapacitu hodnota

$$C = \frac{L I_0^2}{U_m^2} = 10^{-6} \text{ F} = 1 \mu\text{F}$$



Obr. R221

Ak odpor vinutia elektromagnetu je  $R = 1 \Omega$ , možno indukované napätie odhadnúť nasledovným spôsobom: Stacionárny prúd v indukčnosti je 10 A a pri prerušení obvodu sa skokom nezmení. Na odpore je v začiatočnom okamihu napätie  $I_0 R = 10 \text{ V}$ , ktoré sa odčíta od indukovaného napätia 10 000 V. Teda na vinutí elektromagnetu bude napätie asi 9 990 V.

Pri presnejšom výpočte možno postupovať nasledovne: Náhradný obvod pre elektromagnet s nenulovým odporom a paralelným kondenzátorom je na obr. R221b. Pre tento obvod platí rovnica

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

ktorej všeobecné riešenie je

$$I = Ke^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$$

kde  $K$  a  $\varphi$  sú konštanty, ktoré sa určia zo začiatočných podmienok.  $\alpha$  a  $\omega$  sú dané výrazmi

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Napätie na kondenzátore (a teda aj na svorkách elektromagnetu) je

$$U_C = \frac{1}{C} \int I dt = -\frac{K}{C} \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} [\alpha \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cos(\omega t + \varphi)] =$$

$$= -KLe^{-\alpha t} [\alpha \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cos(\omega t + \varphi)]$$

Z výrazu vidno, že napätie na svorkách elektromagnetu má po prerušení prúdového obvodu periodický priebeh, ktorého amplitúda exponenciálne klesá s faktorom  $e^{-\alpha t}$ .

V ďalšom treba určiť extrémny napätia na svorkách elektromagnetu. Časy  $t_n$ , v ktorých napätie na svorkách elektromagnetu dosahuje extrémne hodnoty, sa určia z podmienky

$$\frac{dU_C}{dt} = KLe^{-\alpha t} (\alpha + \omega) \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

čo je splnené, ak  $\omega t_n + \varphi = n\pi$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Pretože faktor  $e^{-\alpha t}$  so zvyšovaním času klesá, napätie bude najväčšie pre najmenší čas  $t_0$ , pre ktorý platí

$$\omega t_0 + \varphi = 0 \qquad \text{z čoho} \qquad t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$$

Maximálne napätie na svorkách elektromagnetu sa určí z výrazu pre  $U_C$  v čase  $t = t_0$ . Jeho hodnota je

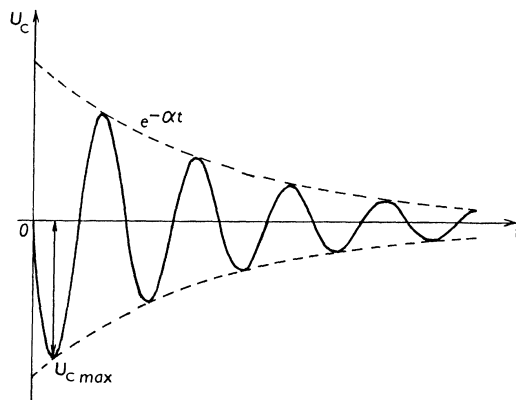
$$U_{Cmax} = -KL\omega e^{-\alpha t_0}$$

Na výpočet tohto napätia ešte treba určiť konštanty  $K$  a  $\varphi$ . V čase  $t = 0$  prúd v obvode má hodnotu  $I_0 = 10 \text{ A}$  a napätie na kondenzátore sa rovná napätiovému spádu na odpore elektromagnetu, teda  $U_{C0} = RI_0 = 10 \text{ V}$ . Z výrazov pre  $I$  a  $U_C$  v čase  $t = 0$  plynie

$$I_0 = K \sin \varphi \qquad U_{C0} = -KL(\alpha \sin \varphi + \omega \cos \varphi)$$

Riešením týchto rovníc pre  $K$  a  $\varphi$  dostaneme

$$K = \pm I_0 \sqrt{1 + \left(\frac{U_{C0}}{\omega L I_0} + \frac{\alpha}{\omega}\right)^2} \qquad \text{a} \qquad \varphi = \arcsin \frac{I_0}{K} = \pm \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{U_{C0}}{\omega L I_0} + \frac{\alpha}{\omega}\right)^2}}$$



Obr. R221c

Dosadením číselných hodnôt dostaneme  $K = \pm 10\sqrt{1 + 2,225 \cdot 10^{-6}}$  A  $\approx \pm 10$  A a  $\varphi \approx \pm \pi/2$ . Pretože  $t_0$  musí byť kladné (čas po prerušení obvodu), treba voliť

$$\varphi = -\pi/2 \qquad K = +10 \text{ A}$$

takže

$$t_0 = \frac{\pi}{2\omega}$$

Dosadením číselných hodnôt do výrazu pre  $U_{C \max}$  dostaneme

$$U_{C \max} = -K\omega L \exp\left(-\frac{\alpha\pi}{2\omega}\right) = -9\,992 \text{ V}$$

Znamienko "-" vo výsledku vyjadruje skutočnosť, že polarita prvého maxima napätia na kondenzátore je opačná ako polarita napätia v ustálenom stave (pred rozopnutím obvodu). Priebeh napätia na svorkách elektromagnetu je znázornený na obr. R221c.

**222.** V ustálenom stave tečie indukčnosťou prúd  $I = U_0/R_L$  za predpokladu, že vnútorný odpor zdroja je zanedbateľný. V okamihu odpojenia zdroja prúd v indukčnosti má hodnotu  $I$ , ale uzatvára sa cez odpor  $R$ . Napätie na odpore  $R$  (teda na svorkách indukčnosti) je vtedy maximálne a má hodnotu

$$U_{\max} = RI = U_0 \frac{R}{R_L}$$

teda napätie na svorkách indukčnosti po odopnutí zdroja je  $R/R_L$ -krát väčšie ako napätie zdroja.

**223.** Pre obvod na obr. 223 v zadaní úlohy platia rovnice podľa II. Kirchhoffovho zákona

$$RI_1 + L \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} = \mathcal{E} \qquad L \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} = 0$$

Substitúciou  $dI_2/dt$  v prvej rovnici z druhej dostaneme rovnicu

$$L' \frac{dI_1}{dt} - RI_1 = \mathcal{E} \qquad \text{kde} \qquad L' = L \left(1 - \frac{M^2}{L^2}\right) = 0,64L$$

Riešením rovnice pre  $I_1$  so začiatočnou podmienkou  $I_1 = 0$  v čase  $t = 0$  dostaneme výrazy pre prúdy v primárnom obvode

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[ 1 - \exp\left(-1,56 \frac{R}{L} t\right) \right]$$

a v sekundárnom obvode

$$I_2 = \frac{M}{L} \int \frac{dI_1}{dt} dt = 0,6I_1 + \text{konšt.}$$

Hodnotu integračnej konštanty určíme zo začiatočnej podmienky. V čase  $t = 0$  je  $I_2 = 0$ , z čoho plynie, že konšt. = 0, teda

$$I_2 = 0,6I_1 = 0,6 \frac{\mathcal{E}}{R} \left[ 1 - \exp\left(-1,56 \frac{R}{L} t\right) \right]$$

Výsledok riešenia je na prvý pohľad prekvapivý, pretože po ustálení prechodového javu (po čase väčšom ako  $5\tau = 5L/1,56R$ ) tečie v sekundárnom obvode prakticky stály prúd s asymptotickou hodnotou

$$I_{02} = 0,6 \frac{\mathcal{E}}{R} \quad \text{a v primárnom obvode prúd} \quad I_{01} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Tento stav sa zachová dovtedy, dokiaľ sa nerozopne spínač v primárnom obvode. Samozrejme takáto situácia je možná iba vtedy, ak sekundárny obvod je supravodivý (pozri odsek 8.5), teda ak jeho odpor je nulový. V opačnom prípade by prúd v sekundárnom obvode exponenciálne klesal k nule. Takýto princíp sa využíva pre počiatkové vzbudenie prúdu v cievkach supravodivých magnetov.

## 8 Magnetizmus látok

**224.** Ak vo výraze (8.50) pre diamagnetickú susceptibilitu dosadíme  $n = N_A$  (Avogadrovo číslo) dostaneme výraz pre susceptibilitu vzťahnutú na kilomol, teda

$$\chi_M = -5,9 \cdot 10^{-15} N_A \sum_Z \langle r^2 \rangle = -3,553 \cdot 10^{12} \sum_Z \langle r^2 \rangle$$

Keďže susceptibilita jedného kilomolu hélia je  $\chi_M = -2,4 \cdot 10^{-8}$ , z posledného výrazu vyplýva, že

$$\sum_{Z=2} \langle r^2 \rangle = 6,755 \cdot 10^{-21} = 2,423 a_0^2 \quad [\text{m}^2]$$

z čoho na jednu elektrónovú dráhu (dva elektróny hélia) pripadá hodnota stredného kvadratického polomeru  $1,21 a_0^2$ .

**225.** Ak vo výraze (8.57) pre paramagnetickú susceptibilitu urobíme zámenu  $n \rightarrow N_A$  (Avogadrovo číslo) dostaneme výraz pre susceptibilitu na kilomol v tvare

$$\chi = \frac{\mu_0 N_A m^2}{3kT} = 1,827 \cdot 10^{43} \frac{\text{m}^2}{T}$$

Porovnaním tejto hodnoty s hodnotou uvedenou v zadaní úlohy dostávame pre permanentný dipólový moment pripadajúci na jeden ión  $\text{Ni}^{2+}$  za uvedených predpokladov hodnotu

$$m = 2,96 \cdot 10^{-23} \text{ A.m}^2$$

226. Označme magnetické pole v prstenci  $B$ ,  $H$  a pole v štrbine  $B_0$ ,  $H_0$ . Potom platí

$$Hl + H_0l_0 = NI$$

$$B = B_0 \quad \text{alebo} \quad \mu H = \mu_0 H_0$$

Riešením týchto rovníc pre  $H$  a  $H_0$  a dosadením numerických hodnôt dostaneme

$$H = \frac{\mu_0 NI}{\mu_0 l + \mu l_0} = 49,2 \text{ A/m} \quad H_0 = \frac{\mu}{\mu_0} H = 1,475 \cdot 10^5 \text{ A/m}$$

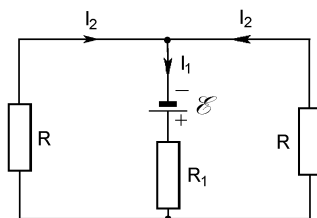
$$B = B_0 = \mu_0 H_0 = \mu H = 0,185 \text{ T}$$

227. Magnetické odpory (reluktancie) jednotlivých častí magnetického obvodu na obr. 227 v zadaní úlohy sú: od bodu 0 po bod  $P$  doprava

$$R_m = \frac{2l_1 + l_2}{\mu S}$$

a rovnaká reluktancia je od bodu 0 k  $P$  smerom doľava. Od 0 po  $P$  cez štrbinu je reluktancia

$$R_{m1} = \frac{l_2 - l_3}{\mu S} + \frac{l_3}{\mu_0 S}$$



Obr. R227

Uvažovaný magnetický obvod možno modelovať elektrickým obvodom podľa obr. R227, v ktorom prúd

$$I_1 = \frac{2\mathcal{E}}{R + 2R_1}$$

Pre magnetický obvod treba urobiť náhradu  $I_1 \rightarrow \Phi$  (magnetický indukčný tok v štrbine),  $\mathcal{E} \rightarrow NI$  (magnetomotorické napätie pôsobiace v obvode),  $R \rightarrow R_m$  a  $R_1 \rightarrow R_{m1}$ . Potom dostaneme

$$\Phi = \frac{2NI}{R_m + 2R_{m1}}$$

Magnetická indukcia v štrbine

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{2\mu NI}{2l_1 + 3l_2 + 2l_3 \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right)} = 1,87 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

a intenzita magnetického poľa v štrbine

$$H = \frac{B}{\mu_0} = 14\,880 \text{ A/m}$$

**228.** Pre magnetický obvod prstenca platí  $2\pi RH = NI$ , kde  $R = (R_1 + R_2)/2 = 11$  cm je stredný polomer prstenca. Prúd vo vinutí

$$I = \frac{2\pi R}{N} H = 0,0346 H \quad [\text{A}; \text{A/m}]$$

Z magnetizačnej krivky na obr. 228 v zadaní úlohy zistíme, že na vytvorenie magnetickej indukcie  $B = 1,2$  T je potrebná intenzita magnetického poľa  $H = 130$  A/m. Dosadením tejto hodnoty do posledného výrazu dostaneme magnetizačný prúd  $I = 4,5$  A.

**229.** Hysterézne straty na jednotku objemu a počas jedného magnetizačného cyklu sú dané výrazom

$$W = \oint_{-B_0 \leftrightarrow +B_0} H dB$$

a graficky predstavujú plochu ohraničenú hysteréznou slučkou. Táto plocha sa rovná integrálu z rozdielu funkcií  $B^+$  a  $B^-$  v hraniciach od  $-H_0$ , po  $+H_0$ , teda

$$W = \int_{-H_0}^{+H_0} (B^+ - B^-) dH = a \int_{-H_0}^{+H_0} (H_0^2 - H^2) dH = \frac{4}{3} a H_0^3$$

**230.** Z výrazu pre intenzitu Hallovoho elektrického poľa

$$E_H = \frac{JB}{ne}$$

dostaneme počet vodivostných elektrónov na jednotku objemu

$$n = \frac{JB}{eE_H} = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

Počet atómov sodíka na jednotku objemu

$$n_{at} = \frac{\rho N_A}{M} = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

kde  $N_A$  je Avogadrovo číslo. Na jeden atóm sodíka pripadá jeden vodivostný elektrón.

## 9 Striedavé elektrické prúdy

**231.** Stredné hodnoty priebehov na obr. 231 v zadaní úlohy sú:

- a) 0, b)  $U_m/\pi$ , c)  $U_m/2$ , d)  $2U_m/\pi$ , e) 0, f)  $U_m/2$ , g) 0, h)  $U_m/2$ .

Efektívne hodnoty:

- a)  $U_m/\sqrt{2}$ , b)  $U_m/2$ , c)  $U_m/\sqrt{3}$ , d)  $U_m/\sqrt{2}$ , e)  $U_m$ , f)  $U_m/\sqrt{3}$ , g)  $U_m/\sqrt{3}$ , h)  $U_m/\sqrt{2}$ .

**232.** Prúd zaostáva za napätím vo fáze o  $\varphi = 63,4^\circ$ , teda obvod pozostáva z odporu a indukčnosti. Kruhovú frekvenciu  $\omega = 500$  rad/s. Pre pomer amplitúd napätia a prúdu platí

$$\frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad \text{a pre fázu} \quad \text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{R}$$

z čoho 
$$R = \frac{U_m}{I_m \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \quad \text{a} \quad L = \frac{R}{\omega} \operatorname{tg} \varphi$$

Dosadením číselných hodnôt  $U_m = 150 \text{ V}$ ,  $I_m = 13,42 \text{ A}$ ,  $\varphi = 63,4^\circ$  dostaneme

$$R = 5 \Omega \quad L = 20 \text{ mH}$$

**233.**  $R = 20 \Omega$ ,  $C = 33,3 \mu\text{F}$

**234.**  $R = 16 \Omega$ ,  $L = 16 \text{ mH}$ ,  $C = 250 \mu\text{F}$

**235.** a) Napätie na vstupných svorkách  $U_{ef} = R_2 I_{3ef} = 120 \text{ V}$ .

b) Ďalej platí

$$\frac{I_{2ef}}{U_{ef}} = \sqrt{\left(\frac{1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L}\right)^2} \quad \text{z čoho} \quad X_L = \frac{U_{ef} R_2}{\sqrt{I_{2ef}^2 R_2^2 - U_{ef}^2}} = 5,76 \Omega$$

Odpor  $R_1$  možno určiť zo vzťahu

$$\frac{I_{1ef}^2}{U_{ef}^2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2 + \frac{1}{X_L^2} \quad \text{teda} \quad R_1 = \frac{U_{ef}}{\sqrt{I_{1ef}^2 - I_{2ef}^2 + I_{3ef}^2 - I_{3ef}^2}} = 8,82 \Omega$$

c) Aktívny výkon v obvode je súčtom výkonov v jednotlivých odporoch, teda

$$P = P_1 + P_2 = \frac{U_{ef}^2}{R_1} + I_{3ef}^2 R_2 = 2592 \text{ W}$$

d) Pre komplexnú impedanciu obvodu platí

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jX_L} = 0,18 - j0,17 \text{ S} \quad \text{alebo} \quad Z = 2,88 + j2,77 \Omega.$$

Absolútna hodnota impedancie  $|Z| = Z = 4 \Omega$ .

**236.** Obvod má impedanciu  $Z$ , ktorej absolútna hodnota spĺňa vzťah

$$\left|\frac{1}{Z}\right| = \left|\frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C\right| \quad \text{z čoho} \quad |Z| = Z = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 C^2 R^2 + (1 - \omega^2 LC)^2}} = 282,8 \Omega$$

Amplitúda prúdu je

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = 0,5 \text{ A}$$

**237.** a) Impedancia obvodu

$$Z = R_1 + jX_L - \frac{R_2 X_C}{R_2 - jX_C} = 70 + j10 \Omega$$

má absolútnu hodnotu  $Z = 70,71 \Omega$ , takže efektívna hodnota prúdu v obvode

$$I_{ef} = \frac{U_{ef}}{Z} = 3,39 \text{ A}$$

b) Absolútna hodnota impedancie paralelnej RC dvojice

$$Z_{RC} = \frac{R_2 X_C}{\sqrt{R_2^2 + X_C^2}} = 70,71 \Omega$$

a amplitúda napätia na kondenzátore  $U_m = \sqrt{2} I_{ef} Z_{RC} = 339,4 \text{ V}$ . Náboj na kondenzátore má amplitúdu

$$Q_m = C U_m = \frac{U_m}{\omega X_C} = 10^{-2} \text{ C}$$

c) Celkový činný výkon v obvode

$$P = I_{ef}^2 R_1 + \frac{U_{ef}^2}{R_2} = 805,8 \text{ W}$$

**238.** Pre sériovú RC dvojicu je:

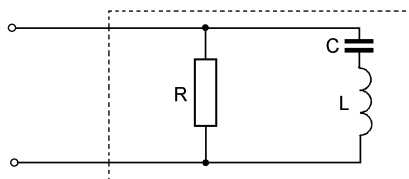
- a)  $Z = 10^4 (1 - j1,59) \Omega$ ,
- b)  $I_{ef} = 11,7 \text{ mA}$ ,
- c)  $P = 1,37 \text{ W}$ ,
- d)  $U_{efR} = 117 \text{ V}$ ,  $U_{efC} = 186 \text{ V}$

Pre paralelnú RC dvojicu je:

- a)  $Z = 10^3 (7,17 - j4,50) \Omega$ ,
- b)  $I_{ef} = 26 \text{ mA}$ ,
- c)  $P = 4,84 \text{ W}$ ,
- d)  $I_{efR} = 22 \text{ mA}$ ,  $I_{efC} = 13,82 \text{ mA}$

**239.** Rezonančné maximum prúdu napovedá, že v skrinke je sériovo spojená indukčnosť  $L$  a kapacita  $C$ . Obvod je vodivý pre jednosmerný prúd, teda k sériovej  $LC$  dvojici je paralelne pripojený odpor  $R$ . Skrinka obsahuje obvod podľa obr. R239. Treba vypočítať hodnoty  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . Označme  $U_0 = 100 \text{ V}$ ,  $I_0 = 0,01 \text{ A}$ ,  $U_{ef} = 220 \text{ V}$ ,  $I_{ef} = 2 \text{ A}$ ,  $f = \omega/2\pi = 50 \text{ Hz}$  a  $f_0 = \omega_0/2\pi = 1 \text{ kHz}$ . Hodnota odporu je

$$R = \frac{U_0}{I_0} = 10\,000 \Omega$$



Obr. R239

Absolútna hodnota impedancie obvodu je daná výrazom

$$Z = \frac{|R(\omega^2 LC - 1)|}{\sqrt{(\omega^2 LC - 1)^2 + (\omega RC)^2}} = \frac{U_{ef}}{I_{ef}} = 110 \Omega$$

Ak uvážime, že  $LC = 1/\omega_0^2$ , potom pre  $C$  z posledného výrazu dostaneme

$$C = \frac{\sqrt{\left(\frac{R^2 I_{ef}^2}{U_{ef}^2} - 1\right) \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2}}{\omega R} = 28,86 \mu\text{F}$$



Hodnota indukčnosti je daná výrazom

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = 0,878 \text{ mH}$$

**240.** Na kružnici s polomerom  $r$  a so stredom na osi kondenzátora podľa zákona celkového prúdu platí

$$2\pi r H = \left( i + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) \pi r^2$$

kde  $i = \sigma E$  je prúdová hustota v dielektriku kondenzátora. Z posledného výrazu dostaneme

$$H = \frac{r}{2} \left( \sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \frac{E_m}{2} r \left( \sigma \cos \omega t - \omega \varepsilon \sin \omega t \right) = \frac{E_m}{2} r \sigma \sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi} \cos(\omega t + \varphi)$$

kde  $\text{tg} \varphi = \omega \varepsilon / \sigma$ .

**241.** Admitancia kondenzátora s daným dielektrikom je

$$Y_C = j\omega \varepsilon_r C_0 = j\omega C_0 + \frac{1}{\frac{\gamma}{\omega_p^2 C_0} + j \frac{\omega}{\omega_p^2 C_0}}$$

Admitancia obvodu podľa obr. 241 v zadaní úlohy je

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}$$

Porovnaním  $Y$  s  $Y_C$  dostaneme

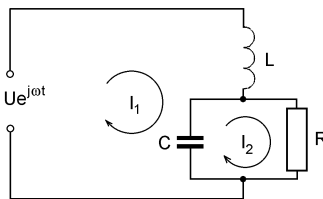
$$C = C_0 \quad L = \frac{1}{\omega_p^2 C_0} \quad R = \frac{\gamma}{\omega_p^2 C_0}$$

**242.** Označme  $X_L = \omega L$  a  $X_C = 1/\omega C$ . Pre komplexné amplitúdy prúdov na obr. R242 platí

$$j(X_L - X_C)I_1 + jX_C I_2 = U \quad (R - jX_C)I_2 + jX_C I_1 = 0$$

Ak  $X_L = X_C = X$ , potom z prvej rovnice plynie pre prúd odporom

$$I_R = I_2 = -j \frac{U}{X_C} = -j \omega C U = -j \frac{U}{\omega L}$$



Obr. R242

Prúd tečúci cez odpor zaostáva vo fáze o  $\pi/2$  za napätím a nezávisí od veľkosti odporu  $R$ . Výsledok je platný iba v prípade ideálnych prvkov  $L$ ,  $C$  a napätového zdroja s nulovou vnútornou impedanciou.

243.  $I_R = j\omega CU = jU/\omega L$ . Prúd predbieha vo fáze napätie zdroja o  $\pi/2$  a nezávisí od veľkosti odporu  $R$ .

244. a) Zapojenie podľa obr. 244 v zadaní úlohy možno znázorniť náhradnou schémou na obr. R244a, kde  $X_L = \omega L$  a  $X_C = 1/\omega C$ . Impedancia zapojenia na vstupných svorkách je

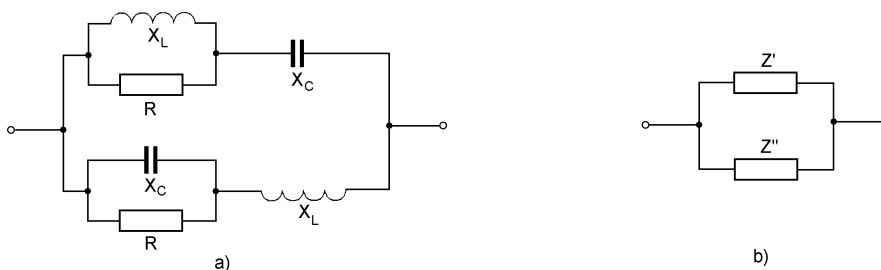
$$Z = \frac{X_L X_C + jR(X_L - X_C)}{2R + j(X_L - X_C)}$$

Táto impedancia bude reálna, ak  $X_L = X_C$ , čo bude splnené pri frekvencii

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

b) Pri frekvencii  $\omega_0$  je

$$Z = \frac{X_L X_C}{2R} = \frac{L}{2RC}$$



Obr. R244

Impedancia  $Z$  sa bude rovnat'  $R$  vtedy, ak

$$\frac{L}{C} = 2R^2$$

c) Ak sú splnené body a) a b), potom pre daný obvod možno nakresliť náhradnú schému obr. R244b, kde

$$Z' = \frac{2R}{3}(1 - j\sqrt{2}) \quad \text{a} \quad Z'' = \frac{2R}{3}(1 + j\sqrt{2})$$

takže

$$|Z'| = |Z''| = \frac{2}{\sqrt{3}} R$$

čo znamená, že výkon vo vetvách sa bude deliť na polovice.

245. Komplexná amplitúda prúdu, ktorý tečie vetvou  $OAO'$  je

$$I_A = \frac{j\omega CU_{vsf}}{1 + j\omega CR'} \quad \text{a prúdu vetvou } OBO' \quad I_B = \frac{U_{vsf}}{2R}$$

Komplexné amplitúdy napätí uzlov  $A$  a  $B$  vzhľadom k uzlu  $O'$  sú

$$U_A = \frac{U_{vsf}}{1 + j\omega CR'} \quad U_B = \frac{U_{vsf}}{2}$$

Napätie na výstupe fázového posúvača je

$$U_{\varphi} = U_A - U_B = \frac{U_{vst}}{2} \frac{1 - j\omega CR'}{1 + j\omega CR'} = \frac{U_{vst}}{2} e^{-j2\varphi}$$

kde  $\varphi = \arctg(\omega CR')$ . Z posledných dvoch výrazov vidno, že amplitúda napätia fázového posúvača je konštantná a rovná  $U_0/2$  a fáza napätia sa pri zmene  $R$  od 0 do nekonečna mení v intervale od 0 po  $-\pi$ .

**246.** Impedancie jednotlivých vetiev Owenovho mostu sú:

$$Z_1 = 1/j\omega C_1 \quad Z_2 = R_2 \quad Z_3 = (1 + j\omega C_3 R_3)/(j\omega C_3) \quad Z_x = R_x + j\omega L_x$$

Podmienka rovnováhy mostu je

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_x}$$

čo je splnené, ak

$$R_x = \frac{C_1 R_2}{C_3} \quad \text{a} \quad L_x = C_1 R_2 R_3$$

**247.** Podmienky rovnováhy Wienovho mostu sú:

$$\omega^2 C_1 C_3 R_1 R_3 = 1 \quad \text{a} \quad \frac{C_1}{C_3} = \frac{R_4}{R_2} - \frac{R_3}{R_1}$$

Ak  $R_1 = R_3 = R$ ,  $C_1 = C_3 = C$  a  $R_2 = R_4/2 = R_0$ , potom druhá podmienka je splnená automaticky a prvá nadobudne tvar

$$\omega RC = 1$$

**248.** Podmienky rovnováhy Scheringovho mostu sú:

$$\frac{R_1}{C_4} = \frac{R_2}{C_3} \quad \text{a} \quad \frac{C_1}{R_4} = \frac{C_3}{R_2}$$

Most je frekvenčne nezávislý.

**249.** Podmienky rovnováhy Maxwellovho mostu:

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad \text{a} \quad L_4 = C_1 R_2 R_3$$

Most je frekvenčne nezávislý.

**250.** Impedancia trojuholníkového zapojenia zo strany 1–2 musí byť rovná impedancii hviezdzy z tej istej strany, teda musí platiť

$$\frac{Z_B(Z_A + Z_C)}{Z} = Z_1 + Z_2 \quad \text{kde} \quad Z = Z_A + Z_B + Z_C$$

Podobne z ostatných strán

$$\frac{Z_C(Z_A + Z_B)}{Z} = Z_2 + Z_3 \quad \frac{Z_A(Z_B + Z_C)}{Z} = Z_1 + Z_3$$

Riešením týchto rovníc pre  $Z_1$ ,  $Z_2$  a  $Z_3$  dostaneme pre ekvivalentné impedancie trojuholníka výrazy

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z} \quad Z_2 = \frac{Z_B Z_C}{Z} \quad Z_3 = \frac{Z_A Z_C}{Z}$$

Pre rovnosť admitancií z každej strany trojuholníka a hviezdy podobne platí

$$Y_B + Y_C = \frac{Y_2(Y_3 + Y_1)}{Y} \quad Y_A + Y_B = \frac{Y_1(Y_2 + Y_3)}{Y} \quad Y_C + Y_A = \frac{Y_3(Y_1 + Y_2)}{Y}$$

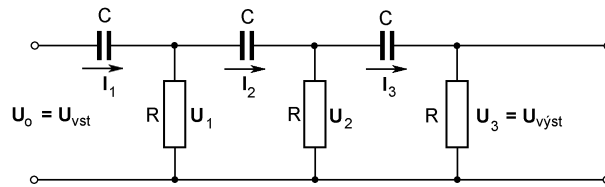
kde  $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ .

Riešením týchto rovníc pre admitancie trojuholníka dostaneme

$$Y_A = \frac{Y_1 Y_3}{Y} \quad Y_B = \frac{Y_1 Y_2}{Y} \quad Y_C = \frac{Y_2 Y_3}{Y}$$

alebo pre impedancie

$$Z_A = Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} \quad Z_B = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} \quad Z_C = Z_2 + Z_3 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_1}$$



Obr. R251

251. Podľa obr. R251 pre komplexnú amplitúdu napätia  $U_3 = U_{\text{výst}}$  platí

$$U_3 = I_3 R \quad \text{a pre amplitúdu } U_2 \quad U_2 = U_3 + \frac{I_3}{j\omega C} = U_3 \left( 1 + \frac{1}{j\omega RC} \right)$$

Ďalej

$$I_2 = \frac{U_2}{R} + I_3 = U_3 \left( \frac{2}{R} + \frac{1}{j\omega R^2 C} \right)$$

a

$$U_1 = U_2 + \frac{I_2}{j\omega C} = U_3 \left( 1 + \frac{1}{j\omega RC} + \frac{2}{j\omega RC} - \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2} \right)$$

Nakoniec

$$I_1 = \frac{U_1}{R} + I_2$$

a

$$U_0 = U_1 + \frac{I_1}{j\omega C} = U_3 \left( 1 + \frac{6}{j\omega RC} - \frac{5}{\omega^2 R^2 C^2} - \frac{1}{j\omega^3 R^3 C^3} \right)$$

Ak v poslednom výraze dosadíme  $\omega = 1/\sqrt{6}RC$ , dostaneme  $U_0 = U_{\text{vst}} = -29U_3 = -29U_{\text{výst}}$ , alebo

$$U_{\text{výst}} = -\frac{1}{29} U_{\text{vst}}$$

**252.** Ak efektívna hodnota prúdu v obvode je rovnaká pri zopnutom aj rozopnutom kľúči, potom absolútna hodnota impedancie obvodu je v oboch prípadoch rovnaká, teda platí

$$\sqrt{r_L^2 + X_L^2} = \sqrt{r_L^2 + (X_L - X_C)^2}$$

z čoho pre hodnotu indukčnej reaktancie plynie

$$X_L = \frac{X_C}{2} = 24 \Omega$$

Z rovnosti

$$U_{ef} = I_{ef} \sqrt{r_L^2 + X_L^2}$$

vyplýva pre odpor indukčnosti hodnota

$$r_L = \sqrt{\left(\frac{U_{ef}}{I_{ef}}\right)^2 - X_L^2} = 31,1 \Omega$$

**253.** Pre dve vhodne zvolené slučky možno napísať rovnice pre komplexné obvodové amplitúdy prúdov v tvare

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_2) &= U_0 \\ R_2 (I_2 - I_1) + (R_3 - j \frac{1}{\omega C}) I_2 &= 0 \end{aligned}$$

Po úprave a dosadením numerických hodnôt dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 2I_1 - I_2 &= 10 \\ -I_1 + (2 - j)I_2 &= 0 \end{aligned}$$

Riešením týchto rovníc dostaneme komplexné amplitúdy obvodových prúdov v tvare

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{10}{3 - j2} = 2,77 e^{j33^\circ 41'} \text{ A} \\ I_1 &= (2 - j)I_2 = 6,20 e^{j7^\circ 7'} \text{ A} \end{aligned}$$

Komplexné amplitúdy prúdov jednotlivými odpormi

$$\begin{aligned} I_{R1} = I_1 &= (2 - j)I_2 = 6,20 e^{j7^\circ 7'} \text{ A} \\ I_{R2} = I_2 - I_1 &= 3,92 e^{-j11^\circ 19'} \text{ A} \\ I_{R3} = I_2 &= \frac{10}{3 - j2} = 2,77 e^{j33^\circ 41'} \text{ A} \end{aligned}$$

Fázové uhly prúdov sa vzťahujú k nulovému fázovému uhlu napätia. Fázový posuv prúdu v odpore  $R_2$  oproti prúdu v odpore  $R_3$  je

$$\Delta\varphi = \varphi_{R3} - \varphi_{R2} = 33^\circ 41' + 11^\circ 19' = 45^\circ$$

Posledný výsledok možno získať aj ako rozdiel fáz impedancií vetvy  $R_2$  ( $\varphi = 0$ ) a vetvy  $R_3 - j/(\omega C) = 1 - j \Omega = \sqrt{2} e^{-j45^\circ} \Omega$ .

254. Podľa II. Kirchhoffovho zákona platí v prípade:

$$a) \quad u_{vst} = \frac{1}{C} \int idt + iR \quad \text{kde} \quad iR = u_{vy\dot{s}t}$$

teda

$$u_{vst} = u_{vy\dot{s}t} + \frac{1}{RC} \int u_{vy\dot{s}t} dt$$

Po derivovaní tejto rovnice podľa času dostaneme rovnicu

$$\frac{d}{dt} u_{vst} = \frac{d}{dt} u_{vy\dot{s}t} + \frac{u_{vy\dot{s}t}}{RC}$$

z ktorej vidieť, že ak

$$\left| \frac{d}{dt} u_{vy\dot{s}t} \right| \ll \left| \frac{u_{vy\dot{s}t}}{RC} \right| \quad \text{potom} \quad u_{vy\dot{s}t} \approx RC \frac{d}{dt} u_{vst}$$

$$b) \quad u_{vst} = \frac{1}{C} \int idt + iR \quad \text{kde} \quad \frac{1}{C} \int idt = u_{vy\dot{s}t}$$

takže

$$u_{vst} = RC \frac{d}{dt} u_{vy\dot{s}t} + u_{vy\dot{s}t}$$

Ak

$$RC \left| \frac{d}{dt} u_{vy\dot{s}t} \right| \ll \left| \int u_{vy\dot{s}t} dt \right| \quad \text{potom} \quad u_{vy\dot{s}t} \approx \frac{1}{RC} \int u_{vst} dt$$

Nech  $u_{vst} = U_0 \cos \omega t$  alebo v komplexnej forme  $u_0 = U_0 e^{i\omega t}$ . Výstupné napätie bude

$$u_{vy\dot{s}t} = U e^{i(\omega t + \varphi)} \quad \text{pričom} \quad \left| \frac{d}{dt} u_{vy\dot{s}t} \right| = \omega |u_{vy\dot{s}t}|$$

takže z podmienky a) pre derivačný obvod plynie

$$\omega \ll \frac{1}{RC}$$

Obvod na obr. 254a v zadaní úlohy bude teda derivačným pre signály, ktorých frekvencie sú oveľa menšie ako  $1/(RC)$ .

V prípade b)

$$\frac{1}{\omega} |u_{vy\dot{s}t}| = \left| \int u_{vy\dot{s}t} dt \right|$$

a z podmienky pre integračný obvod plynie, že

$$\omega \gg \frac{1}{RC}$$

Obvod na obr. 254b bude integračným pre signály, ktorých frekvencie sú oveľa väčšie ako  $1/(RC)$ .

255. Rezonančná frekvencia obvodu tlmeného sériovým odporom  $R_L$  je

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_L^2}{4L^2}}$$

a kvalita obvodu

$$Q_0 = \frac{\omega L}{R} \quad \text{takže} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{4Q_0^2}}$$

z čoho

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}} \approx \left(1 - \frac{1}{8Q_0^2}\right) \omega_0 = (1 - 3,125 \cdot 10^{-6}) \omega_0$$

Zmena rezonančnej frekvencie (pokles)

$$|\delta\omega| = |\omega - \omega_0| = \frac{1}{8Q_0^2} \omega_0 = 3,125 \cdot 10^{-6} \omega_0$$

čo predstavuje  $3,125 \cdot 10^{-4} \%$  rezonančnej frekvencie  $\omega_0$  obvodu bez tlmenia.

**256.** V obvode na obr. 256b môžu vzniknúť tlmené kmity s frekvenciou  $f = 3\,082$  Hz.

**257.** Vstupná impedancia obvodu na obr. 257a je

$$Z_a \approx \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

a impedancia obvodu na obr. 257b

$$Z_b = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\frac{\omega L}{R'}}$$

Impedancie  $Z_a$  a  $Z_b$  budú rovnaké, ak imaginárne časti menovateľov budú rovnaké, t. j. ak

$$\omega RC = \frac{\omega L}{R'} \quad \text{alebo} \quad R' = \frac{L}{RC}$$

**258.** Kapacita  $m$  sériovo zapojených kondenzátorov je  $C_m = C/m$

a) Impedancia sériovo zapojeného odporu, indukčnosti a  $m$  kondenzátorov je

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{m}{\omega C}\right)$$

a činný výkon na odpore  $R$

$$P = \frac{RU_0^2}{2Z^2} = \frac{RU_0^2}{2\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{m}{\omega C}\right)^2\right]}$$

b) Výkon v odpore bude maximálny, keď je obvod v rezonancii, t. j. ak

$$\omega L - \frac{m}{\omega C} = 0$$

Pre dané číselné hodnoty je obvod v rezonancii pri  $m = 2$ . Vtedy

$$P = P_{max} = \frac{U_0^2}{2R}$$

c) Amplitúda prúdu v obvode, keď je obvod v rezonancii, je  $I = U_0/R$ . Amplitúda napätia na sériovej  $RL$ -dvojici  $U_{RL} = I_0\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = 141,4 \text{ V}$  a amplitúda napätia na odpore  $U_R = I_0 R = U_0 = 100 \text{ V}$ .

**259.** Magnetická indukcia  $B$  v toroidálnej dutine rezonátora je daná výrazom

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

a indukčný tok pričným rezom  $S$  dutiny

$$\Phi = \int_S B dS = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = I \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = LI$$

z čoho indukčnosť toroidu

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Kapacita vyšrafovannej časti rezonančnej dutiny na obr. 259 v zadaní úlohy je

$$C = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d} \quad \text{a rezonančná frekvencia dutiny} \quad f_{rez} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{c}{2\pi a} \sqrt{\frac{2d}{h \ln \frac{b}{a}}}$$

kde  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  je rýchlosť svetla vo vákuu. Dosadením číselných hodnôt dostaneme pre rezonančnú frekvenciu dutiny hodnotu  $f_{rez} = 2\,565 \text{ MHz} = 2,565 \text{ GHz}$ . Je to oblasť decimetrových elektromagnetických vln.

**260.** a) Ak po povrchu veľmi dlhého valca tečie, vzhľadom k jeho osi priečne, prúd s plošnou prúdovou hustotou  $J_s$ , potom vo vnútri valca je osové magnetické pole s indukciou  $B = \mu_0 J_s$  a indukčný tok prierezom valca

$$\Phi = \mu_0 J_s \pi a^2 = \frac{\mu_0 \pi I a^2}{b}$$

kde  $I = b J_s$  je celkový prúd tečúci po povrchu valca. Indukčnosť valca

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \pi a^2}{b} \quad \text{a kapacita rovinných plôch} \quad C = \frac{\epsilon_0 w b}{s}$$

takže rezonančná frekvencia

$$f_{rez} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{c}{2\pi a} \sqrt{\frac{s}{w}}$$

kde  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ .

b)  $f_{rez} = 8\,979 \text{ MHz} = 8,979 \text{ GHz}$ . Je to mikrovlnová oblasť elektromagnetického spektra

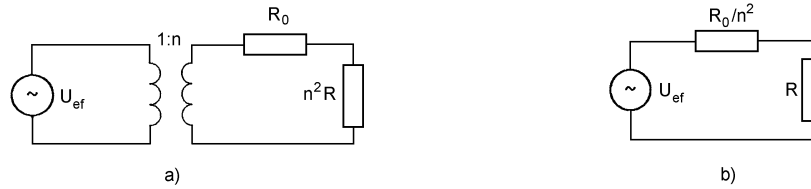
**261.** Výkon v spotrebiči v prvom obvode

$$P_s = \frac{U_{ef}^2 R}{(R_0 + R)^2} \quad \text{a vo vedení} \quad P_v = \frac{U_{ef}^2 R_0}{(R_0 + R)^2}$$

takže

$$\frac{P_s}{P_v} = \frac{R}{R_0}$$





Obr. R261

V druhom prípade možno pretransformovať záťažový odpor na vstup druhého transformátora, čím vznikne náhradný obvod podľa obr. R261a. Ďalšou transformáciou odporov  $R_0$  a  $n^2 R$  na vstup prvého transformátora dostaneme náhradný obvod podľa obr. R261b. Výkon v záťažovom odpore tohoto obvodu je

$$P'_s = \frac{U_{ef}^2 R}{\left(\frac{R_0}{n^2} + R\right)^2} \quad \text{a stratový výkon vo vedení} \quad P'_v = \frac{U_{ef}^2 R_0}{n^2 \left(\frac{R_0}{n^2} + R\right)^2}$$

Pomer výkonov v spotrebiči a vo vedení

$$\frac{P'_s}{P'_v} = n^2 \frac{R}{R_0}$$

Vidíme, že v druhom prípade je účinnosť prenosu energie do spotrebiča  $n^2$ -krát väčšia.

**262.** Absolútna hodnota impedancie medzi bodmi A a B je

$$Z_{AB} = \sqrt{R_1^2 + \frac{1}{\omega^2 C_1^2}} = 50 \Omega$$

a efektívna hodnota prúdu v obvode

$$I_{ef} = \frac{U_{AB}}{Z_{AB}} = 0,48 \text{ A}$$

Absolútna hodnota celkovej impedancie obvodu je

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^2} = 250 \Omega$$

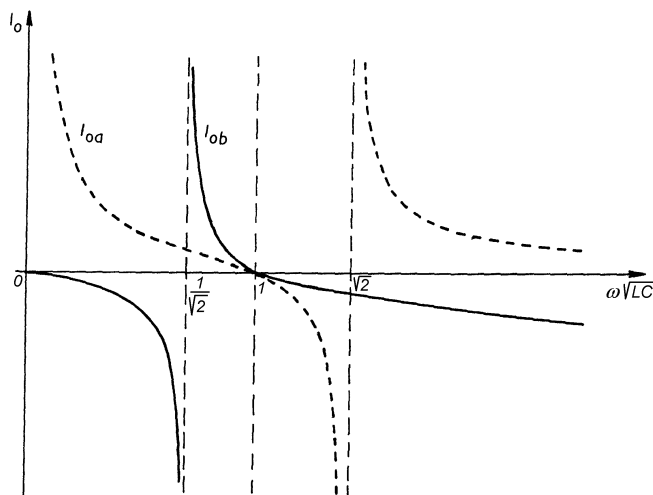
a efektívna hodnota napätie zdroja  $U_{ef} = I_{ef} Z = 120 \text{ V}$ .

**263.** Vstupné impedancie obvodov na obr. 263a,b v zadaní úlohy sú

$$Z_a = j\omega L \frac{2 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC} \quad Z_b = -j \frac{1}{\omega C} \frac{1 - 2\omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC}$$

a komplexné amplitúdy prúdov v obvodoch

$$I_a = \frac{U_0}{Z_a} = -j \frac{U_0}{\omega L} \frac{1 - \omega^2 LC}{2 - \omega^2 LC} \quad I_b = -j \omega C U_0 \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - 2\omega^2 LC}$$



Obr. R263

Zodpovedajúce časové závislosti prúdov v obvodoch sú

$$i_a(t) = \frac{U_0}{\omega L} \frac{1 - \omega^2 LC}{2 - \omega^2 LC} \sin \omega t = I_{0a}(\omega) \sin \omega t$$

$$i_b(t) = \omega C U_0 \frac{\omega^2 LC - 1}{1 - 2\omega^2 LC} \sin \omega t = I_{0b}(\omega) \sin \omega t$$

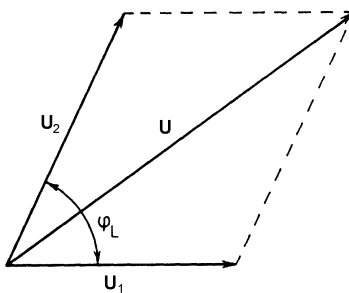
Amplitúdy  $I_{0a}(\omega)$  a  $I_{0b}(\omega)$  v závislosti od  $\omega\sqrt{LC}$  sú grafmi znázornené na obr. R263.

264. Pre efektívne hodnoty napätí v obvode možno nakresliť vektorový diagram podľa obr. R264, z ktorého plynie

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2 \cos(\pi - \varphi_L) = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos \varphi_L$$

Výkon v indukčnosti je daný výrazom

$$P = IU_2 \cos \varphi_L = \frac{U_1 U_2}{R} \cos \varphi_L$$



Obr. R264

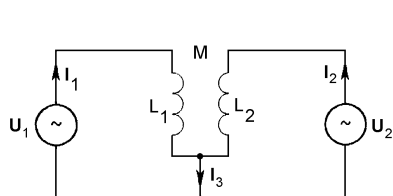
Dosadením za  $U_1 U_2 \cos \varphi$  z prvého výrazu dostaneme

$$P = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2R}$$

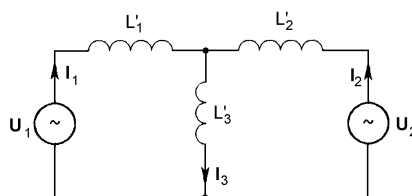
**265.** Pripojme k obidvom obvodom dva zdroje s komplexnými amplitúdami  $U_1$  a  $U_2$  a spodné konce indukčností  $L_1$  a  $L_2$  spojme. Vzniknú obvody podľa obr. R265a,b. Pre prúdy v obvode na obr. R265a platia Kirchhoffove rovnice

$$U_1 = j\omega L_1 I_1 \pm j\omega M I_2$$

$$U_2 = j\omega L_2 I_2 \pm j\omega M I_1$$



a)



b)

Obr. R265

Ak uvážime, že  $I_1 + I_2 = I_3$ , možno rovnice prepísať do tvaru

$$U_1 = j\omega(L_1 \mp M)I_1 \pm j\omega M I_3 \quad U_2 = j\omega(L_2 \mp M)I_2 \pm j\omega M I_3$$

Pre obvod na obr. R265b platia rovnice

$$U_1 = j\omega L'_1 I_1 + j\omega L'_3 I_3 \quad U_2 = j\omega L_2 I_2 + j\omega L'_3 I_3$$

Ak majú byť obvody elektricky ekvivalentné, potom aj sústavy rovníc musia byť ekvivalentné, teda musí platiť

$$L'_1 = L_1 \mp M \quad L'_2 = L_2 \mp M \quad L'_3 = \pm M$$

Znamienka závisia od magnetickej väzby medzi indukčnosťami.

**266. a)** Sériové spojenie indukčností dáva výslednú indukčnosť

$$L_s = L_1 + L_2 \pm 2M$$

Číselne: 16 H a 4 H.

b) Paralelné spojenie indukčností dáva výslednú indukčnosť

$$L_p = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \pm 2M}$$

Číselne: 0,9375 H a 3,75 H.

c) Ak sa jedna cievka skratuje, potom indukčnosť na svorkách druhej cievky je daná výrazom [pozri odsek 7.6, výraz (7.51)]

$$L_c = L_{1,2} - \frac{M^2}{L_{2,1}}$$

Číselne: 3,75 H a 2,5 H.

267. Pre zapojenie na obr. 267 možno písať rovnice

$$(R_1 + jX_{L1})I_1 - jX_M I_2 = U_1 \quad (R_2 + jX_{L2})I_2 - jX_M I_1 = 0$$

kde  $I_1$  a  $I_2$  sú komplexné amplitúdy prúdy v primárnom a sekundárnom obvode. Riešením tejto sústavy pre prúd  $I_2$  dostaneme

$$I_2 = \frac{jX_M}{(R_1 + jX_{L1})(R_2 + jX_{L2}) + X_M^2} U_1$$

Komplexná amplitúda výstupného napätia je

$$U_2 = R_2 I_2 = R_2 \frac{jX_M}{(R_1 + jX_{L1})(R_2 + jX_{L2}) + X_M^2} U_1$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$U_2 = 3,922 e^{-j11,3^\circ} \text{ V}$$

Výstupné napätie má teda amplitúdu 3,922 V a zaostáva za vstupným napätím vo fáze o  $11,3^\circ$ .

268.  $U_{\text{vst}} = 8,22 e^{-j99,5^\circ} \text{ V}$

269. Vstupná impedancia obvodu na obr. 269a v zadaní úlohy je

$$Z_{\text{vst}} = j\omega L_1 + Z - \frac{(Z + j\omega M)^2}{Z + j\omega L_2} \quad \text{a na obr. 269b} \quad Z_{\text{vst}} = \frac{j\omega L_1 Z + \omega^2(M^2 - L_1 L_2)}{j\omega(L_1 + L_2 - 2M) + Z}$$

270. a)  $U_{ab} = 14,14 e^{+j45^\circ} \text{ V}$ , b)  $I_{ab} = 1,67 e^{j0^\circ} \text{ A}$ .

271. Podľa obr. 271 v zadaní úlohy možno pre zapojenie napísať rovnice podľa II. Kirchhoffovho zákona

$$[R + j(X_L - X_C)]I_1 - jX_M I_2 = U_1 \quad [R + j(X_L - X_C)]I_2 - jX_M I_1 = 0$$

kde  $I_1$  a  $I_2$  sú komplexné amplitúdy prúdov v obvode a  $U_1$  je komplexná amplitúda vstupného napätia. Riešením tejto sústavy pre prúd  $I_2$  dostaneme

$$I_2 = \frac{-jX_M U_1}{(X_L - X_C)^2 - X_M^2 - R^2 - j2R(X_L - X_C)}$$

Komplexná amplitúda výstupného napätia je

$$U_2 = -jX_C I_2 = \frac{-X_C X_M U_1}{(X_L - X_C)^2 - X_M^2 - R^2 - j2R(X_L - X_C)} = 19,23 e^{j0^\circ} \text{ V}$$

Výstupné napätie je vo fáze so vstupným napätím.

272. a)  $C = \frac{1}{\omega X_{L1}} = 50 \mu\text{F}$

b) Pri sériovej rezonancii tečie v primárnom obvode prúd s amplitúdou

$$I_1 = \frac{U_1}{R} = 10 \text{ A}$$

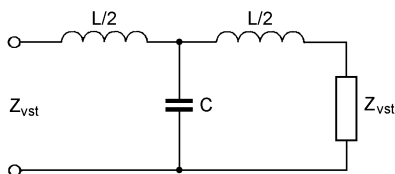
a v sekundárnom obvode sa indukuje napätie s komplexnou amplitúdou

$$U_2 = jX_M I_1 = 100e^{j90^\circ} \text{ V}$$

Výstupné napätie má amplitúdu 100 V a predbieha vstupné napätie vo fáze o  $90^\circ$ .

**273.** Impedancia nekonečného reťazca podľa obr. 273 v zadaní úlohy sa nezmení, ak ku vstupu reťazca reprezentovaného vstupnou impedanciou  $Z_{vst}$  sa pripojí jeden článok  $L/2-C$  podľa obr. R273. Pre zapojenie na obr. R273 platí

$$Z_{vst} = \frac{j\omega L}{2} + Z'$$



Obr. R273

kde  $Z'$  je impedancia paralelnej dvojice  $1/j\omega C$  a  $Z_{vst} + j\omega L/2$ , teda

$$Z' = \frac{2Z_{vst} + j\omega L}{2 - \omega^2 LC + j2\omega CZ_{vst}}$$

takže

$$Z_{vst} = \frac{j\omega L}{2} + \frac{2Z_{vst} + j\omega L}{2 - \omega^2 LC + j2\omega CZ_{vst}}$$

z čoho vstupná impedancia reťazca

$$Z_{vst} = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}$$

Táto impedancia je reálna pre všetky frekvencie, ktoré spĺňajú podmienku

$$\omega < \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

Reťazec je dolnofrekvenčný priepust.

**274.** Vstupná impedancia reťazca na obr. 274 v zadaní úlohy je

$$Z_{vst} = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{1}{4\omega^2 C^2}}$$

ktorá je reálna pre všetky frekvencie, ktoré spĺňajú podmienku

$$\omega > \frac{1}{2\sqrt{LC}}$$

Reťazec je hornofrekvenčný priepust.

**275.** Výkon v odpore po zopnutí spínača stúpne štyrikrát. Aby sa kondenzátor počas jednej periódy nestačil znateľne vybiť, treba jeho hodnotu voliť tak, že časová konštanta  $RC \gg 1/f$ .

276. Výkon v obvode na obr. 276a v zadaní úlohy je

$$P = \frac{7}{4} \frac{U_{ef}^2}{R} \quad \text{a v obvode na obr. 276b} \quad P = \frac{5}{3} \frac{U_{ef}^2}{R}$$

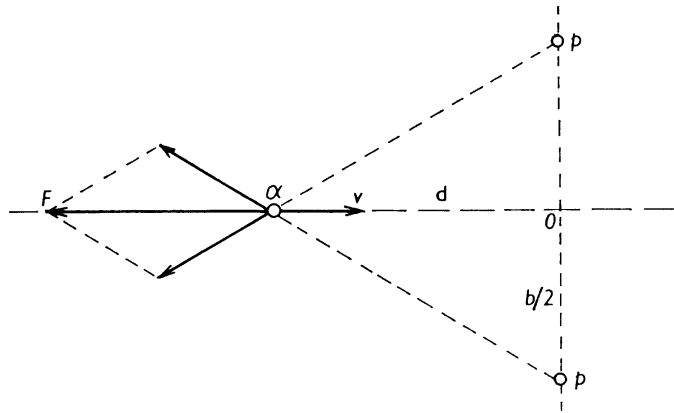
## 10 Pohyb nabitých častíc v elektrických a magnetických poliach

277. Podľa obr. R277 na  $\alpha$ -časticu pôsobí odpudivá sila

$$F = \frac{e^2 d}{\pi \epsilon_0 \left( d^2 + \frac{b^2}{4} \right)^{3/2}}$$

ktorá je maximálna vo vzdialenosti

$$d_0 = \pm \frac{b}{\sqrt{8}}$$



Obr. R277

278.  $m = 2,39 \cdot 10^{-25}$  kg.

279. Elektróny urýchlené napätím  $U$  na rýchlosť (obr. R279)

$$v_x = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$

sa budú medzi doskami pohybovať pod vplyvom sily kolmej na  $v_x$

$$F = eE = e \frac{U'}{D}$$

Pohybová rovnica pre elektrón medzi doskami je

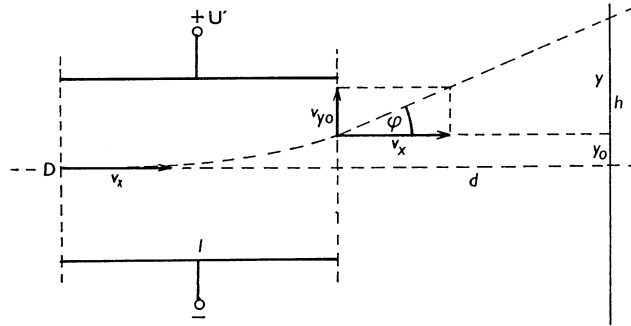
$$m_e \frac{dv_y}{dt} = e \frac{U'}{D} \quad \text{a jej riešenie je} \quad v_y = \frac{eU'}{m_e D} t$$

pretože v čase vstupu elektrónov medzi dosky je ich priečna rýchlosť nulová. Medzi doskami sa budú elektróny pohybovať po dobu  $t_0 = l/v_x$ , takže pri výstupe z priestoru dosiek ich priečna rýchlosť bude

$$v_{y0} = \frac{eU'}{m_e D} t_0 = \frac{eU'l}{m_e D v_x}$$

V smere  $y$  prejdú elektróny dráhu

$$y_0 = \frac{eU'l^2}{2m_e D v_x^2} = \frac{l^2 U'}{4DU}$$



Obr. R279

Po výstupe z priestoru medzi doskami sa budú elektróny pohybovať pod uhlom  $\varphi$ , pre ktorý platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_{y0}}{v_x} = \frac{y}{d} \quad \text{z čoho} \quad y = \frac{v_{y0}}{v_x} = \frac{lU'd}{2DU}$$

Odchýlka elektrónového lúča na tienidle

$$h = y_0 + y = \frac{lU'}{2DU} \left( \frac{l}{2} + d \right)$$

Číselne:  $h = 3,6$  cm.

280. a) Elektrón opustí kondenzátor 2 rýchlosťou

$$v = \sqrt{v_0^2 + \left( \frac{e l \mathcal{E}}{v_0 m_e d} \right)^2 \left( \frac{R}{R_0 + R} \right)^2} \quad \text{pod uhlom} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{e l \mathcal{E}}{v_0^2 m_e d} \frac{R}{R_0 + R} \right)$$

b) Elektrón opustí kondenzátor 2 vo vzdialenosti

$$y_0 = \frac{e l^2 \mathcal{E}}{2 v_0^2 m_e d} \frac{R - 2R_0}{R_0 + R}$$

od osi  $Ox$  v rovine  $AA'$ .

c) Elektrón opustí kondenzátor 2 rýchlosťou rovnobežnou s osou  $Ox$ , ak  $R = 0$ . Rýchlosť elektrónu je  $v_x = v_0$ , a vystúpi z kondenzátora 2 vo vzdialenosti

$$y_0 = - \frac{e l^2 \mathcal{E}}{v_0^2 m_e d}$$

od osi  $Ox$  v rovine  $AA'$ .

$$d) \mathcal{E} = \frac{W_k d^2}{e l^2} = 400 \text{ V}$$

e) Energia elektrónu je najväčšia pri jeho prechode z kondenzátora 1 do kondenzátora 2. Jej hodnota

$$W = W_k + \frac{1}{W_k} \left( \frac{e l \mathcal{E}}{2d} \right)^2 = 10,1 \text{ keV}$$

**281.** Ak sa elektrón s nábojom  $-e$  nachádza vo vzdialenosti  $x$  od jednej z rovin, potom na druhej rovine podľa úlohy 43 je indukovaný náboj  $q = ex/d$ . Ak sa v čase  $dt$  elektrón premiestni o  $dx$ , potom sa na druhej rovine zvýši náboj o

$$dq = e \frac{dx}{d}$$

Vytvorením časových zmien a s uvážením, že  $dq/dt = I$  je prúd v skrate a  $dx/dt = v$  je rýchlosť elektrónu, dostaneme jednoduchý výraz

$$I = e \frac{v}{d}$$

čo je špeciálny tvar vety o indukovaných prúdoch (Shockleyho – Ramova veta z oblasti fyzikálnej a katódovej elektroniky). Indukovaný prúd v skrate tečie iba v čase pohybu elektrónu medzi rovinami. Smer prúdu v skrate je totožný so smerom pohybu elektrónu. Dosadením číselných hodnôt dostaneme:  $I = 8 \cdot 10^{-11} \text{ A}$ , dĺžka prúdového impulzu  $t = d/v = 2 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ .

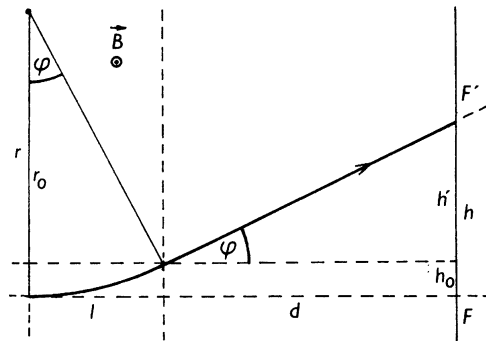
**282.** Ak je horná doska kondenzátora záporná, elektrón vnikne do kondenzátora do hĺbky  $h = 5 \text{ mm}$ . Ak je polarita opačná, elektrón dopadne na hornú dosku vo vzdialenosti  $l = 4,23 \text{ mm}$  od kolmice.

**283.** Pod účinkom napätia  $U$  nadobudnú elektróny rýchlosť

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$

a v priestore magnetického poľa sa budú pohybovať po kružnici s polomerom  $r$  (obr. R283), pre ktorý platí

$$r = \frac{m_e v}{eB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$



Obr. R283



Vo vertikálnom smere prejdú elektróny v magnetickom poli dráhu

$$h_0 = r - r_0 = r - \sqrt{r^2 - l^2}$$

Po výstupe z priestoru magnetického poľa sa elektróny pohybujú pod uhlom  $\varphi$ , pre ktorý platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h'}{d} = \frac{l}{\sqrt{r^2 - l^2}} \quad \text{z čoho} \quad h' = \frac{l}{\sqrt{r^2 - l^2}} d$$

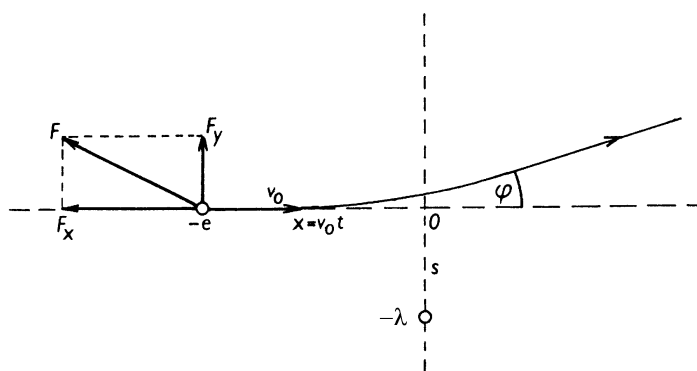
Odchýlka lúča na tienidle

$$h = FF' = h_0 + h' = r - \sqrt{r^2 - l^2} + \frac{l}{\sqrt{r^2 - l^2}} d$$

Číselne:  $h = 9,2 \text{ mm}$ .

284.  $W_k = 8 \cdot 10^{-17} \text{ J} = 500 \text{ eV}$ ,  $\omega_c = 1,2 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$ .

285.  $E_y = v_x B_z$ .



Obr. R286

286. Na pohybujúci sa elektrón pôsobí sila (obr. R286)

$$F = \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0\sqrt{s^2 + x^2}}$$

ktorej zložka kolmá na smer pohybu je

$$F_y = \frac{e\lambda s}{2\pi\epsilon_0(s^2 + x^2)}$$

Zložka hybnosti v pozdĺžnom smere  $p_x = mv_0$  sa nemení a zložku hybnosti v priečnom smere možno vypočítať z rovnice

$$\frac{dp_y}{dt} = F_y \quad \text{teda} \quad p_y = \int_{-\infty}^0 F_y dt = \frac{e\lambda s}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{s^2 + v_0^2 t^2} = \frac{e\lambda}{4\epsilon_0 v_0}$$

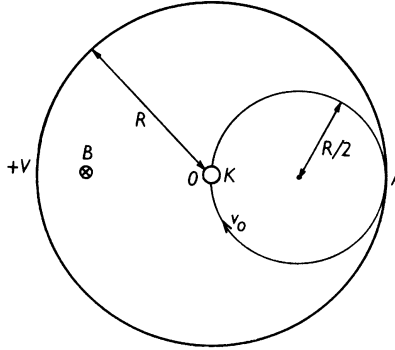
Pre uhol odchýlky lúča platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p_y}{p_x} = \frac{e\lambda}{4\varepsilon_0 m v_0} \approx \varphi = \text{konšt.}$$

Uhol odchýlky teda nezávisí od  $s$ .

**287.** Ak je polomer katódy zanedbateľne malý oproti polomeru anódy (*obr. R287*), potom intenzita elektrického poľa v blízkosti katódy je veľmi veľká a potenciál narastá so vzdialenosťou od katódy veľmi rýchlo, takže nadobúda už v malých vzdialenostiach od katódy hodnotu prakticky rovnú potenciálu anódy. Elektróny nadobúdajú rýchlosť

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}}$$



Obr. R287

už vo veľmi malej vzdialenosti od katódy a vo zvyšnom priestore medzi anódou a katódou sa pohybujú prakticky konštantnou rýchlosťou. Pod účinkom magnetického poľa indukcie  $B$  sa pohybujú po kružniciach s polomerom

$$r = \frac{m_e v_0}{eB}$$

Prúd diódou prestane tečť vtedy, keď elektróny pri svojom kruhovom pohybe už nedosiahnu anódu (*obr. R287*), t. j. vtedy, keď polomer dráhy elektrónu bude  $r = R/2$ . Tomuto polomeru zodpovedá hodnota kritickej magnetickej indukcie

$$B_{krit} = \frac{m_e v_0}{eR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{8m_e V}{e}}$$

**288.** a) Pohybová rovnica elektrónu v danom elektrickom a magnetickom poli je

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

alebo v zložkách pravouhlého súradnicového systému (bodkami sú vyznačené časové derivácie)

$$m_e \ddot{x} = eB\dot{y} \quad m_e \ddot{y} = eE - eB\dot{x} \quad m_e \ddot{z} = 0$$

V čase  $t = 0$  je  $x = y = z = \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ . Z rovnice  $m_e \ddot{z} = 0$  plynie, že  $z = \text{konšt.} = 0$ , takže elektrón sa pohybuje v rovine  $xy$ . Deriváciou druhej rovnice podľa času dostaneme

$$m_e \ddot{y} = -eB\dot{x}$$

a dosadením za  $\ddot{x}$  z prvej rovnice prejde posledná rovnica na tvar

$$\ddot{y} = -\omega_c^2 \dot{y}$$

kde  $\omega_c = eB/m_e$  je cyklotrónová frekvencia. Všeobecné riešenie tejto rovnice má tvar

$$y = -\frac{A}{\omega_c} \cos \omega_c t + C$$

kde  $A$  a  $C$  sú konštanty, ktoré sa určia zo začiatočných podmienok. V čase  $t = 0$  je  $y = 0$ ,  $\dot{y} = eE/m_e$ . Uvážení týchto podmienok dostaneme pre integračné konštanty hodnoty

$$A = C = \frac{eE}{m_e \omega_c^2} \quad \text{takže} \quad y = \frac{eE}{m_e \omega_c^2} (1 - \cos \omega_c t)$$

Derivovaním riešenia pre  $y$  a dosadením do prvej zložkovej rovnice dostaneme rovnicu

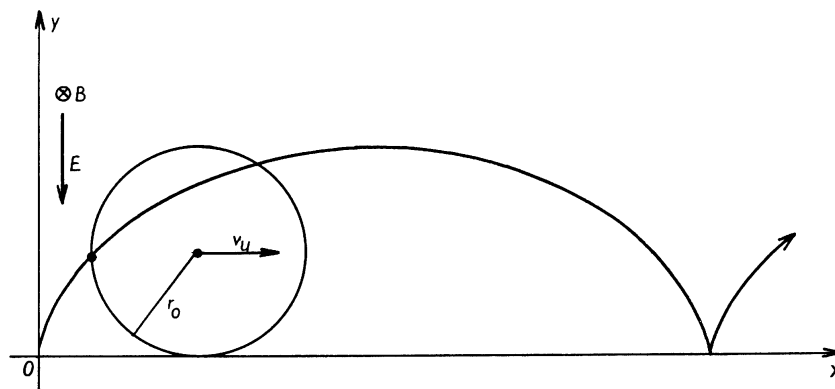
$$\ddot{x} = \frac{eE}{m_e} \sin \omega_c t$$

ktorej dvojnásobnou integráciou dostaneme všeobecné riešenie v tvare

$$x = -\frac{eE}{m_e \omega_c^2} \sin \omega_c t + Dt + F$$

$D$  a  $F$  sú integračné konštanty. V čase  $t = 0$  je  $x = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ , z čoho plynú pre integračné konštanty hodnoty

$$D = \frac{eE}{m_e \omega_c} \quad F = 0$$



Obr. R288

Riešenie pre  $x$  je teda

$$x = \frac{eE}{m_e \omega_c^2} (\omega_c t - \sin \omega_c t)$$

Elektrón sa bude pohybovať po dráhe danej výrazmi

$$x = \frac{eE}{m_e \omega_c^2} (\omega_c t - \sin \omega_c t) \quad y = \frac{eE}{m_e \omega_c^2} (1 - \cos \omega_c t)$$

Z týchto výrazov vidno, že dráha je cykloida (obr. R288) s vytvárajúcou kružnicou s polomerom

$$r_0 = \frac{eE}{m_e \omega_c^2}$$

b) Zložky rýchlosti elektrónu sú

$$\dot{x} = \frac{E}{B} (1 - \cos \omega_c t) \quad \dot{y} = \frac{E}{B} \sin \omega_c t$$

c) Elektrón sa pohybuje unášavou (driftovou) rýchlosťou

$$v_u = \frac{E}{B}$$

pozdĺž osi  $x$ .

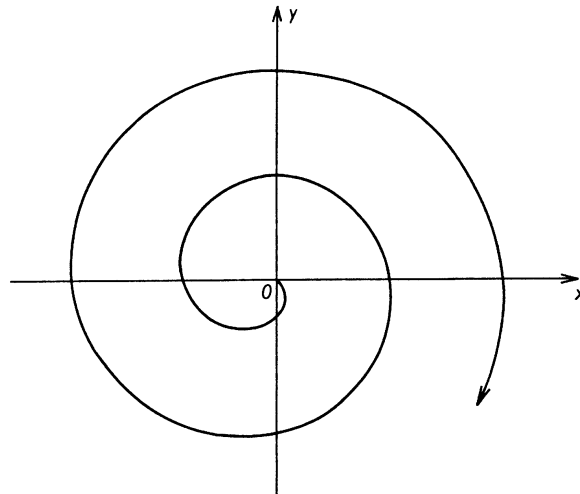
**289.** a)  $0,5 \cdot 10^7$  rad/s, b)  $0,25 \cdot 10^7$  rad/s, c)  $0,5 \cdot 10^7$  rad/s.

**290.** a) 0,9 T, b)  $7,6 \cdot 10^{-13}$  J = 4,7 MeV.

**291.**  $\omega_{ce} = 1,76 \cdot 10^{11}$  rad/s,  $\omega_{cp} = 9,59 \cdot 10^7$  rad/s,  $R_e = 0,184$  mm,  $R_p = 7,91$  mm.

**292.** Pohybová rovnica častice v cyklotróne je tvaru

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$



Obr. R292

alebo v zložkovom tvare

$$m\ddot{x} = qE \cos \omega_c t + q\dot{y}B \quad m\ddot{y} = -qE \sin \omega_c t - q\dot{x}B \quad m\ddot{z} = 0$$

V čase  $t = 0$  je  $x = y = z = \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ . Z rovnice  $m\ddot{z} = 0$  plynie, že  $z = \dot{z} = 0$  takže častica sa pohybuje v rovine  $xy$ . Deriváciou prvej zložkovej rovnice a dosadením za  $\ddot{y}$  z druhej rovnice dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$\ddot{x} + \omega_c^2 \dot{x} = -\frac{2qE\omega_c}{m} \sin \omega_c t$$

a podobne deriváciou druhej zložkovej rovnice s dosadením za  $\ddot{x}$  z prvej rovnice dostaneme

$$\ddot{y} + \omega_c^2 \dot{y} = -\frac{2qE\omega_c}{m} \cos \omega_c t$$

Riešenia týchto diferenciálnych rovníc pri zadaných začiatočných podmienkach sú

$$x = \frac{qE}{m\omega_c^2} (\omega_c t \sin \omega_c t + \cos \omega_c t - 1) \quad y = \frac{qE}{m\omega_c^2} (\omega_c t \cos \omega_c t - \sin \omega_c t)$$

Pohyb častice opísaný týmito výrazmi je pohybom po špirále podľa obr. R292.

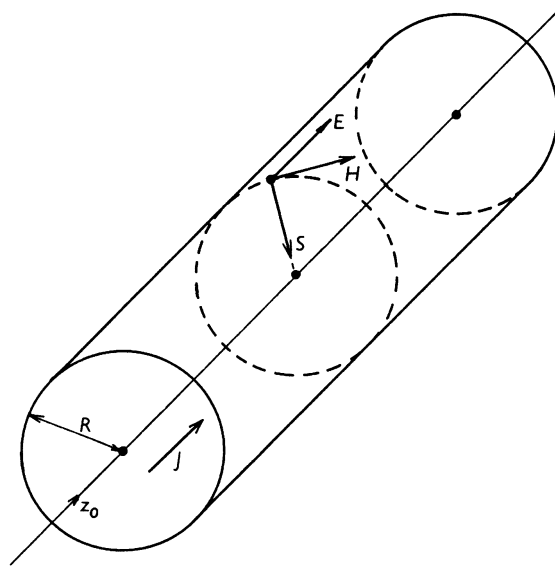
## 11 Elektromagnetické vlny

297. Vo vodiči tečie prúd s hustotou (obr. R297)

$$\mathbf{J} = \frac{I}{\pi R^2} \mathbf{e}_z$$

kde  $\mathbf{e}_z$  je jednotkový vektor v smere osi vodiča. Elektrické pole vo vodiči a na jeho povrchu je

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{I}{\pi \sigma R^2} \mathbf{e}_z$$



Obr. R297

Intenzita magnetického poľa na povrchu vodiča je

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi R} \mathbf{e}_\varphi$$

kde  $\mathbf{e}_\varphi$  je jednotkový vektor na valci kolmý na os  $z$ . Pretože elektrické a magnetické polia sú navzájom kolmé, Poyntingov vektor  $\mathbf{S}$  smeruje od povrchu vodiča k jeho osi a jeho veľkosť je

$$S = EH = \frac{I^2}{2\pi^2 \sigma R^3}$$

Výkon vstupujúci do valca na jednotku jeho dĺžky je

$$P' = 2\pi RS = \frac{I^2}{\pi \sigma R^2} = R_0 I^2$$

kde  $R_0 = 1/(\pi \sigma R^2)$  je odpor jednotkovej dĺžky valca.

**298.** Elektrické a magnetické polia v dutine koaxiálneho kábla sú dané výrazmi

$$E = \frac{\mathcal{E}}{r \ln \frac{b}{a}} \qquad H = \frac{I}{2\pi r} = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r R}$$

pričom vektory polí sú na seba kolmé, a to tak, že vektorový súčin  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  smeruje pozdĺž osi kábla od zdroja k záťaži. Poyntingov vektor má veľkosť

$$S = EH = \frac{\mathcal{E}^2}{2\pi r^2 R \ln \frac{b}{a}}$$

a výkon postupujúci pozdĺž osi kábla

$$P = \int_a^b 2\pi r S dr = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$$

**299.** Podľa výsledkov predchádzajúcej úlohy je veľkosť Poyntingovho vektora v koaxiálnom kábli

$$S = EH = \frac{\mathcal{E}^2}{2\pi r^2 R \ln \frac{b}{a}}$$

a hustota energie elektromagnetického poľa

$$w = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = \frac{\mathcal{E}^2}{2r^2} \frac{4\pi^2 \epsilon_0 R^2 + \mu_0 \ln^2 \frac{b}{a}}{4\pi^2 R^2 \ln^2 \frac{b}{a}}$$

takže

$$v_p = \frac{S}{w} = \frac{2R}{R^2 \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}}$$

Ak uvážime, že kapacita jednotky dĺžky kábla je

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} \quad \text{a jeho indukčnosť na jednotku dĺžky je} \quad L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

potom výraz pre  $v_p$  možno písať v tvare

$$v_p = \frac{2R}{R^2 C' + L'}$$

Ak vezmeme do úvahy tiež, že  $L'C' = 1/c^2$ , potom

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 + \delta^2}} \quad \text{kde} \quad \delta = \frac{1}{2} \left( R \sqrt{\frac{C'}{L'}} - \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L'}{C'}} \right)$$

Z týchto výrazov vidno, že rýchlosť prenosu energie káblom je vždy menšia ako rýchlosť svetla, s výnimkou keď  $\delta = 0$ , kedy

$$R = Z_v = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

V tom prípade  $v_p = c$ . Hodnota  $Z_v$  je charakteristická veličina pre kábel a nazýva sa vlnová impedancia (vlnový odpor) kábla.

**300.** a)  $v_f = c$

b) Z prvej Maxwellovej rovnice plynie, že

$$\text{rot } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \mathbf{j} = -\frac{\omega}{c} E_x \mathbf{j} = -j\mu_0 \omega \mathbf{H}$$

kde  $\mathbf{j}$  je jednotkový vektor v smere osi  $y$ . Z rovnice vyplýva, že magnetické pole má iba  $y$ -ovú zložku s veľkosťou

$$H = H_y = \frac{E_x}{\mu_0 c} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_x = \frac{1}{Z_0} E_x$$

c) Pre pomer elektrickej a magnetickej zložky vlny z posledného výrazu plynie

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376,73 \, \Omega = Z_0$$

Veličina  $Z_0$  je jednou z univerzálnych konštánt a nazýva sa charakteristická impedancia vákuu.

$$\text{d) } \bar{S} = \text{Re}\{S_k\} = \frac{E_{x0}^2}{2Z_0} \mathbf{k} = \frac{H_{x0}^2 Z_0}{2} \mathbf{k}$$

kde  $H_{y0}$  je amplitúda magnetického poľa a  $\mathbf{k}$  je jednotkový vektor v smere osi  $z$ .

**301.**  $Z = 376,73 \, \text{d/w} [\Omega]$ .

**302.** Fázová rýchlosť vlny  $v_f = f\lambda = 2 \cdot 10^8 \, \text{m/s}$ .

Relatívna permitivita prostredia  $\epsilon_r = c^2/v_f^2 = 2,25$ .

Index lomu prostredia  $n = c/v_f = 1,5$ .

Dĺžka vlny vo vákuu  $\lambda_0 = cf = 7,5 \cdot 10^{-7} \, \text{m}$ .

303.  $P = E^2/(2Z_0) \approx 1,2 \cdot 10^{10} \text{ W/m}^2$ , kde  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376,73 \ \Omega$  je charakteristická impedancia vákuua (přibližně aj vzduchu).

$$304. \mathcal{E}_{ind} = \sqrt{2\bar{P}\mu_0(\epsilon_0\mu_0)^{1/4}} \omega S = 9,15 \cdot 10^{-4} \text{ V.}$$

305. Intenzita elektrického pole mezi vodiči na obr. 305 v zadání úlohy směřuje dolů a intenzita magnetického pole směřuje za rovinu nákresu. Poyntingov vektor směřuje doprava, teda zdroj je vľavo.

306. V rovine impedancie  $Z$  je koeficient odrazu

$$\rho = \frac{U^-}{U^+} = \frac{Z' - Z_1}{Z' + Z_1} = \frac{Z(Z_2 - Z_1) - Z_1 Z_2}{Z(Z_2 + Z_1) + Z_1 Z_2}$$

kde  $Z' = ZZ_2/(Z + Z_2)$ . Amplitúda odrazenej vlny

$$U^- = \rho U^+ = \frac{Z(Z_2 - Z_1) - Z_1 Z_2}{Z(Z_2 + Z_1) + Z_1 Z_2} U^+$$

a amplitúda postupujúcej vlny

$$U^{+'} = (1 + \rho)U^+ = \frac{2ZZ_2}{Z(Z_2 + Z_1) + Z_1 Z_2} U^+$$

Amplitúda prúdu v impedancii  $Z$

$$I_Z = \frac{U^{+'}}{Z} = \frac{2Z_2}{Z(Z_2 + Z_1) + Z_1 Z_2} U^+$$

a v impedancii  $Z_2$

$$I_{Z2} = \frac{U^{+'}}{Z_2} = \frac{2Z}{Z(Z_2 + Z_1) + Z_1 Z_2} U^+$$

307. Ak  $Z_1 = Z_2 = Z = R$ , potom podľa predchádzajúcej úlohy

$$U^- = -\frac{1}{3}U^+ \quad U^{+'} = -\frac{2}{3}U^+$$

a amplitúdy prúdov

$$I_Z = I_{Z2} = \frac{2U^+}{3R}$$

Označme výkon postupujúcej napät'ovej vlny ako

$$P^+ = \frac{(U^+)^2}{2R}$$

Výkon spotrebovaný v impedancii  $Z$  a výkon postupujúci po vedení s vlnovým odporom  $Z_2$  je rovnaký a je daný výrazom

$$P_Z = P_{Z2} = \frac{(U^+)^2}{2R} = \frac{2(U^+)^2}{9R} = \frac{4}{9}P^+$$



Výkon odrazenej vlny

$$P^- = \frac{(U^-)^2}{2R} = \frac{(U^+)^2}{18R} = \frac{1}{9} P^+$$

Teda 4/9-tiny výkonu zdroja vlny  $U^+$  sa spotrebujú v impedancii  $Z = R$ , 4/9-tiny výkonu postupujú po vedení s vlnovým odporom  $Z_2 = R$  a 1/9-tina výkonu sa odrazí a postupuje späť k zdroju.

**308.** Ak  $Z_1 = R$ ,  $Z_2 = Z = 2R$ , potom podľa úlohy 306

$$U^- = 0 \qquad U^{+'} = U^+$$

Amplitúdy prúdov v  $Z_1$  a  $Z_2$

$$I_Z = I_{Z2} = \frac{U^+}{2R}$$

Výkon sa delí rovnakým dielom do impedancie  $Z$  a  $Z_2$  s hodnotou

$$P_Z = P_{Z2} = \frac{(U^+)^2}{4R}$$

Odrazený výkon je nulový. Zdroj pracuje do prispôsobenej záťaže.

**309.** Ak  $Z = 0$ , potom v rovine skratu

$$U^- = -U^+$$

a ak  $Z = \infty$ , potom v rovine otvoreného konca vedenia

$$U^- = U^+$$

V prvom prípade je v rovine skratu výsledná amplitúda napäťovej stojatej vlny

$$U = U^+ + U^- = 0$$

V rovine skratu je uzol napäťovej stojatej vlny. V druhom prípade v rovine otvoreného konca vedenia je amplitúda napäťovej stojatej vlny

$$U = U^+ + U^- = 2U^+$$

t. j. v rovine otvoreného konca vedenia je kmitňa stojatej vlny. Stojaté vlny v skratovanom a otvorenom vedení sú posunuté o  $\lambda/4$ .

**310.** Pri frekvencii  $f = 1\,000$  Hz vlnová impedancia kábla

$$Z_v = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{j\omega C}} = 461,9 - j141,4 \, \Omega$$

Konštanta šírenia

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)j\omega C} = \alpha + j\beta = 7,8 \cdot 10^{-6} + j2,3 \cdot 10^{-5} \, \text{m}^{-1}$$

z čoho konštanta útlmu je

$$\alpha = 20\alpha \log e = 8,686 \, \alpha = 6,77 \cdot 10^{-5} \, \text{dB/m}$$

fázová rýchlosť

$$v_f = \omega/\beta = 2,732 \cdot 10^8 \, \text{m/s} \qquad \text{a vlnová dĺžka} \qquad \lambda = 2\pi/\beta = 273 \, 182 \, \text{m}$$

Straty na vlnovú dĺžku sú

$$\alpha' = \alpha \lambda = 18,5 \text{ dB}$$

Pri frekvencii  $f = 100 \text{ MHz}$  je  $Z_v = 377,5 - j0,14 \ \Omega$ ,  $\alpha = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} = 6,97 \cdot 10^{-3} \text{ dB/m}$ ,  $\beta = 2,096 \ 966 \text{ rad/m}$ ,  $v_f = 2,996 \ 32 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ,  $\lambda = 2,996 \ 3 \text{ m}$ ,  $\alpha' = 2,08 \cdot 10^{-1} \text{ dB}$ .

$$311. \text{ a) } Z_v = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a} = 73,65 \ \Omega \quad \text{b) } L = Z_v^2 C = 3,63 \cdot 10^{-7} \text{ H/m.}$$

$$312. R_1 = 150 \ \Omega, R_2 = 100 \ \Omega.$$

$$313. Z_{v1} = 80 \ \Omega, Z_{v2} = 120 \ \Omega, Z_{v3} = 240 \ \Omega.$$

314. Riešenie úlohy je dané výrazmi (11.70 a,b) pre  $z = l$ , teda

$$U(l) = U_{vyst} = U_{vst} \cosh \gamma l - Z_v I_{vst} \sinh \gamma l \quad I(l) = I_{vyst} = I_{vst} \cosh \gamma l - (U_{vst}/Z_v) \sinh \gamma l$$

Výstupná impedancia

$$Z_{vyst} = \frac{U_{vyst}}{I_{vyst}} = Z_v \frac{Z_{vst} - Z_v \operatorname{tgh} \gamma l}{Z_v - Z_{vst} \operatorname{tgh} \gamma l}$$

kde  $Z_{vst} = U_{vst}/I_{vst}$  [pozri tiež odsek 11.6.2 výraz (11.84)].

315. Vedenie je bezstratové, takže konštanta šírenia  $\gamma = j\beta$ , kde  $\beta = \omega/c$  je fázová konštanta. Využitím výrazov pre amplitúdy napätia a prúdu získaných v predchádzajúcom príklade dostaneme vzťahy

$$U_{vyst} = U_{vst} \cos \beta l - j Z_v I_{vst} \sin \beta l \quad 0 = I_{vst} \cos \beta l - j (U_{vst}/Z_v) \sin \beta l$$

Riešením týchto rovníc dostaneme pre výstupné napätie výraz a hodnotu

$$U_{vyst} = \frac{U_{vst}}{\cos \beta l} = 64,72 \text{ V}$$

316. Riešením telegrafných rovníc s uvažovaním, že  $I_{vyst} = 0$  dostaneme pre amplitúdy napätia a prúdu hodnoty

$$U_m(l) = U_{vst} \cos \beta l = 401,5 \text{ V} \quad I_m(l) = j (U_{vst}/Z_v) \sin \beta l = j 1,486 \text{ A}$$

kde  $\beta = 2\pi/\lambda = 0,0209 \text{ rad/m}$ .

317. Vedenie je na konci otvorené, teda  $I_{vyst} = 0$ . Amplitúda prúdu vo vzdialenosti  $z$  od konca vedenia je

$$I_m(z) = j \frac{U_{vyst}}{Z_v} \sin \beta z$$

kde  $\beta = 2\pi/\lambda = 0,314 \text{ rad/m}$ . Pre  $z = l = 2 \text{ m}$  je  $I_m(l) = 0,5 \text{ A}$ , teda

$$Z_v = \frac{U_{vyst}}{I_m(l)} \sin \beta l = 235 \ \Omega$$

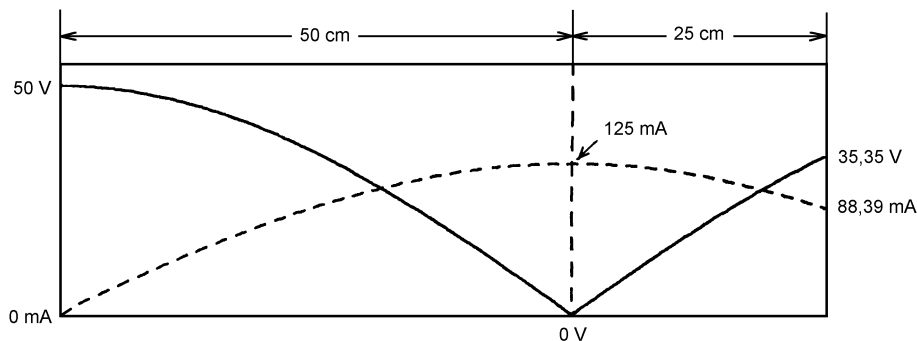
Amplitúda prúdu v maxime prúdovej stojatej vlny je

$$I_{mmax} = \frac{U_{vyst}}{Z_v} = 0,85 \text{ A}$$

318. a) Vlnová dĺžka  $\lambda = c/f = 2 \text{ m}$ ,  $\beta l = 2\pi l/\lambda = 0,75\pi \text{ rad}$ . Vstupná impedancia

$$Z_{vst} = Z_v \frac{Z_{vy\text{st}} + jZ_v \text{tg}\beta l}{Z_v + jZ_{vy\text{st}} \text{tg}\beta l} = \infty$$

b) Napät'ová a prúdová stojatá vlna sú znázornené na obr. R318.



Obr. R318

c) Na vstupe vedenia je kmitňa napät'ovej stojatej vlny a uzol prúdovej stojatej vlny ( $I_{vst} = 0$ ). Amplitúda napätia na výstupe

$$U_{vy\text{st}} = U_{vst} \cos\beta l = -35,35 \text{ V}$$

a amplitúda prúdu na výstupe

$$I_{vy\text{st}} = -j(U_{vst}/Z_v) \sin\beta l = -j88,39 \text{ mA}$$

Amplitúda prúdu v maxime prúdovej stojatej vlny

$$I_{max} = -jU_{vst}/Z_v = -j125 \text{ mA}$$

319. Vlnová dĺžka na vedení je  $\lambda = v/f = 1,9 \text{ m}$  a počet vlnových dĺžok pozdĺž vedenia  $l/\lambda = 1,184$ . Fázová konštanta  $\beta = 2\pi/\lambda = 3,307 \text{ rad/m}$ , fázový uhol vstupných veličín  $\beta l = 7,44 \text{ rad}$ . Vstupná impedancia vedenia

$$Z_{vst} = Z_v \frac{Z_{vy\text{st}} + jZ_v \text{tg}\beta l}{Z_v + jZ_{vy\text{st}} \text{tg}\beta l} = 26,23 - j35,73 \Omega = 44,32e^{-j53,72^\circ} \Omega$$

Koeficient odrazu na výstupe

$$\rho_{vy\text{st}} = \frac{Z_{vy\text{st}} - Z_v}{Z_{vy\text{st}} + Z_v} = 0,459 + j0,237 = 0,517e^{j27,31^\circ}$$

a na vstupe

$$\rho_{vst} = \frac{Z_{vst} - Z_v}{Z_{vst} + Z_v} = -0,134 - j0,499 = 0,517e^{-j105,03^\circ}$$

Pomer stojatej vlny (PSV) na vedení

$$r = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = 3,14$$

Komplexná amplitúda vstupného prúdu

$$I_{vst} = \frac{U_g}{Z_g + Z_{vst}} = 1,17 + j0,631 \text{ A} = 1,329e^{j28,34^\circ} \text{ A}$$

a vstupného napätia

$$U_{vst} = I_{vst} Z_{vst} = 53,2 - j25,2 \text{ V} = 58,90e^{-j25,35^\circ} \text{ V}$$

Komplexná amplitúda výstupného prúdu

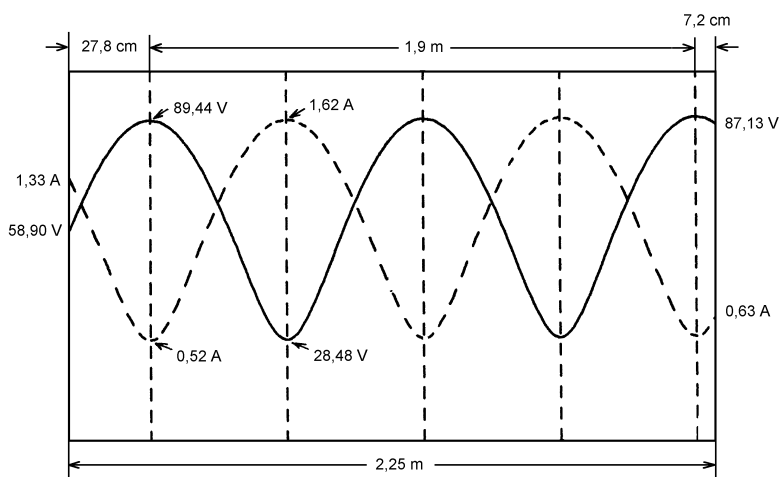
$$I_{vy\text{st}} = I_{vst} \cos \beta l - j(U_{vst}/Z_v) \sin \beta l = 0,052 - j0,631 \text{ A} = 0,635e^{-j87,29^\circ} \text{ A}$$

a výstupného napätia

$$U_{vy\text{st}} = U_{vst} \cos \beta l - jZ_v I_{vst} \sin \beta l = 53,20 - j69,05 \text{ V} = 87,13e^{-j52,39^\circ} \text{ V} = Z_{vy\text{st}} I_{vy\text{st}}$$

Vstupný a výstupný výkon

$$P = P_{vst} = P_{vy\text{st}} = \frac{1}{2} |I_{vst}|^2 R_{vst} = \frac{1}{2} |I_{vy\text{st}}|^2 R_{vy\text{st}} = 23,16 \text{ W}$$



Obr. R319

V minimách a maximách stojatých vln pre prenášaný výkon platí

$$P = \frac{1}{2} U_{max} I_{min} = \frac{1}{2} U_{min} I_{max}$$

Ak uvážime, že

$$\frac{U_{max}}{I_{min}} = r Z_v \quad \text{a} \quad \frac{U_{min}}{I_{max}} = \frac{Z_v}{r}$$

potom možno napísať

$$I_{max} = \sqrt{\frac{2P}{Z_v} r} = 1,62 \text{ A} \quad I_{min} = \sqrt{\frac{2P}{r Z_v}} = 0,52 \text{ A}$$

$$U_{max} = r Z_v I_{min} = 89,44 \text{ V} \quad U_{min} = \frac{Z_v I_{max}}{r} = 28,48 \text{ V}$$

Prvé napäťové maximum (prúdové minimum) sa od konca vedenia nachádza vo vzdialenosti  $x_0$ , pre ktorú platí

$$\frac{Z_{v\dot{y}st} + jZ_v \operatorname{tg} \beta x_0}{Z_v + jZ_{v\dot{y}st} \operatorname{tg} \beta x_0} = \frac{Z_{max}}{Z_v} = r$$

pretože  $Z_{max} = rZ_v$ . Riešením tejto rovnice pre  $x_0$  dostaneme

$$x_0 = 7,2 \text{ cm}$$

Využitím tejto hodnoty a skutočnosti, že  $\lambda = 1,9$  m možno graficky znázorniť prúdovú a napäťovú stojatú vlnu pozdĺž vedenia (pozri obr. R319).

**320.** Konštanta šírenia na danom vedení  $\gamma = \alpha = \sqrt{RG} = 9,11 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}$  a charakteristický odpor vedenia  $Z_v = \sqrt{R/G} = 5 \text{ k}\Omega$ . Útlm celého vedenia  $\alpha l = 1,09$ , kde  $l = 120$  km je dĺžka vedenia. Medzi vstupnými a výstupnými veličinami platia vzťahy

$$U_{v\dot{y}st} = U_{vst} \cosh \alpha l - I_{vst} Z_v \sinh \alpha l = 0 \quad I_{v\dot{y}st} = I_{vst} \cosh \alpha l - (U_{vst}/Z_v) \sinh \alpha l$$

Riešením rovníc pre  $I_{vst}$  a  $I_{v\dot{y}st}$  dostaneme

$$I_{vst} = \frac{U_{vst}}{Z_v \operatorname{tgh} \alpha l} = 5,13 \text{ mA} \quad I_{v\dot{y}st} = \frac{U_{vst}}{Z_v \sinh \alpha l} = 3,10 \text{ mA}$$

Vstupný odpor vedenia

$$Z_{vst} = \frac{U_{vst}}{I_{vst}} = Z_v \operatorname{tgh} \alpha l = 4674 \Omega$$

**321.** a) Fázová rýchlosť vlny na vedení  $v_f = \omega/\beta = 288 \text{ 219 km/s}$  ( $\beta = 2,18 \cdot 10^{-2} \text{ rad/km}$ ) a vlnová dĺžka  $\lambda = v_f/f = 288,219 \text{ km}$ .

b) Vzhľadom na to, že záťaž tvorí impedancia rovná vlnovej impedancii vedenia, platí

$$Z_{vst} = Z_{v\dot{y}st} = Z_v = 615 - j78 \Omega$$

takže amplitúda vstupného prúdu

$$I_{vst} = \frac{U_{vst}}{Z_{vst}} = 8,00 + j1,015 \text{ mA} = 8,064 e^{j7,228^\circ} \text{ mA}$$

a vstupný výkon

$$P_{vst} = \frac{1}{2} |I_{vst}|^2 R_{vst} = 20 \text{ W}$$

Amplitúda prúdu na výstupe vedenia

$$I_{v\dot{y}st} = I_{vst} e^{-\gamma l} = 3,878 e^{j67,46^\circ} \text{ mA} = 1,487 + j3,582 \text{ mA}$$

a napätie na výstupe vedenia

$$U_{v\dot{y}st} = Z_{v\dot{y}st} I_{v\dot{y}st} = 2,404 e^{j60,23^\circ} \text{ V} = 1,194 + j2,087 \text{ V}$$

Výstupný výkon

$$P_{v\dot{y}st} = \frac{1}{2} |I_{v\dot{y}st}|^2 R_{v\dot{y}st} = P_{vst} e^{-2\alpha l} = 4,62 \text{ mW}$$

**322. Vlnový odpor vedenia**

$$Z_v = 120 \ln \frac{2l - D}{D} = 504 \Omega$$

Vstupná reaktancia 35-metrového vedenia:

a) na konci skratovaného

$$Z_{vst} = jZ_v \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} d = j1551 \Omega = jX_L$$

b) na konci otvoreného

$$Z_{vst} = -jZ_v \operatorname{cotg} \frac{2\pi}{\lambda} d = -j163 \Omega$$

Vstupná reaktancia 16-metrového vedenia

c) na konci skratovaného  $Z_{vst} = -j1071 \Omega$ ,d) na konci otvoreného  $Z_{vst} = j237 \Omega$ .

V prípade a) vedenie predstavuje ekvivalentnú indukčnosť

$$L = \frac{\lambda X_L}{2\pi c} = 41 \mu\text{H}$$

v prípade b) ekvivalentnú kapacitu

$$C = \frac{\lambda}{2\pi c X_C} = 163 \text{ pF}$$

v prípade c)  $C = 25 \text{ pF}$ ,v prípade d)  $L = 6,3 \mu\text{H}$ .

**323.** Paralelné spojenie bezstratového, na konci skratovaného vedenia so vstupnou susceptanciou  $Y_{ved}$  a kondenzátora so susceptanciou  $Y_C = j\omega C$  bude predstavovať paralelný rezonančný obvod (rezonátor), ak:

a) vstupná susceptancia vedenia  $Y_{ved}$  bude mať indukčný charakter, teda

$$Y_{ved} = -j \frac{1}{Z_v} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{c} l$$

b) celková výsledná susceptancia bude nulová, teda

$$Y_C + Y_{ved} = 0$$

Musí teda platiť

$$j\omega C - j \frac{1}{Z_v} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{c} l = 0$$

z čoho hľadaná dĺžka vedenia je

$$l = \frac{c}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega C Z_v} = 55,2 \text{ cm}$$

**324.** V LC-obvode hodnota kapacity kondenzátora je  $C = 1/(\omega_0^2 L) = 50 \text{ pF}$ . Fázová konštanta kábla pri frekvencii  $\omega$  je daná výrazom

$$\beta = \frac{\omega}{v_f} = \omega \sqrt{L_v C_v} = \omega Z_v C_v$$

Vstupná susceptancia kábla (na druhom konci otvoreného) je

$$Y_{vst} = j \frac{\operatorname{tg} \beta d}{Z_v} = j \frac{\operatorname{tg}(\omega Z_v C_v d)}{Z_v}$$

Po pripojení kábla k rezonančnému obvodu bude mať celý systém novú rezonančnú frekvenciu  $\omega_0'$ , ktorú možno získať z podmienky nulovej výslednej susceptancie systému

$$j \frac{\operatorname{tg}(\omega_0' Z_v C_v d)}{Z_v} + j \omega_0' C + \frac{1}{j \omega_0' L} = 0 \quad \text{alebo} \quad \frac{\operatorname{tg}(\omega_0' Z_v C_v d)}{Z_v} + \omega_0' C - \frac{1}{\omega_0' L} = 0$$

Posledná rovnica pre  $\omega_0'$  je transcendentná a možno ju riešiť graficky. Ak uvážime, že v danom prípade možno očakávať  $\omega_0' Z_v C_v d \ll 1$ , potom približne platí  $\operatorname{tg}(\omega_0' Z_v C_v d) \approx \omega_0' Z_v C_v d$ , a teda rovnicu možno prepísať do tvaru

$$\omega_0' C_v d + \omega_0' C - \frac{1}{\omega_0' L} = 0$$

z čoho

$$\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{L(C + C_v d)}} = 8,129 \cdot 10^6 \text{ rad/s} \quad \text{alebo} \quad f_0' = \frac{\omega_0'}{2\pi} = 1,294 \text{ MHz}$$

**325.** Označme  $Z_{vst} = 70 \Omega$  impedanciu dipólu,  $Z_{vyst} = 300 \Omega$  vlnovú impedanciu zvodu. Vlnová impedancia štvrtvlnového vedenia

$$Z_v = \sqrt{Z_{vst} Z_{vyst}} = 145 \Omega \quad \text{a jeho dĺžka} \quad d = \frac{\lambda}{4} = 1,21 \text{ m}$$

**326.** a)  $Z_1 = Z_v$ ,  $Z_2 = \infty$ ,  $Z_3 = Z_v$ . Celý výkon postupuje do záťaže  $Z'_R$ .

b)  $Z_1 = \infty$ ,  $Z_2 = Z_v$ ,  $Z_3 = Z_v$ . Celý výkon postupuje do záťaže  $Z''_R$ .

c) Ak sú obidva spínače zapnuté, potom  $Z_1 = Z_v$ ,  $Z_2 = Z_v$ ,  $Z_3 = Z_v/2$ .

Koeficient odrazu v rovine  $AA'$  je  $\rho = -1/3$ , 1/9-ina výkonu sa v danej rovine odráža späť ku zdroju a do každej jednotlivej záťaže postupujú 4/9-iny výkonu.

Ak sú obidva spínače rozopnuté, potom  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = \infty$ . Výkon do záťaží nepostupuje, medzi rovinami spínačov je napäťová stojatá vlna s uzlami v rovinách spínačov.