

RIEŠENIA ÚLOH

Fyzikálne úlohy a ich postavenie pri štúdiu fyziky

Táto záverečná časť môjho pojednania o elektromagnetizme je venovaná riešeniu úloh, ktoré som čitateľovi-študentovi predkladal za každou kapitolou. Náročnosť úloh je rôzna: niektoré sú veľmi jednoduché a ich riešenia sú udané iba numerickými výsledkami, iné, náročnejšie, vyžadujú hlbší analytický rozbor. Niekoľko úloh vyžaduje mimoriadne dobrú prípravu a patria skôr do výkladovej časti. Takúto paletu úloh som zvolil na základe skúsenosti, že potenciálni riešitelia-študenti majú rôznu úroveň teoretickej prípravy, a teda aby aj menej erudovaní mali šancu úspešne riešiť príslušný počet úloh. Na druhej strane, aby sa tí ambicioznejší pri riešení nenudili.

Najväčší problém pre riešiteľa úlohy je obvykle odpoveď na otázku: "Ako začať?" Niet na ňu jednoznačnej odpovede. Úspech sa dostaví až po tvrdej a systematickej práci s úlohami a získaním dostatočnej skúsenosti. Ako pri skutočnom fyzikálnom výskume, ani pri riešení úlohy nie je vždy od začiatku jasné, aká je optimálna postupnosť krokov pre dosiahnutie výsledku. Ak možno niečo poradiť – tak potom popri špeciálnych zákonoch týkajúcich sa priamo zložitého problému, treba sa pri jeho riešení pokúsiť využiť fundamentálne fyzikálne zákony, ako sú napr. zákony zachovania a princíp superpozície. Ešte vyšší stupeň chápania problému predpokladá schopnosť využívania metodologických princípov fyziky, ako sú: princíp príčinnosti, symetrie, relativity a ekvivalencie. Niekedy sa treba tiež povzniesť nad priehradky, ktoré sme vo fyzike narobili. Fyzikálny svet je zložitý a mnohotvárný a často sa treba na problém vedieť pozrieť aj z inej, nielen "elektromagnetickej", ale napr. aj z mechanickej, či termodynamickej stránky.

Umenie riešenia úloh spočíva tiež v schopnosti odlíšiť podstatné stránky problému od menej podstatných, či nepodstatných. Takáto schopnosť sa pri riešení prejaví schopnosťou zanedbávať tak, že sa výpočty stanú matematicky jednoduchšie, pričom výsledok riešenia problému zostáva pre prax dostatočne presný. Dobrým príkladom je zanedbanie gravitačného pôsobenia pri elektromagnetickej interakcii elementárnych častíc.

U väčšiny predkladaných úloh sa vyžaduje numerický výsledok. Nie je mojím záujmom týrať študentov bezduchými numerickými cvičeniami, skôr mám úmysel poukázať na konkrétne kvantitatívne súvislosti, ktoré môžu byť pre budúceho profesionálneho fyzika veľmi poučné. Ved' dozvedieť sa numerickým výpočtom napr. to, že vo vnútri vodíkového atómu je intenzita elektrického poľa väčšia ako 10^{12} V/m a rastie smerom do vnútra k neznámych hodnotám, že magnetická indukcia pritom tiež dosahuje extrémne vysokých hodnôt cca 12 T, je poznanie veľmi vzrušujúce a šokujúce zároveň. Atóm takto predstavuje singularitu hustoty elektromagnetickej energie.

V dnešnej dobe pri súčasných možnostiach výpočtovej techniky nepredstavujú numerické výpočty úloh nijaké mimoriadne problémy. Mnohé z uvedených úloh autor numericky riešil v čase, keď mal k dispozícii ako jedinú výpočtovú techniku logaritmické pravítko, k tomu matematicko-fyzikálne tabuľky, papier a ceruzku.

Riešená zbierka úloh má svoje výhody, ale aj nevýhody. Výhodou je, že zbavuje študenta pochybností pri hodnotení svojho riešenia, nevýhodou je, že zvädza na "odpisovanie". Fyzikálne úlohy majú predovšetkým preveriť hĺbku a rozsah teoretickej prípravy študenta a jeho schopnosť

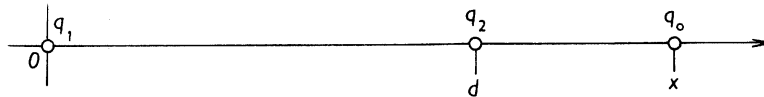
samostatne riešiť úlohy fyzikálnej praxe. Mali by byť preto riešené samostatne, bez pomoci nejakých vzorových riešení, ak navyše uvažujeme, že úlohy môžu mať niekoľko správnych spôsobov riešenia obvykle iba s jedným správnym výsledkom. Študent by po riešení mal siahnúť iba pri konfrontácii vlastného postupu a dosiahnutého riešenia. Ak si musí nimi pomáhať pred dosiahnutím vlastného výsledku, znamená to, že jeho príprava nebola dostatočná, alebo nemá dosť trpezlivosti. V takom prípade riešenia sú tiež užitočné, ale iba ako dodatočná študijná literatúra (potom však treba siahnúť aj po inej dostupnej zbierke úloh).

Napriek argumentom pre a proti si myslím, že riešené úlohy môžu byť užitočnou pomôckou, ak sa riešenia budú používať v rozumnej miere. Domnievam sa, že ich treba zaradiť aj kvôli ucelenosti predkladaného diela.

2 Elektrostatika nábojov vo vákuu

1. Výsledná sila pôsobiaca na náboj q_0 na obr. R1 môže byť nulová iba vtedy, ak sily od nábojov q_1 a q_2 sú opačného znamienka. To môže nastať vtedy ak:

- q_1 a q_2 sú opačného znamienka, pritom $x > d$ alebo $x < 0$,
- q_1 a q_2 sú rovnakého znamienka, pričom $0 < x < d$.



Obr. R1

Podmienka rovnováhy síl je

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{|q_1|q_0}{x^2} - \frac{|q_2|q_0}{(x-d)^2} \right) = 0$$

z čoho pre x plynie kvadratická rovnica

$$(1-p)x^2 - 2dx + d^2 = 0$$

kde $p = |q_2|/|q_1|$. Korene tejto rovnice sú

$$x_{1,2} = d \frac{1 \pm \sqrt{p}}{1-p} = \frac{d}{1 \mp \sqrt{p}}$$

a udávajú polohy náboja q_0 , v ktorých je tento náboj v rovnováhe. Pritom môžu nastať tieto prípady:

α) ak $0 < p < 1$ ($|q_2| < |q_1|$), potom

$$x_1 > d \quad \text{a} \quad 0 < x_2 < d$$

Prvý koreň zodpovedá nábojom opačného znamienka a druhý nábojom rovnakého znamienka.

β) ak $p > 1$ ($|q_2| > |q_1|$), potom

$$x_1 < 0 \quad \text{a} \quad 0 < x_2 < d$$

Prvý koreň zodpovedá nábojom opačného znamienka a druhý nábojom rovnakého znamienka.

γ) ak $p = 1$ ($|q_2| = |q_1|$), potom pre náboje rovnakého znamienka je rovnovážna poloha medzi nábojmi vo vzdialenosti $x = d/2$. Pre náboje opačného znamienka rovnovážna poloha neexistuje, resp. je v $\pm\infty$.

$$2. f = 9,2 \cdot 10^{-8} \text{ N.}$$

3. Dostredivá sila sa rovná Coulombovej sile a platí

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

z čoho plynie pre rýchlosť hodnota $v = 2,25 \cdot 10^6$ m/s.

4. Využitím Gaussovho zákona dostaneme pre intenzitu elektrického poľa vo vnútri rovnomerne nabitaj gule výraz

$$E(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad \text{pre } r < R$$

Elektrón má rovnovážnu polohu v strede gule. Ak sa vychýli z jej stredu do vzdialenosti r , bude naň pôsobiť centrálna sila

$$F(r) = eE(r) = \frac{eQr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

Pohybová rovnica pre elektrón bude tvaru

$$m_e \frac{d^2 r}{dt^2} = -F(r) = -\frac{eQr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

Je to diferenciálna rovnica pre netlmený harmonický pohyb s frekvenciou

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{eQ}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3}}$$

Pre vodík ($m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $Q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C) $f = 7 \cdot 10^{15}$ Hz. Táto frekvencia spadá do ďalekej UV – oblasti (pozri tab. 20) za hranou Lymanovej série – pojem z atómovej fyziky.

$$5. E = 6,4 \cdot 10^{20} Z/A^{3/2} \text{ [V/m].}$$

6. a) $\text{div } \mathbf{E} = 0$, $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. Pretože $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, daná funkcia môže predstavovať reálne elektrostatické pole.

b) Integrál $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ po dráhe 1 na obr. R6 je

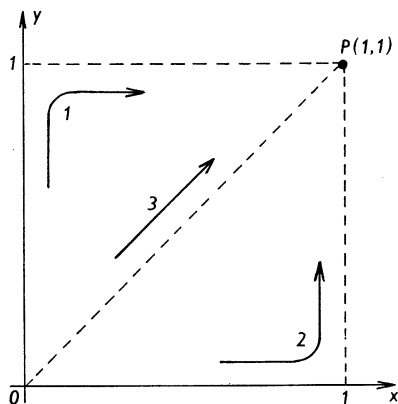
$$I_1 = K \int_{(0,0)}^{(0,1)} (y \, dx + x \, dy) + K \int_{(0,1)}^{(1,1)} (y \, dx + x \, dy) = K(0+1) = K$$

Integrál po dráhe 2

$$I_2 = K \int_{(0,0)}^{(1,0)} (y \, dx + x \, dy) + K \int_{(0,1)}^{(1,1)} (y \, dx + x \, dy) = K(0+1) = K$$

Dráhu 3 predstavuje priamka $y = x$, pričom vzdialenosť l od začiatku súradníc sa dá vyjadriť ako

$$l = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Obr. R6

Na dráhe 3 má intenzita elektrického poľa veľkosť

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kl$$

a smeruje pozdĺž priamky, takže integrál po dráhe 3

$$I_3 = \int_0^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = K \int_0^{\sqrt{2}} l \, dl = K$$

Všetky tri integrály majú rovnakú hodnotu K , teda hodnota integrálu $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ nezávisí od zvolených dráh.

c) Potenciálová funkcia je tvaru

$$V = -Kxy + \text{konšt.}$$

7. a) Celkový náboj v guľovej vrstve $q = Q$

b) Pre $r < R_2$ je $E = 0$. Pre $R_2 < r < R_1$ z Gaussovho zákona pre intenzitu plynie

$$E(r) = \frac{Q(r - R_2)}{4\pi\epsilon_0(R_1 - R_2)r^2}$$

Pre $r > R_1$ je

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

c) Potenciál pre $r > R_1$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Pre $R_2 < r < R_1$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_1 - R_2)} \left(\frac{r - R_2}{r} + \ln \frac{R_1}{r} \right)$$

a pre $r < R_2$ je potenciál konštantný a z dôvodov spojitosti rovnaký ako pri $r = R_2$, teda

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_1 - R_2)} \ln \frac{R_1}{R_2} = \text{konšt.}$$

8. Ak napíšeme daný potenciál v tvare

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-ar} - 1}{r} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

vidíme, že je superpozíciou potenciálu bodového náboja q a potenciálu

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-ar} - 1}{r}$$

na ktorý treba aplikovať Poissonovu rovnicu v sférických súradniciach (pozri tabuľku 23)

$$\Delta_r V'(r) = \frac{\partial^2 V'}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V'}{\partial r} = \frac{qa^2 e^{-ar}}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{\rho'(r)}{\epsilon_0}$$

z čoho hustota náboja zodpovedajúca potenciálu $V(r)$ je

$$\rho'(r) = -\frac{qa^2 e^{-ar}}{4\pi r}$$

Ak hustotu bodového náboja vyjadríme pomocou Diracovej δ -funkcie

$$\rho_0 = \delta(r)q$$

potom výsledná hustota náboja je superpozíciou ρ_0 a $\rho'(r)$, teda

$$\rho(r) = \rho_0 + \rho'(r)$$

Yukawov potenciál je teda buденý bodovým nábojom q a záporným nábojom, ktorý je rozložený so sférickou symetriou okolo náboja q s hustotou $\rho'(r)$. Celkový náboj rozloženia $\rho(r)$ je

$$\int_0^\infty \rho'(r) 4\pi r^2 dr = -qa^2 \int_0^\infty e^{-ar} r dr = -q$$

Rovnica pre Yukawov potenciál sa dá napísať v tvare

$$\Delta V - a^2 V = -\frac{q\delta(r)}{\epsilon_0}$$

v ktorom je známa z literatúry.

9. a) Celkový náboj

$$Q = \int \rho d\tau = -\frac{4e}{a_0^3} \int_0^\infty r'^2 \exp\left(\frac{-2r'}{a_0}\right) dr' = -e$$

b) Intenzita elektrického poľa buденá elektrónovým mrakom

$$\begin{aligned} E_e(r) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{e}{\pi a_0^3} \int_0^r \exp\left(\frac{-2r'}{a_0}\right) 4\pi r'^2 dr' = \\ &= -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0^3 r^2} \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{a_0}\right) \exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right) \right] + \frac{e}{2\pi\epsilon_0 a_0^2} \exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right) \end{aligned}$$

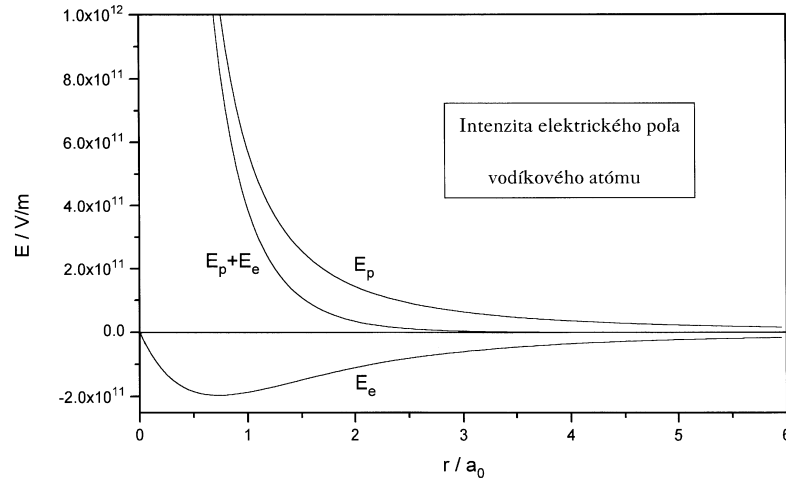
Protón nachádzajúci sa v strede symetrie budí v svojom okolí elektrické pole s intenzitou

$$E_p(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

takže výsledná intenzita elektrického poľa vodíkového atómu je

$$E(r) = E_e(r) + E_p(r)$$

Závislosť intenzity poľa od argumentu r/a_0 je graficky znázornená na obr. R9a (Bohrov polomer $a_0 = 5,29 \cdot 10^{-11}$ m, náboj protónu a elektrónu $e = \pm 1,602 \cdot 10^{-19}$ C). Z grafu vidíme, že intenzita elektrického poľa vo vnútri atómu je obrovská a nedá sa porovnať so žiadnym makroskopickým poľom v bežnom živote.



Obr. R9a

c) Podľa výrazu (2.88) potenciál sféricky symetrického rozloženia náboja je daný výrazom

$$V_e(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \frac{1}{\epsilon_0} \int_r^\infty \rho(r') r' dr' = -\frac{e}{\pi\epsilon_0 a_0^3} \left(\frac{1}{r} I_1 + I_2 \right)$$

kde

$$I_1 = \int_0^r \exp\left(\frac{-2r'}{a_0}\right) r'^2 dr' = \frac{a_0^3}{4} \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{a_0} + \frac{2r^2}{a_0^2} \right) \exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right) \right]$$

$$I_2 = \int_r^\infty \exp\left(\frac{-2r'}{a_0}\right) r' dr' = \frac{a_0^2}{4} \left(1 + \frac{2r}{a_0} \right) \exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right)$$

takže

$$V_e(r) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right) \right] + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0} \exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right)$$

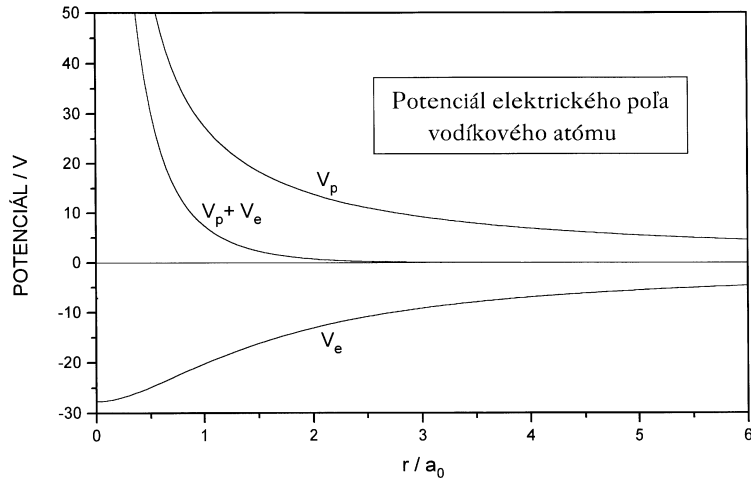
Potenciál od celého vodíkového atómu je

$$V(r) = V_e(r) + V_p(r)$$

kde

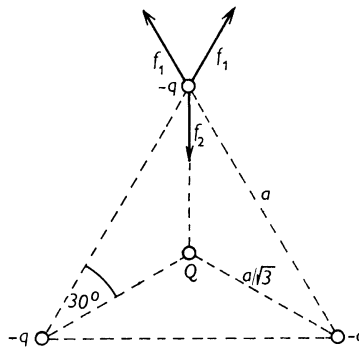
$$V_p(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$$

je potenciál jadra (protónu). Závislosť potenciálu od argumentu r/a_0 je pre uvedené numerické hodnoty e a a_0 graficky znázornená na obr. R9b.



Obr. R9b

10. a) Dĺžka dipólu $d = p/e = 3,85 \cdot 10^{-11}$ m. b) Intenzita poľa na osi dipólu je $4,1 \cdot 10^6$ V/m, kolmo na os dipólu je $-2,05 \cdot 10^6$ V/m. c) Maximálna sila, ktorou dipól pôsobí na vodíkový ión je $6,55 \cdot 10^{-13}$ N. d) Elektrická sila medzi dvoma molekulami vody je $3,27 \cdot 10^{-11}$ N.



Obr. R11

11. a) Z obr. R11 vidieť, že výsledná sila pôsobiaca na jeden z nábojov $-q$ je

$$f = 2f_1 \cos 30^\circ - f_2 = \frac{\sqrt{3}q}{4\pi\epsilon_0 a^2} (q - \sqrt{3}Q)$$

Ak $q > \sqrt{3}Q$, sila pôsobí von z trojuholníka, ak $q < \sqrt{3}Q$, potom sila pôsobí dovnútra.

b) Energia sústavy

$$W = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a} (q - \sqrt{3}Q)$$

c) Sila pôsobiaca na náboj $-q$ bude nulová, ak $q = \sqrt{3}Q$. Energia sústavy je vtedy nulová. Systém je nestabilný, pretože akákoľvek zmena polohy jedného z nábojov vedie k vzniku nenulovej sily pôsobiacej na náboj Q , čím sa celý systém zrúti. Elektrostatický systém voľných nábojov je vždy nestabilný (Earnshawova veta).

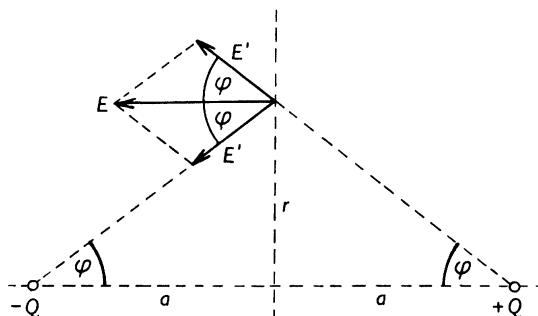
12. Intenzita bude maximálna vo vzdialenosti $x = 7,1 \cdot 10^{-2}$ m od stredu kružnice na jej osi a jej hodnota je $E_{max} = 1,73 \cdot 10^3$ V/m.

13. Podľa obr. R13 je v rovine symetrie nábojov intenzita elektrického poľa daná výrazom

$$E = 2E' \cos \varphi = \frac{Qa}{2\pi\epsilon_0 (r^2 + a^2)^{3/2}}$$

a je kolmá na rovinu symetrie nábojov. Tok vektora intenzity elektrického poľa je

$$\Psi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^R \frac{Qa}{2\pi\epsilon_0 (r^2 + a^2)^{3/2}} 2\pi r dr = \frac{Q}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right)$$



Obr. R13

14. Dosku možno rozložiť na prúžky podľa obr. R14, pričom potenciál od jedného prúžku v strede dosky je

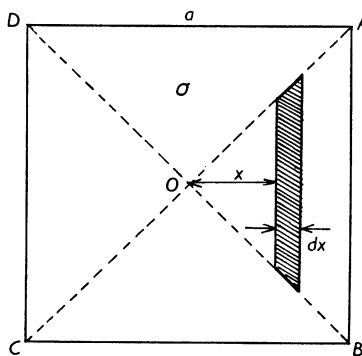
$$dV' = \frac{\sigma dx}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{x + \sqrt{2}x}{x} = \frac{\sigma dx}{2\pi\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2})$$

Potenciál od trojuholníkovej časti OAB

$$V' = \frac{\sigma \ln(1 + \sqrt{2})}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{a/2} dx = \frac{\sigma a}{4\pi\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2})$$

a od celej dosky

$$V = 4V' = \frac{\sigma a}{\pi\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2})$$



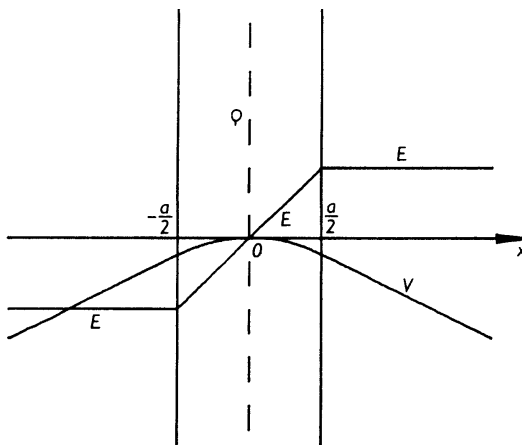
Obr. R14

15. Z vyjadrenia intenzity elektrického poľa v sférických súradniciach (pozri tabuľku 22)

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

dostaneme pre zložky poľa výrazy

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2a \cos \vartheta}{r^3} + \frac{b}{r^2} \quad E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \quad E_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{a \sin \vartheta}{r^2}$$



Obr. R16

16. Nech os x smeruje kolmo na vrstvu, pričom $x = 0$ v strede vrstvy. Použitím Gaussovho zákona:

– pre $|x| < a/2$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} x \mathbf{i} \quad V = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} x^2$$

– pre $|x| > a/2$

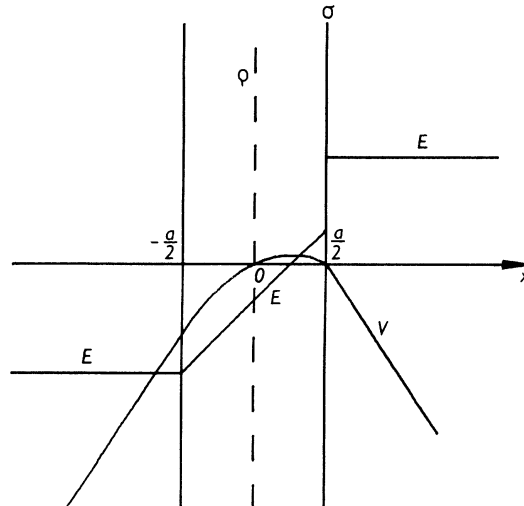
$$\mathbf{E} = \frac{\rho a}{2\epsilon_0} \frac{x}{|x|} \mathbf{i} \quad V = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0} |x| + \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}$$

\mathbf{i} je jednotkový vektor v smere osi x . V rovine $x = 0$ je $V = 0$. Grafické závislosti E a V od x sú na obr. R16.

17. Nech os x smeruje kolmo na vrstvu, pričom $x = 0$ v strede vrstvy a nekonečná rovina nabitá plošným nábojom σ je vo vzdialenosti $a/2$ na vrstve vpravo. Potom:

– pre $|x| < a/2$

$$E = \frac{2\rho x - \sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{i} \qquad V = -\frac{\rho x^2 - \sigma x}{2\epsilon_0}$$



Obr. R17

– pre $|x| > a/2$

$$E = \frac{\rho a + \sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{|x|} \mathbf{i} \qquad V = -\frac{\rho a + \sigma}{2\epsilon_0} |x| + \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0} + \frac{\sigma a}{4\epsilon_0} \left(1 + \frac{x}{|x|}\right)$$

\mathbf{i} je jednotkový vektor v smere osi x . Pre $x = 0$ je $V = 0$. Priebehy E a V v závislosti od x sú pre $\sigma = \rho a/2$ zobrazené na obr. R17.

18. Intenzita elektrického poľa na osi disku vo vzdialenosti z od jeho stredu

$$E = \frac{Az}{2\epsilon_0} \left(\ln \frac{R + \sqrt{R^2 + z^2}}{z} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

a potenciál

$$V = \frac{A}{4\epsilon_0} \left(R\sqrt{R^2 + z^2} - z^2 \ln \frac{R + \sqrt{R^2 + z^2}}{z} \right)$$

19. Na disku možno zvolit' nekonečne tenké kruhové prúžky podľa obr. R19 s plochou $dS = 2r\vartheta dr$, pričom $r = 2R \cos \vartheta$ a $dr = -2R \sin \vartheta d\vartheta$, takže $dS = -8R \vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta$. Potenciál, ktorý budí náboj na prúžku v bode 0 je

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r} = -\frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0} \vartheta \sin \vartheta d\vartheta$$

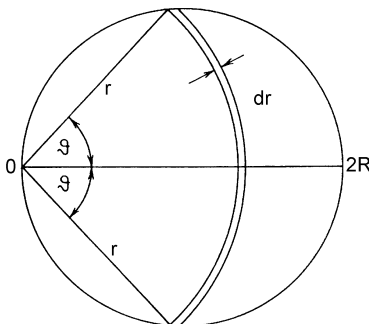
a od celého disku

$$V = -\frac{\sigma R}{\pi \epsilon_0} \int_{\pi/2}^0 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{\sigma R}{\pi \epsilon_0}$$

V strede disku je potenciál [pozri výraz (2.84), pri $z = 0$]

$$V_{stred} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} > V \quad \text{takže pomer} \quad \frac{V_{stred}}{V} = \frac{\pi}{2} > 1$$

Potenciál na disku teda smerom od stredu disku k jeho okraju klesá.



Obr. R19

20. Využitím výrazu (2.88) dostaneme potenciál a intenzitu elektrického poľa pre $0 < r < R$ v tvare

$$V = \frac{A(4R^3 - r^3)}{12\epsilon_0} \quad E = \frac{Ar^2}{4\epsilon_0}$$

Pre $r > R$

$$V = \frac{AR^4}{4\epsilon_0 r} \quad E = \frac{AR^4}{4\epsilon_0 r^2}$$

Intenzita má radiálny smer zo stredu symetrie.

21. Použitím Poissonovej rovnice dostaneme pre hľadané nábojové rozloženie výraz

$$\rho = \frac{\alpha A}{4\pi} e^{-ar} \left(\frac{2}{r} - \alpha \right)$$

22. $\rho = -6\epsilon_0\alpha$; náboj na guli je rovnomerne rozložený.

23. Intenzita elektrického poľa

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -(\alpha y \mathbf{i} + \alpha x \mathbf{j} - 2\alpha z \mathbf{k})$$

kde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sú jednotkové vektory v smeroch súradnicových osí. Priemet \mathbf{E} do smeru vektora \mathbf{a} je daný výrazom

$$E_a = \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\alpha(6z - y)}{\sqrt{10}}$$

V bode M je $E_a = -(19/\sqrt{10})\alpha$.

24. Pre $r < r_1$

$$E = 0 \qquad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_2}{r_2} - \frac{q_1}{r_1} \right)$$

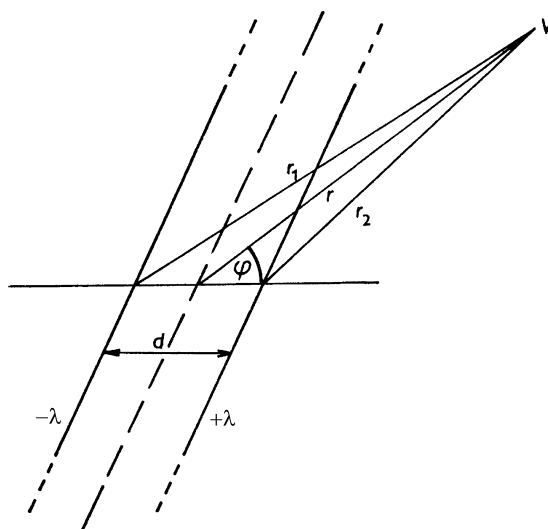
pre $r_1 < r < r_2$

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} e_r \qquad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_2}{r_2} - \frac{q_1}{r} \right)$$

a pre $r > r_2$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 - q_1}{r^2} e_r \qquad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 - q_1}{r}$$

e_r je jednotkový vektor v radiálnom smere zo stredu symetrie. Ak sa gule navzájom posunú, potenciál vo vzdialenom bode bude superpozíciou potenciálu bodového náboja veľkosti $q_2 - q_1$ a potenciálu dipólu s momentom $p = q_2 \delta x$.



Obr. R25

25. Z obr. R25 plynie pre potenciál vo veľkej vzdialenosti r (v rovine kolmej na dvojicu priamok)

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_1 - \ln r_2) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

pričom pre $r \gg d$

$$\ln \frac{r_1}{r_2} = \ln \frac{r_1^2}{r_1 r_2} \approx \ln \frac{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + rd \cos \varphi}{r^2} \approx \ln \left(1 + \frac{d}{r} \cos \varphi \right) \approx \frac{d}{r} \cos \varphi$$

Potenciál priamkového dipólu je teda

$$V = \frac{\lambda d \cos \varphi}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

kde $\mathbf{p}' = \lambda \mathbf{d}$ je moment priamkového dipólu. Intenzita elektrického poľa

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}')}{r^4} - \frac{\mathbf{p}'}{r^2} \right]$$

26. Pre $r > a$ je hľadaný potenciál riešením Poissonovej rovnice, ktorá má v cylindrických súradniciach pri osovej symetrii tvar (pozri tabuľku 23)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0} = -\frac{k}{\epsilon_0 r}$$

Po úprave rovnice a prvej integrácii dostaneme

$$\frac{dV}{dr} = -E = -\frac{k}{\epsilon_0} + \frac{C_1}{r}$$

kde C_1 je prvá integračná konštanta. V oblasti $r \leq a$ je intenzita elektrického poľa nulová, a teda pre $r = a$

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{k}{\epsilon_0} + \frac{C_1}{r} = 0$$

odkiaľ pre integračnú konštantu plynie hodnota

$$C_1 = a \frac{k}{\epsilon_0}$$

Potenciál dostaneme ďalšou integráciou výrazu dV/dr v tvare

$$V = -\frac{k}{\epsilon_0} r + C_1 \ln r + C_2 = \frac{k}{\epsilon_0} (a \ln r - r) + C$$

kde $C_2 = C$ je druhá integračná konštanta. V oblasti $r < a$ je potenciál konštantný a rovný jeho hodnote pri $r = a$, teda

$$V = \frac{k}{\epsilon_0} (a \ln a - a) + C$$

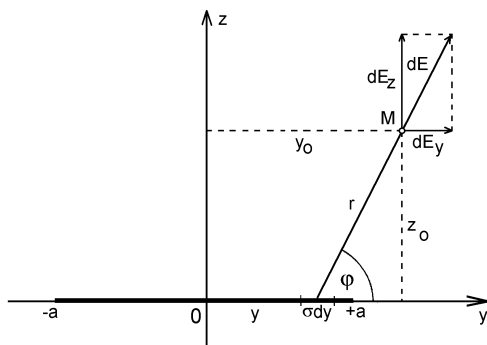
27. Umiestnime pásik symetricky okolo osi x pravouhlého súradnicového systému podľa obr. R27. Nekonečne úzky prúžok dy s dĺžkovým nábojom $d\tau = \sigma(y)dy$ vytvorí v bode $M(y_0, z_0)$ elementárnu intenzitu

$$dE = \frac{d\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma(y)dy}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{(y_0 - y)^2 + z_0^2}}$$

Priemety intenzity do smerov osí y a z sú

$$E_y = \int dE \cos \varphi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{\sigma(y)(y_0 - y)dy}{(y_0 - y)^2 + z_0^2}$$

$$E_z = \int dE \sin \varphi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{\sigma(y)z_0 dy}{(y_0 - y)^2 + z_0^2}$$



Obr. R27

a) Ak $\sigma = \sigma_0 = \text{konšt.}$, integráciou posledných výrazov dostaneme

$$E_y = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(y_0 - a)^2 + z_0^2}{(y_0 + a)^2 + z_0^2} \quad E_z = \frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \left(\arctg \frac{a + y_0}{z_0} + \arctg \frac{a - y_0}{z_0} \right)$$

b) V tomto prípade integrácia vedie na tvary

$$E_y = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda} |z_0|\right) \cos \frac{2\pi}{\lambda} y_0 \quad E_z = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda} |z_0|\right) \frac{z_0}{|z_0|} \sin \frac{2\pi}{\lambda} y_0$$

Poznámka: V prípade b) treba využiť integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b + cy}{p + 2qy + y^2} \sin(ay) dy = \pi \exp\left(-a\sqrt{p-q^2}\right) \left[\frac{cq-b}{\sqrt{p-q^2}} \sin(aq) + c \cos(aq) \right]$$

28. $E_e = (q_1 + q_2)/(2\epsilon_0)$, $E_i = (q_1 - q_2)/(2\epsilon_0)$, $\sigma_1 = \sigma_2 = (q_1 + q_2)/2$, $\sigma_1' = -\sigma_2' = (q_1 - q_2)/2$.

29. Hľadaný potenciál je riešením Laplaceovej rovnice

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

a v rovine $y = 0$ predstavuje periodickú obdĺžnikovú funkciu, ktorú možno rozvinúť do Fourierovho radu

$$V(x,0) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{a} x$$

kde $n = 1, 3, 5, \dots$ sú všetky nepárne kladné čísla. Riešenie Laplaceovej rovnice možno hľadať v tvare

$$V(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

Dosadením tohto výrazu do Laplaceovej rovnice a po jej úprave dostaneme rovnicu

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

Prvý člen tejto rovnice závisí iba od x a druhý iba od y . Aby rovnica bola splnená pre všetky x a y treba, aby sa jednotlivé členy rovnali konštantám. Položme teda

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k_y^2$$

kde

$$k_x^2 = k_y^2 = k^2$$

je predbežne ľubovoľná konštantá. Riešenia týchto rovníc sú

$$X = A \sin kx + B \cos kx \quad Y = C e^{ky} + D e^{-ky}$$

takže

$$V(x, y) = X \cdot Y = (A \sin kx + B \cos kx) \cdot (C e^{ky} + D e^{-ky})$$

kde A, B, C, D sú integračné konštanty. Riešením Laplaceovej rovnice bude aj superpozícia takýchto riešení, teda

$$V(x, y) = \sum_n (A_n \sin k_n x + B_n \cos k_n x) (C_n e^{k_n y} + D_n e^{-k_n y})$$

pre n nepárne. Hodnoty konštant A, B, C, D treba určiť z okrajových podmienok. Pre $|y| \rightarrow \infty$ potenciál musí klesať k nule, z čoho plynie, že musí platiť

$$C_n = 0 \text{ pre } y > 0 \quad \text{a} \quad D_n = 0 \text{ pre } y < 0$$

Tiež $B_n = 0$, pretože riešenie v rovine $y = 0$ neobsahuje členy s kosínusmi. Pre konštanty A_n a k_n z výrazu pre potenciál v rovine $y = 0$ plynie

$$A_n = \frac{4V_0}{n\pi} \quad k_n = \frac{n\pi}{a}$$

Hľadaný potenciál je teda tvaru

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n\pi}{a} y\right) \sin \frac{n\pi}{a} x \quad \text{pre } y \geq 0$$

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \exp\left(+\frac{n\pi}{a} y\right) \sin \frac{n\pi}{a} x \quad \text{pre } y \leq 0$$

Jednotlivé členy potenciálu (harmonické zložky) klesajú exponenciálne s nárastom $|y|$. n -tá harmonická klesne na $1/e$ -tinu vo vzdialenosti $y_n = a/(n\pi)$. Amplitúdy harmonických zložiek klesajú veľmi rýchle, takže už pre $|y| \geq a/\pi$ možno potenciál vyjadriť približnými výrazmi

$$V(x, y) \approx \frac{4V_0}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi}{a} y\right) \sin \frac{\pi}{a} x \quad \text{pre } y \geq a/\pi$$

$$V(x, y) \approx \frac{4V_0}{\pi} \exp\left(\frac{\pi}{a} y\right) \sin \frac{\pi}{a} x \quad \text{pre } y \leq -a/\pi$$

30. Z výrazov (2.21) alebo (2.119) plynie pre intenzity v bode A hodnota $E_x = 3,1 \cdot 10^7$ V/m, a v bode B hodnota $E_y = -6,2 \cdot 10^7$ V/m.

31. Energia dipólu p_1 v elektrickom poli E_2 dipólu p_2 je $W = -p_1 \cdot E_2$, pričom

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3r(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_2}{r^3} \right]$$

takže

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right]$$

Výraz pre energiu je symetrický vzhľadom na \mathbf{p}_1 a \mathbf{p}_2 – ide o vzájomnú (interakčnú) energiu.

32. Vo vzdialenosti r od priamky je intenzita elektrického poľa

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} e_r$$

kde e_r je jednotkový vektor v smere vzdialenosti r .

a) Vektory \mathbf{p} , \mathbf{e}_r resp. \mathbf{E}_r sú kolinéárne. Veľkosť sily pôsobiacej na dipól je daná výrazom

$$F_r = \mathbf{p} \cdot \text{grad } E_r = \mathbf{p} \cdot \frac{dE_r}{dr} e_r = \pm \frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

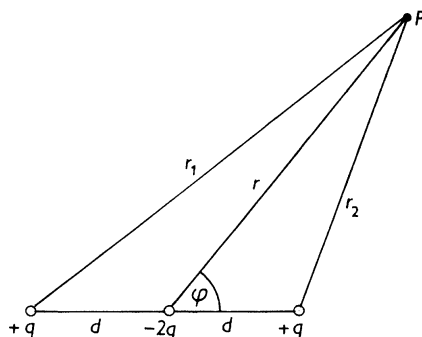
a smeruje k priamke alebo od nej podľa orientácie dipólu. Moment sily

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_r = 0$$

b) Vektory \mathbf{p} a \mathbf{E}_r sú navzájom kolmé. Sila $F_r = 0$ a moment sily

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_r = \pm \frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 r} e_\varphi$$

kde e_φ je jednotkový vektor v azimutálnom smere.



Obr. R33

33. Potenciál v bode P na obr. R33 je daný superpozíciou potenciálov od jednotlivých nábojov, teda

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{2}{r} \right)$$

pričom

$$r_1 = \sqrt{r^2 + d^2 + 2rd \cos \varphi} = r\sqrt{1 + p^2 + 2p \cos \varphi}$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi} = r\sqrt{1 + p^2 - 2p \cos \varphi}$$

kde $p = dlr$. Výraz pre potenciál možno teda napísať v tvare

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2+2p\cos\varphi}} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2-2p\cos\varphi}} - 2 \right)$$

Keďže $p \ll 1$, možno prvé dva členy v zátvorke rozvinúť do mocninného MacLaurinového radu podľa mocnín p s využitím rozvoja

$$\frac{1}{\sqrt{1+\delta}} = 1 - \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 - \dots \quad \text{kde v našom prípade} \quad \delta = p^2 \pm 2p\cos\varphi$$

takže dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2 \pm 2p\cos\varphi}} = 1 \mp p\cos\varphi + \frac{p^2}{2}(3\cos^2\varphi - 1) \pm \text{členy vyšších rádov}$$

Ak sa obmedzíme na členy s mocninami najviac p^2 , potom pre potenciál dostaneme výraz

$$V = \frac{qd^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\cos^2\varphi - 1)$$

34. Podľa obr. R34 a výrazu (2.127) je potenciál na osi kruhovej dvojvrstvy vo vzdialenosti z daný výrazom

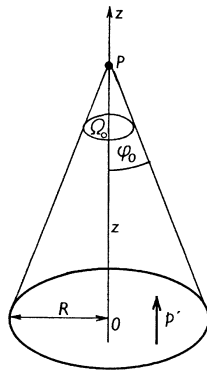
$$V = \frac{p'}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega_0} d\Omega$$

kde $d\Omega = 2\pi \sin\varphi d\varphi$ je element priestorového uhlu Ω_0 , takže

$$V = \frac{p'}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\varphi_0} 2\pi \sin\varphi d\varphi = \frac{p'}{2\epsilon_0} (1 - \cos\varphi_0)$$

Keďže $\cos\varphi_0 = z/\sqrt{R^2+z^2}$ možno výraz pre potenciál napísať v tvare

$$V = \frac{p'}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}} \right) \frac{z}{|z|}$$



Obr. R34

Intenzita elektrického poľa v bode P je

$$E = E_z = -\frac{dV}{dz} = \frac{\rho'R^2}{2\epsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}} \frac{z}{|z|}$$

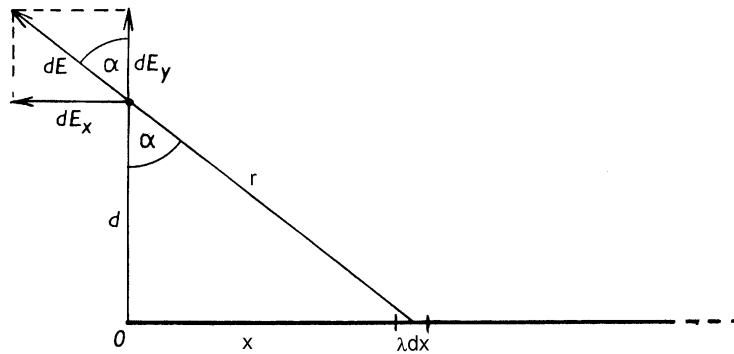
35. Intenzita elektrického poľa od nábojového elementu λdx (obr. R35) vo vzdialenosti r je daná výrazom

$$dE = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

a zložky v smeroch osí x a y

$$dE_x = -\frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \alpha$$

$$dE_y = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha$$



Obr. R35

Ak vezmeme do úvahy, že $x = d \operatorname{tg} \alpha$, $dx = (d/\cos^2 \alpha)d\alpha$ a $r = d/\cos \alpha$, možno posledné výrazy uviesť na tvar

$$dE_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} \sin \alpha d\alpha$$

$$dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} \cos \alpha d\alpha$$

Integráciou týchto výrazov podľa α od 0 po $\pi/2$ dostaneme

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d}$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d}$$

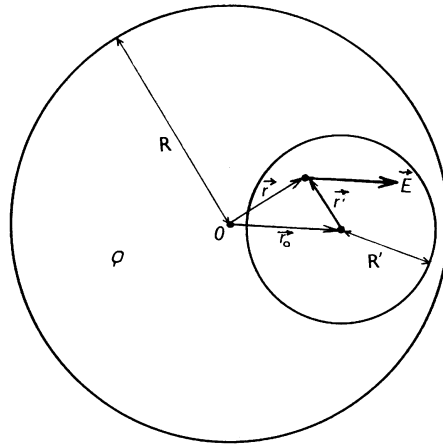
Veľkosť vektora intenzity elektrického poľa

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\epsilon_0 d}$$

a uhol, ktorý zvierá vektor \mathbf{E} s osou x

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg} \frac{E_y}{|E_x|} = 45^\circ$$

36. Pole v dutine možno považovať za superpozíciu poľa od náboja rovnomerne rozloženého v celom objeme gule s hustotou $+\rho$ a poľa náboja rovnomerne rozloženého s hustotou $-\rho$ v guľovom objeme s polomerom R' . V dutine bude teda platiť (obr. R36):



Obr. R36

$$\text{a) } \mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}' = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_0$$

Je dobre všimnúť si, že elektrické pole v dutine je homogénne a pre kladné ρ má smer vektora \mathbf{r}_0 .

b) Pri danom R bude elektrické pole v dutine maximálne, ak bude \mathbf{r}_0 maximálne, a teda ak $\mathbf{r}_0 = \mathbf{R} - \mathbf{R}'$, t. j. ak sa dutina svojím okrajom bude dotýkať vonkajšej guľovej plochy. Objem dutiny $\tau = 4\pi R'^3/3$. Súčin

$$\tau E = \frac{4\pi\rho}{9\epsilon_0} (RR'^3 - R'^4)$$

bude maximálny pre také R' , ktoré spĺňa podmienku

$$\frac{\partial \tau E}{\partial R'} = \frac{4\pi\rho}{9\epsilon_0} (3RR'^2 - 4R'^3) = 0 \quad \text{a teda ak} \quad R'/R = 3/4$$

37. Z výrazu pre nulový potenciál

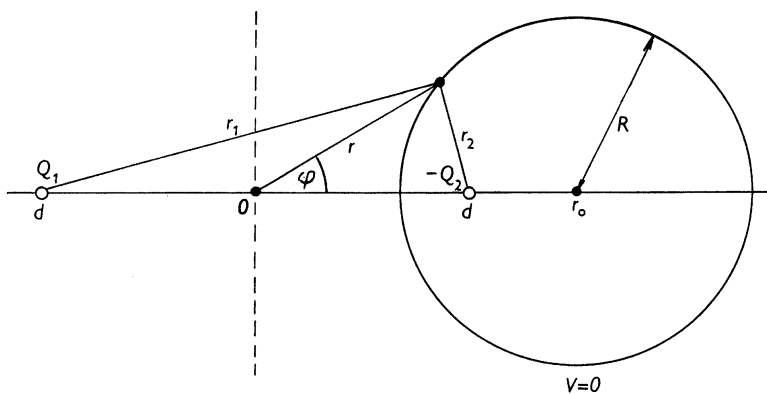
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_1} - \frac{Q_2}{r_2} \right) = 0$$

plynie vzťah medzi vzdialenosťami r_1 a r_2 nábojov od ľubovoľného bodu na ploche nulového potenciálu (pozri obr. R37)

$$Q_1 r_2 = Q_2 r_1$$

Podľa kosínusovej vety

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r^2 + d^2 + 2rd \cos \varphi \\ r_2^2 &= r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi \end{aligned}$$



Obr. R37

takže rovnicu pre plochu nulového potenciálu možno napísať v tvare

$$r^2 + d^2 - 2rd \frac{Q_1^2 + Q_2^2}{Q_1^2 - Q_2^2} \cos \varphi = 0$$

V polárnych súradniciach je to rovnica kružnice s polomerom

$$R = d \frac{2Q_1Q_2}{Q_1^2 - Q_2^2}$$

a stredom ležiacim na polárnej osi vo vzdialenosti od bodu 0

$$r_0 = d \frac{Q_1^2 + Q_2^2}{Q_1^2 - Q_2^2}$$

Plocha nulového potenciálu je teda guľová plocha s polomerom R a vzdialenosťou stredy r_0 od začiatku zvolenej súradnej sústavy.

3 Elektrostatické pole za prítomnosti vodičov

38. Intenzita elektrického poľa v guľovom kondenzátore podľa obr. R38 (pre $a < r < b$) je

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{a na povrchu vnútornej gule} \quad E(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

Rozdiel potenciálov guľí je

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad \text{z čoho} \quad q = 4\pi\epsilon_0 U \frac{ab}{b-a}$$

takže intenzitu elektrického poľa na povrchu vnútornej gule možno vyjadriť ako

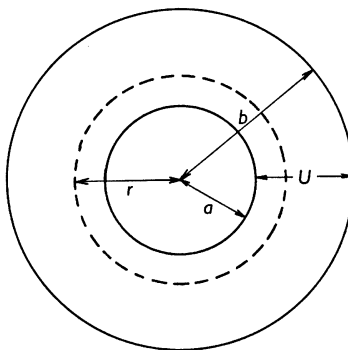
$$E(a) = \frac{bU}{a(b-a)}$$

Intenzita bude mať extrém (v tomto prípade minimum) pre takú hodnotu a , pre ktorú platí

$$\frac{\partial E(a)}{\partial a} = bU \frac{2a - b}{a^2(b - a)^2} = 0$$

odkiaľ pre polomer vnútornej gule s minimálnou intenzitou plynie hodnota $a = b/2$. Kondenzátor bude mať pritom kapacitu

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b - a} = 4\pi\epsilon_0 b$$



Obr. R38

39. Intenzita elektrického poľa v koaxiálnom kábli je

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

a na povrchu vnútorného vodiča s polomerom a

$$E(a) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

kde λ je náboj na jednotku dĺžky vodiča. Napätie na kábli možno vyjadriť ako

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \quad \text{z čoho} \quad \lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 U}{\ln \frac{b}{a}}$$

takže

$$E(a) = \frac{U}{a \ln \frac{b}{a}}$$

Intenzita bude minimálna pre taký polomer vnútorného vodiča a_0 , pre ktorý platí

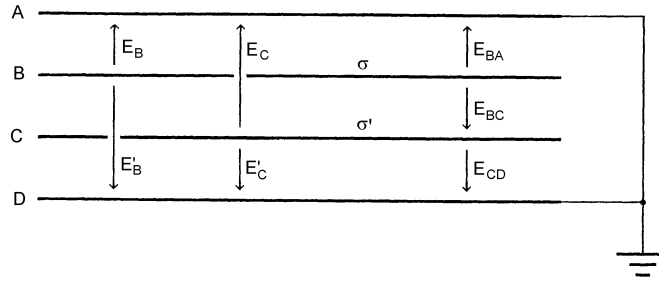
$$\left(\frac{\partial E(a)}{\partial a} \right)_{a=a_0} = U \frac{1 - \ln \frac{b}{a_0}}{a_0^2 \ln^2 \frac{b}{a_0}} = 0$$

z čoho pre polomer vnútorného vodiča plynie hodnota $a_0 = b/e$, kde e je základ prirodzených logaritmov.

40. Roviny B a C sú na potenciáloch

$$V_B = \frac{\sigma}{\epsilon_0} a \qquad V_C = \frac{\sigma}{\epsilon_0} b$$

oproti zemi.



Obr. R41

41. Úlohu možno riešiť napríklad s využitím zákona superpozície. Možno vybrať dosku C a počítať intenzitu elektrického poľa od náboja na doske B . Pre tento prípad platí (pozri obr. R41)

$$E_{BA} = E'_B 2a \qquad \text{a z Gaussovhovho zákona} \qquad E_B + E'_B = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

takže

$$E_B = \frac{2\sigma}{3\epsilon_0} \qquad E'_B = \frac{\sigma}{3\epsilon_0}$$

Podobne, ak sa odstráni doska B , potom intenzity elektrického poľa od nábojov na doske C sú

$$E_C = \frac{\sigma'}{3\epsilon_0} \qquad E'_C = \frac{2\sigma'}{3\epsilon_0}$$

Podľa obr. R41 sú výsledné intenzity

$$E_{BA} = E_B + E_C = \frac{1}{3\epsilon_0} (2\sigma + \sigma') \qquad E_{CD} = E'_B + E'_C = \frac{1}{3\epsilon_0} (\sigma + 2\sigma')$$

$$E_{BC} = E'_B - E_C = \frac{1}{3\epsilon_0} (\sigma - \sigma')$$

Potenciály rovín B a C oproti zemi sú

$$V_B = E_{BA} a = \frac{a}{3\epsilon_0} (2\sigma + \sigma') \qquad V_C = E_{CD} a = \frac{a}{3\epsilon_0} (\sigma + 2\sigma')$$

a napätie medzi rovinami B a C

$$U_{BC} = V_B - V_C = \frac{a}{3\epsilon_0} (\sigma - \sigma')$$

42. Platí (pozri obr. R42)

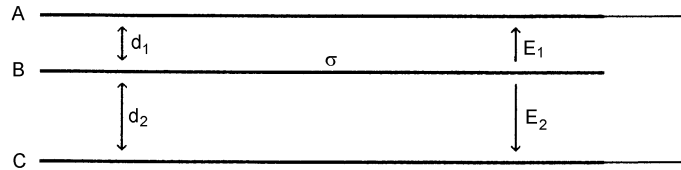
$$E_1 d_1 = E_2 d_2 \qquad E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

z čoho

$$E_1 = \frac{\sigma d_2}{\epsilon_0(d_1 + d_2)} = -\frac{\sigma_A}{\epsilon_0} \qquad E_2 = \frac{\sigma d_1}{\epsilon_0(d_1 + d_2)} = -\frac{\sigma_C}{\epsilon_0}$$

kde σ_A a σ_C sú plošné náboje na rovinách A a C, takže

$$\sigma_A = -\frac{\sigma d_2}{d_1 + d_2} \qquad \sigma_C = -\frac{\sigma d_1}{d_1 + d_2}$$



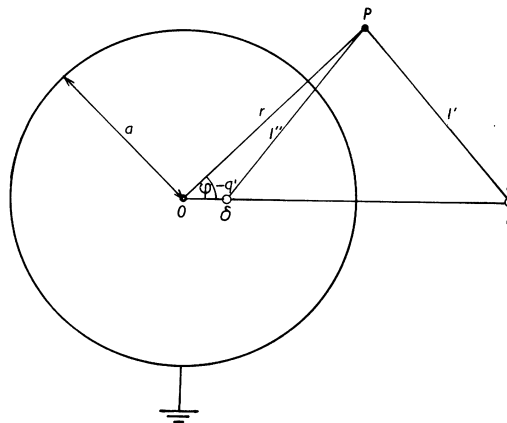
Obr. R42

43. Náboje na rovinách A a B sú

$$q_A = \left(\frac{x}{d} - 1\right)q \qquad q_B = -\frac{x}{d}q$$

44. Použitím podobného postupu ako v predchádzajúcej úlohe dostaneme

$$q_a = -q \frac{a}{r} \frac{b-r}{b-a}; \qquad q_b = -q \frac{b}{r} \frac{r-a}{b-a}$$



Obr. R45

45. Podľa úlohy 37 dva bodové náboje $+Q_1$ a $-Q_2$ budia vo svojom okolí elektrostatické pole s guľovou plochou nulového potenciálu. Polomer tejto plochy a poloha jej stredu je riešením spomínanej úlohy. Elektrostatické pole takejto dvojice z vonkajšej strany guľovej plochy sa nezmení, ak sa plocha nahradí guľovou vodivou uzemnenou plochou, pričom vnútorný náboj sa odstráni, pretože ho nahradí indukovaný náboj na ploche.

Potenciál guľovej uzemnenej plochy a bodového náboja podľa obr. R45 možno teda modelovať dvoma nábojmi – reálnym nábojom $+q$ a "zrkadlovým" nábojom $-q'$, ktorého veľkosť

a uloženie možno určiť pomocou výsledkov úlohy 37 s uvážením označení na obr. R45. Pre polomer guľovej plochy platí

$$a = (l - \delta) \frac{qq'}{q^2 - q'^2}$$

a vzdialenosť δ jej stredu od náboja $-q'$

$$\delta = (l - \delta) \frac{q'^2}{q^2 - q'^2}$$

Riešením posledných dvoch rovníc pre q' a δ dostaneme

$$q' = \frac{a}{l}q \quad \delta = \frac{a^2}{l}$$

a) Potenciál v oblasti $r > a$ (mimo gule) bude superpozíciou potenciálu od nábojov q a $-q'$, teda vzhľadom na obr. R45

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{l'} - \frac{q'}{l''} \right)$$

kde

$$l' = \sqrt{r^2 + l^2 - 2rl \cos \varphi} \quad l'' = \sqrt{r^2 + \delta^2 - 2r\delta \cos \varphi}$$

takže

$$V(r, \varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2rl \cos \varphi}} - \frac{a}{l \sqrt{r^2 + \frac{a^4}{l^2} - 2r \frac{a^2}{l} \cos \varphi}} \right)$$

b) Ak je guľová plocha izolovaná nenabitá, potom k potenciálu vypočítanému v bode a) treba superponovať potenciál bodového náboja $+q_0'$, umiestneného v strede guľovej plochy.

c) Ak je guľová plocha izolovaná a nabitá nábojom q_0 , treba k potenciálu z bodu b) superponovať potenciál bodového náboja q_0 umiestneného v strede gule.

Vo vnútri guľovej plochy je potenciál v prípadoch a) nulový, b)

$$V = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} = \text{konšt.} \quad \text{a v prípade c)} \quad V = \frac{q' + q}{4\pi\epsilon_0 a} = \text{konšt.}$$

46. Podobne ako v úlohe 45 možno nájsť "zrkadlový" náboj q' (z vonkajšej strany guľovej plochy), ktorého veľkosť je $q' = -(a/\delta)q$ a je umiestnený vo vzdialenosti $d = a^2/\delta$ od stredu guľovej plochy. Náboj q bude priťahovaný ku guľovej ploche silou

$$f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(d - \delta)^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a\delta}{(a^2 - \delta^2)^2}$$

ktorá nezávisí od elektrického stavu gule, t. j. či je guľa uzemnená, izolovaná, nabitá alebo nenabitá.

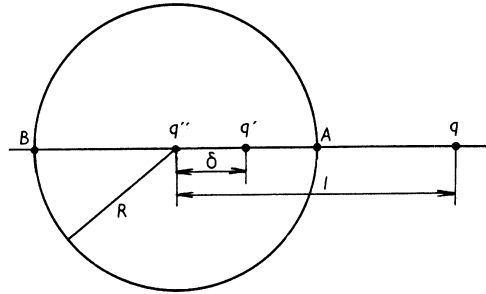
47. Nenabitú kovovú guľu možno podľa úlohy 45 modelovať dvoma nábojmi $q' = -(R/l)q$ a $q'' = -q'$, pričom q'' je umiestnený v strede gule a q' vo vzdialenosti $\delta = R^2/l$ od stredu gule smerom k náboju q (pozri obr. R47). Intenzita týchto troch nábojov v bode A (najbližší k náboju q) je

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(R-l)^2} - \frac{q'}{(R-\delta)^2} - \frac{q''}{R^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3l-R}{l(l-R)^2}$$

a v bode B (najvzdialenejší od náboja q)

$$E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(R+l)^2} + \frac{q'}{(R+\delta)^2} + \frac{q''}{R^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3l+R}{l(l+R)^2}$$

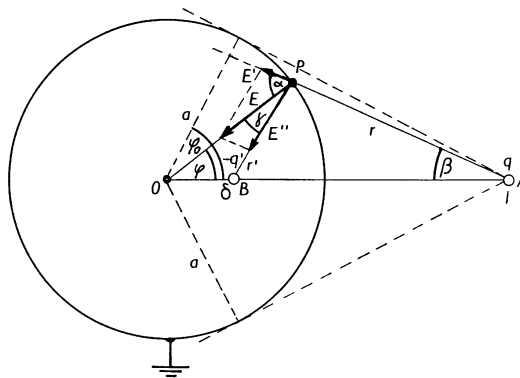
Po dosadení číselných hodnôt dostaneme $E_A = 2\,246,9$ V/m, $E_B = 349,5$ V/m. Intenzity v oboch bodoch smerujú na obr. R47 doľava.



Obr. R47

48. Pri výpočte plošnej hustoty náboja na uzemnenej guli v prítomnosti bodového náboja q možno vychádzať zo skutočnosti, že

a) intenzita elektrického poľa na povrchu guľovej plochy má smer normály (smeruje do vnútra guľovej plochy),



Obr. R48

b) plošná hustota náboja na guli je viazaná s intenzitou poľa podľa Coulombovej vety.

Intenzitu elektrického poľa na povrchu gule možno vypočítať ako priemet intenzít elektrického poľa od náboja q a zrkadlového náboja $-q' = -(a/l)q$ na polomer gule podľa obr. R48. Zavedme označenie $p = a/l$, takže zrkadlový náboj $q' = pq$ a jeho vzdialenosť od stredu guľovej plochy $\delta = pa$. Z obr. R48 ďalej plynie, že

$$r = \sqrt{l^2 + a^2 - 2al \cos \varphi} = l \sqrt{1 + p^2 - 2p \cos \varphi}$$

$$r' = \sqrt{a^2 + \delta^2 - 2a\delta \cos \varphi} = a \sqrt{1 + p^2 - 2p \cos \varphi} = pr$$

Intenzita poľa v bode P na obr. R48 je

$$E = E' \cos \alpha + E'' \cos \gamma$$

kde

$$E' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad E'' = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 pr^2}$$

Ak ďalej uvážime, že

$$\alpha = \beta + \varphi \quad \text{a tiež} \quad \gamma = \beta$$

čo plynie z podobnosti trojuholníkov OAP a OPB , možno dôjsť k výrazu pre intenzitu elektrického poľa na guľovej ploche v tvare

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 la} \frac{1 - p^2}{(1 + p^2 - 2p \cos \varphi)^{3/2}}$$

Podľa Coulombovej vety je na povrchu gule záporný plošný náboj s hustotou

$$\sigma(\varphi) = -\epsilon_0 E = -\frac{q}{4\pi la} \frac{1 - p^2}{(1 + p^2 - 2p \cos \varphi)^{3/2}}$$

Celkový náboj na guli dostaneme integráciou σ po celej guľovej ploche. Ako plošné elementy na guli zvolíme pásiky s plôškami $dS = 2\pi a^2 \sin \varphi d\varphi$. Celkový náboj na guli

$$Q = 2\pi a^2 \int_0^\pi \sigma \sin \varphi d\varphi = -\frac{a}{l} q = -q'$$

Z bodu A vidieť časť guľovej plochy, ktorá je na obr. R48 vymedzená uhlom φ_0 , pre ktorý platí

$$\cos \varphi_0 = \frac{a}{l} = p$$

takže náboj na tejto časti plochy je

$$Q = 2\pi a^2 \int_0^{\varphi_0} \sigma \sin \varphi d\varphi = -\frac{q'}{l} (1 + p - \sqrt{1 - p^2})$$

49. Intenzity a potenciály elektrického poľa sú

$$E = \frac{q + q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad V = \frac{q + q'}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{pre } r > r_3$$

$$E = 0 \quad V = \frac{q + q'}{4\pi\epsilon_0 r_3} \quad \text{pre } r_3 > r > r_2$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{q + q'}{r_3} - \frac{q}{r_2} \right) \quad \text{pre } r_2 > r > r_1$$

$$E = 0 \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} + \frac{q + q'}{r_3} - \frac{q}{r_2} \right) \quad \text{pre } r < r_1$$

Intenzity elektrického poľa majú radiálny smer.

Z Coulombovej vety plynú pre plošné náboje na jednotlivých guľových plochách výrazy

$$\sigma(r_1) = \frac{q}{4\pi r_1^2} \quad \sigma(r_2) = -\frac{q}{4\pi r_2^2} \quad \sigma(r_3) = \frac{q+q'}{4\pi r_3^2}$$

50. a) 10^3 V, b) $f = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{2d^2} = \frac{1}{2} \frac{CU^2}{d} = 0,5$ N

c) $2 \cdot 10^3$ V, d) $5 \cdot 10^{-4}$ J

51. $C_1 = \frac{q(k+1)^2}{U(k-1)}$ $C_2 = \frac{q(k+1)^2}{U(k^2-k)}$

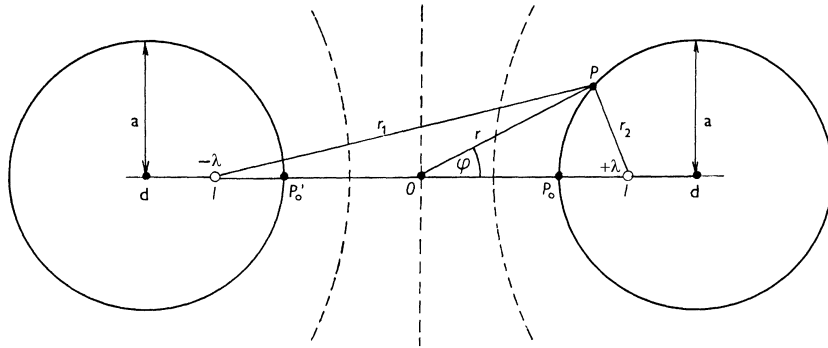
52. $U' = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} U$

$$Q'_1 = C_1 \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} U \quad Q'_2 = C_2 \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} U$$

Po spojení svoriek A a B dochádza k úbytku energie kondenzátora o

$$\Delta W = -2 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U^2$$

v dôsledku tepelných strát vo vodičoch a vyžiarenia elektromagnetického impulzu.



Obr. R53

53. Najprv ukážeme, že ekvipotenciálne plochy dvoch paralelných priamkových nábojov s hustotou $\pm\lambda$ (C/m) umiestnených paralelne vo vzdialenosti $2l$ (pozri obr. R53) sú valcové plochy. Pre potenciál v bode P platí

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2} + \text{konšt.}$$

Na ploche konštantného potenciálu

$$\frac{r_1}{r_2} = \text{konšt.} = k \quad \text{alebo} \quad r_1^2 = k^2 r_2^2$$

Ak do posledného vzťahu s využitím kosínusovej vety dosadíme

$$r_1^2 = r^2 + l^2 + 2rl \cos \varphi \quad \text{a} \quad r_2^2 = r^2 + l^2 - 2rl \cos \varphi$$

po úprave dostaneme rovnicu

$$r^2 + l^2 + 2rl \frac{1+k^2}{1-k^2} \cos \varphi = 0$$

Táto rovnica je rovnicou prierezovej krivky ekvipotenciálnych plôch v polárnych súradniciach – je to rovnica kružnice, ktorej polomer a a vzdialenosť d jej stredu od začiatku 0 na polárnej osi spĺňajú vzťahy

$$d^2 - a^2 = l^2 \quad d = l \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}$$

z čoho

$$a = 2l \frac{k}{k^2 - 1} \quad d = l \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}$$

Ekvipotenciálne plochy sú teda valcové plochy obopínajúce náboje $\pm\lambda$, pričom valcové plochy rovnakého polomeru sú na potenciáloch, ktoré sú v absolútnej hodnote rovnaké a líšia sa znamienkom. Ekvipotenciálne plochy možno nahradiť vodivými valcami a náboje $\pm\lambda$ preniesť na ne – pole v okolí valcov bude také isté ako pole priamkových nábojov umiestnených vo vzájomnej vzdialenosti

$$l = \sqrt{d^2 - a^2}$$

K výpočtu kapacity valcov treba poznať rozdiel ich potenciálov (napätie). Pre ľubovoľný bod P na valci s nábojom $+\lambda$ a symetricky na valci s nábojom $-\lambda$ v bode P' sú potenciály

$$V_{1,2} = \frac{\pm\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2} + \text{konšt.}$$

takže rozdiel potenciálov (napätie) valcov

$$U = V_1 - V_2 = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

Tento výraz platí pre ľubovoľné dva body na valcoch, a preto tieto body možno zvoliť na priesečníkoch spojnice osí valcov s valcovými plochami (body P_0 a P_0' na obr. R53). Tam platí

$$U = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a+l}{a-d+l} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a+\sqrt{d^2-a^2}}{a-d+\sqrt{d^2-a^2}} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{d}{a} + \sqrt{\frac{d^2}{a^2} - 1} \right)$$

takže kapacita na jednotku dĺžky dvojice valcov

$$C' = \frac{\lambda}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \left(\frac{d}{a} + \sqrt{\frac{d^2}{a^2} - 1} \right)} = \frac{\pi\epsilon_0}{\operatorname{argcosh} \frac{d}{a}} \quad [\text{F/m}]$$

V praxi sú polomery a valcov malé oproti vzdialenosti ich osí $2d$, t. j. $d/a \gg 1$. V takých prípadoch

$$\operatorname{argcosh} \frac{d}{a} \approx \ln \frac{2d}{a}$$

a kapacita

$$C' \approx \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{2d}{a}} \quad [\text{F/m}]$$

Posledný výraz udáva kapacitu na jednotku dĺžky technicky dôležitého dvojvodičového symetrického vedenia (známeho tiež pod názvom "dvojlinka"). Spolu s indukčnosťou na jednotku dĺžky udávajú tieto parametre dôležitú elektrotechnickú veličinu vedenia – vlnovú impedanciu (vlnový odpor) vedenia.

54. Potenciál plášťa voči zemi je

$$U_0 = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

55. Napätia na jednotlivých kondenzátoroch sú

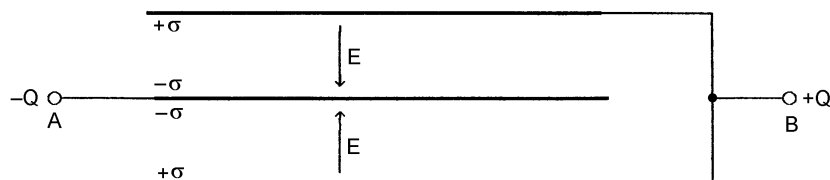
$$U_1' = \frac{C}{C_1} (U_1 + U_2 + U_3) \quad U_2' = \frac{C}{C_2} (U_1 + U_2 + U_3) \quad U_3' = \frac{C}{C_3} (U_1 + U_2 + U_3)$$

kde

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

56. Ak privedieme na svorky A a B náboje $\pm Q$, rozložia sa tieto náboje na doskách tak, ako je to znázornené na obr. R56. Plošné náboje sú $\sigma = Q/(2S)$ a intenzita elektrického poľa $E = \sigma \epsilon_0$. Medzi svorkami A a B je napätie

$$U_{AB} = Eh = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h = \frac{Qh}{2\epsilon_0 S} \quad \text{a kapacita} \quad C_{AB} = \frac{Q}{U_{AB}} = 2 \frac{\epsilon_0 S}{h} = 2C$$



Obr. R56

Uvažovaný systém dosiek predstavuje dva rovnaké kondenzátory s kapacitami $C = \epsilon_0 S/h$ zapojené paralelne.

57. Náboje $\pm Q$ privedené na svorky A a B sa rozložia na doskách tak ako na obr. R57a. Pre plošné hustoty a intenzity platia vzťahy

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma = \frac{Q}{S} \quad E' + E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad 2E'h - Eh = 0$$

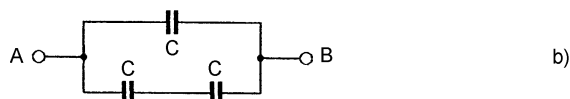
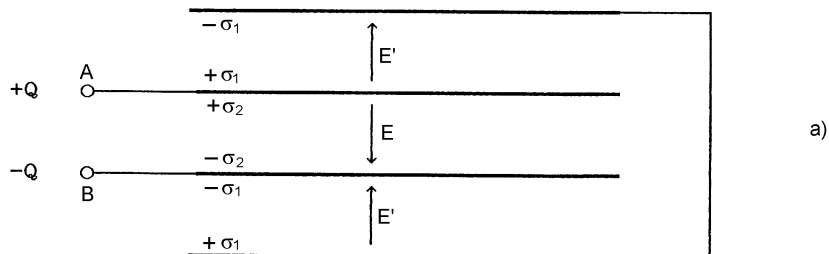
Z týchto rovníc dostaneme intenzitu

$$E = \frac{2}{3} \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{2}{3} \frac{Q}{\epsilon_0 S} \quad \text{a napätie medzi svorkami A a B} \quad U_{AB} = Eh = \frac{2}{3} \frac{Qh}{\epsilon_0 S}$$

z čoho kapacita

$$C_{AB} = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{3 \epsilon_0 S}{2 h} = \frac{3}{2} C$$

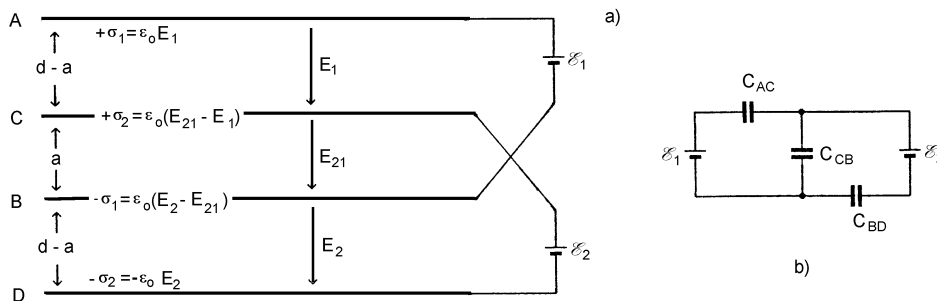
$C = \epsilon_0 S/h$ je kapacita susedných dvoch dosiek. Výsledok možno dostať priamo, ak si uvedomíme, že sústava dosiek predstavuje sériovo-paralelné spojenie troch rovnakých kondenzátorov podľa obr. R57b.



Obr. R57

58. $C_{AB} = 3C$, kde $C = \epsilon_0 S/h$

59. Integráciou napätí po uzavretých dráhach na obr. R59a dostaneme dve rovnice



Obr. R59

$$E_1(d - a) + E_{21}a = \mathcal{E}_1 \qquad E_{21}a + E_2(d - a) = \mathcal{E}_2$$

a z porovnania nábojových hustôt rovníc

$$E_{21} = E_1 + E_2$$

Riešením tohto systému rovníc pre E_{21} dostaneme

$$E_{21} = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{d + a}$$

Napätie medzi doskami C a B je

$$U_{CB} = E_{21}a = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \frac{a}{d+a}$$

Kladná je doska C.

Iný spôsob riešenia plynie zo zapojenia na obr. R59b, ktoré je elektrotechnickou obvodovou náhradou sústavy dosiek a zdrojov na obr. R59a. Hodnoty kapacít kondenzátorov sú

$$C_{AC} = C_{BD} = \frac{\epsilon_0 S}{d-a} \quad a \quad C_{CB} = \frac{\epsilon_0 S}{a}$$

a pre obvod na obr. R59b platia rovnice [pozri výrazy (3.20) a (3.21)]

$$\mathcal{E}_1 = \frac{Q_{AC}}{C_{AC}} + \frac{Q_{CB}}{C_{CB}} \quad \mathcal{E}_2 = \frac{Q_{CB}}{C_{CB}} + \frac{Q_{BD}}{C_{BD}} \quad Q_{AC} - Q_{CB} + Q_{BD} = 0$$

kde Q_{AC} , Q_{CB} , Q_{BD} sú náboje na jednotlivých kondenzátoroch. Riešením týchto rovníc dostaneme napätie U_{CB} na kondenzátore C_{CB} v tvare

$$U_{CB} = \frac{Q_{CB}}{C_{CB}} = \frac{C_{AC}\mathcal{E}_1 + C_{BD}\mathcal{E}_2}{C_{AC} + C_{CB} + C_{BD}} = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \frac{a}{d+a}$$

60. Medzi kapacitami v trojuholníku a vo hviezde platia vzťahy

$$C_2 + \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} = \frac{C'_1 C'_3}{C'_1 + C'_3} \quad C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{C'_2 C'_3}{C'_2 + C'_3}$$

$$C_3 + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C'_1 C'_2}{C'_1 + C'_2}$$

Riešením týchto rovníc pre C'_1 , C'_2 , C'_3 dostaneme

$$C'_1 = \frac{C^2}{C_1} \quad C'_2 = \frac{C^2}{C_2} \quad C'_3 = \frac{C^2}{C_3}$$

kde

$$C^2 = C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3$$

alebo pre C_1 , C_2 , C_3

$$C_1 = \frac{C'_2 C'_3}{C'} \quad C_2 = \frac{C'_1 C'_3}{C'} \quad C_3 = \frac{C'_1 C'_2}{C'}$$

kde

$$C' = C'_1 + C'_2 + C'_3$$

61. Úlohu možno riešiť dvoma spôsobmi:

a) použitím výrazu pre energiu v tvare [pozri výraz (3.32)]

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V d\tau$$

kde τ je objem gule a $d\tau$ je elementárny objem, ktorý v prípade sférickej symetrie rozloženia náboja možno voliť v tvare guľových vrstiev, teda $d\tau = 4\pi r^2 dr$. Ak uvážime, že hustota náboja v guli $\rho = Q/\tau = 3Q/(4\pi a^3)$ a potenciál v guli

$$V(r) = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right)$$

[možno ho vypočítať využitím výrazu (2.88)], potom dosadením do výrazu pre energiu dostaneme

$$W = 2\pi\rho \int_0^a V(r)r^2 dr = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 a}$$

b) z výrazu pre energiu v tvare

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} E^2 d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\tau} E_1^2 d\tau + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty-\tau} E_2^2 d\tau = W_1 + W_2$$

kde $\infty - \tau$ je celý priestor mimo objemu gule. Intenzita elektrického poľa vo vnútri gule

$$E_1 = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad \text{a mimo gule} \quad E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

takže jednotlivé príspevky k energii sú

$$W_1 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a^6} \int_0^a r^4 dr = \frac{Q^2}{40\pi\epsilon_0 a} \quad \text{a} \quad W_2 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Celková energia je znovu

$$W = W_1 + W_2 = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 a}$$

62. Zmena energie jadier po rozpade

$$\Delta W = W - 2W' \quad \text{kde} \quad W = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 a}$$

je energia jadra pred rozpadom (pozri úlohu 61) a

$$W' = \frac{3Q'^2}{20\pi\epsilon_0 a'}$$

je energia každého z jadier s polomerom a' s celkovým nábojom Q' po rozpade, pričom

$$Q' = Q/2 \quad \text{a} \quad a' = a/(2^{1/3})$$

takže

$$\Delta W = W(1 - 2^{-2/3}) = 6,8 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 425 \text{ MeV}$$

Pre hrubý odhad uvoľnenej jadrovej energie budeme predpokladať, že kilogram štiepneho materiálu obsahuje

$$n = \frac{1}{235m_p} = 2,55 \cdot 10^{24} \text{ kg}^{-1}$$

jadier U^{235} . Uvoľnená energia z jedného kilogramu štiepneho materiálu je

$$W_{\text{kg}} = \Delta W n = 1,73 \cdot 10^{14} \text{ J.kg}^{-1}$$

Explozívna energia výbušnín sa udáva v množstve uvoľnenej energie na jednu tonu trinitrotoluénu (1 t TNT), pričom 1 t TNT $\sim 4,2 \cdot 10^9$ J. Uvoľnená jadrová energia na jeden kilogram štiepneho materiálu je

$$W = 41\,254 \text{ t TNT.kg}^{-1} \approx 41 \text{ kiloton TNT.kg}^{-1} !!!$$

Pre porovnanie, táto energia sa rovná tepelnej energii získanej spálením približne 6000 ton kvalitného čierneho uhlia.

63. Intenzita elektrického poľa náboja rovnomerne rozloženého na guli s polomerom a je pre $r \geq a$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

a pre $r \leq a$ sa rovná nule. Energii takéhoto nábojového rozloženia možno vypočítať použitím výrazu

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

integráciou cez celý objem okrem objemu gule, v ktorom je intenzita poľa nulová. Ak zvolíme objemové elementy $d\tau = 4\pi r^2 dr$ potom

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

z čoho pre polomer gule plynie

$$a = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 W}$$

Dosadením číselných hodnôt dostaneme pre polomer π -mezónu hodnotu $a = 1,56 \cdot 10^{-16}$ m.

64. Energia molekuly (na jeden ión) je

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-2\frac{e^2}{a} + 2\frac{e^2}{2a} - 2\frac{e^2}{3a} + \dots \right) = -\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) = -\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a} \ln 2$$

Energia je záporná, čo znamená, že na rozloženie molekuly na ióny treba vynaložiť prácu.

4 Elektrostatické pole v dielektriku

65. Uhol φ sa nezmení, ak hustota kvapaliny bude

$$\rho = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \rho_0$$

kde $\rho_0 = 3m/(4\pi R^3)$ je hustota materiálu guľôčok.

66. Ak sa na guľové plochy privedú náboje $\pm Q$, potom napätie medzi nimi bude

$$U = \int_{R_1}^{R_1+h} E_1 dr + \int_{R_1+h}^{R_2} E_2 dr$$

kde $E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}r^2}$ a $E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}r^2}$

sú intenzity elektrického poľa v dielektrikách s permitivitami ϵ_{r1} a ϵ_{r2} . Integráciou dostaneme pre napätie výraz

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\epsilon_{r1}R_1} - \frac{1}{\epsilon_{r2}R_2} - \frac{1}{R_1+h} \left(\frac{1}{\epsilon_{r1}} - \frac{1}{\epsilon_{r1}} \right) \right]$$

a pre kapacitu

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}R_1R_2(R_1+h)}{\epsilon_{r1}(R_2-R_1)R_1 + (\epsilon_{r2}R_2 - \epsilon_{r1}R_1)h}$$

67. Ak sa na doskách nachádzajú náboje $\pm Q$, potom na kondenzátore je napätie

$$U = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \left(\frac{h}{\epsilon_{r1}} + \frac{d-h}{\epsilon_{r2}} \right) = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} S} [\epsilon_{r1}d + (\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1})h]$$

a kapacita kondenzátora

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} S}{\epsilon_{r1}d + (\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1})h}$$

68. Ak je na kondenzátore náboj $\pm Q$, potom je na ňom napätie

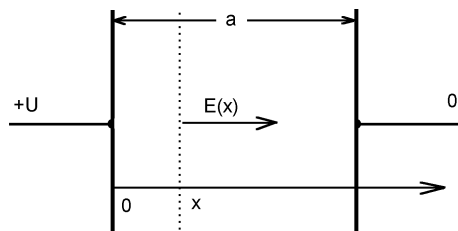
$$U = \frac{Q}{S} \int_0^a \frac{dx}{\epsilon(x)} = \frac{Qa}{\epsilon_0 S} \int_0^a \frac{dx}{x+a} = \frac{Qa}{\epsilon_0 S} \ln 2$$

z čoho kapacita

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{a \ln 2}$$

Intenzita elektrického poľa vo vzdialenosti x od kladnej elektródy (pozri obr. R68)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon(x)} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0(x+a)} \quad \text{a polarizácia} \quad P(x) = (\epsilon - \epsilon_0)E = \sigma \frac{x}{x+a}$$



Obr. R68

kde

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{CU}{S} = \frac{\epsilon_0 U}{a \ln 2}$$

(vektor polarizácie smeruje doprava). Pre hustoty plošných viazaných nábojov dostávame výrazy

$$\sigma_v(0) = P(0) = 0 \quad \sigma_v(a) = P(a) = \sigma/2$$

Priestorová hustota viazaného náboja v dielektriku je

$$\rho_v(x) = -\text{div } \mathbf{P} = -\frac{dP}{dx} = -\sigma \frac{a}{(x+a)^2}$$

Pri kladnej doske sa teda plošná hustota viazaného náboja rovná nule a pri zápornej je $\sigma_v(a) = -\sigma/2 = -\epsilon_0 U / (2a \ln 2)$. Priestorový viazaný náboj v dielektriku je záporný a jeho celková hodnota je

$$Q_v = S \int_0^a \rho_v dx = -\sigma S/2$$

Je to náboj, ktorý kompenzuje kladný viazaný plošný náboj $\sigma S/2$ na povrchu dielektrika pri zápornej elektróde.

69. a) Pretože pole vektorov D a E v priestore ohraničenom guľovými plochami je radiálne, možno zvoliť guľovú Gaussovú plochu s polomerom $a < r < b$, na ktorej platí $(D_1 + D_2)2\pi r^2 = Q$, kde D_1 je elektrická indukcia vo vákuovej časti objemu a D_2 v časti s dielektrikom. Na rozhraní vákuum-dielektrikum platí hraničná podmienka $D_1/\epsilon_0 = D_2/\epsilon$. Z posledných dvoch výrazov plynie, že

$$D_1 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon} \frac{Q}{2\pi r^2} \quad D_2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon} \frac{Q}{2\pi r^2}$$

b) Pre intenzity elektrického poľa platí

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_0} \quad E_2 = \frac{D_2}{\epsilon}$$

takže

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{\epsilon_0 + \epsilon} \frac{Q}{2\pi r^2}$$

c) Na vnútornej guľovej ploche v časti kde je vákuum bude rozložený plošný náboj s hustotou

$$\sigma_1 = \epsilon_0 E_1 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon} \frac{Q}{2\pi a^2} = D_1(a) \quad \text{a v časti s dielektrikom} \quad \sigma_2 = \epsilon E_2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon} \frac{Q}{2\pi a^2} = D_2(a)$$

Na vonkajšej guľovej ploche budú náboje s hustotami $\sigma' = -D_1(b)$ vo vákuu a $\sigma' = -D_2(b)$ v dielektriku.

d) Na vnútornej ploche dielektrika bude viazaný náboj

$$\sigma_v = -P(a) = -(\epsilon - \epsilon_0)E(a) = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \frac{Q}{2\pi a^2}$$

a na vonkajšej ploche

$$\sigma_v = P(b) = (\epsilon - \epsilon_0)E(b) = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \frac{Q}{2\pi b^2}$$

Priestorový viazaný náboj v dielektriku nie je.

e) Napätie medzi guľovými plochami

$$U = \int_a^b E dr = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_0 + \epsilon)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad \text{a kapacita} \quad C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi(\epsilon_0 + \epsilon)ab}{b-a}$$

70. Pole v kondenzátore je radiálne, a tak možno zvoliť guľovú Gaussovú plochu s polomerom $a < r < b$, na ktorej platí

$$Q = \epsilon_0 \Omega r^2 E + (4\pi - \Omega) \epsilon_0 r^2 E$$

z čoho intenzita elektrického poľa je

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 + \Omega(\epsilon - \epsilon_0)} \frac{1}{r^2}$$

Napätie na kondenzátore

$$U = \int_a^b E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 + \Omega(\epsilon - \epsilon_0)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

a jeho kapacita

$$C = \frac{Q}{U} = [4\pi\epsilon_0 + \Omega(\epsilon - \epsilon_0)] \frac{ab}{b-a}$$

71. Pole v kondenzátore je centrálné symetrické, takže pri výpočte elektrickej indukcie v kondenzátore možno zvoliť guľovú Gaussovu plochu, na ktorej elektrická indukcia

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Intenzita elektrického poľa v kondenzátore

$$E = \frac{D}{\epsilon(r)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \quad \text{a napätie} \quad U = \int_a^b E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} (a-b)$$

takže kapacita kondenzátora

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0 a^2}{a-b}$$

72. a) Na vnútornej ploche dielektrika je plošná hustota viazaného náboja

$$\sigma_v(R) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi R^2} \quad \text{a na vonkajšej ploche} \quad \sigma_v(R+h) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi(R+h)^2}$$

b) Priestorový náboj v dielektriku nie je.

c) Celkový viazaný náboj v dielektriku

$$Q_v(R+h) = \sigma_v(R+h) 4\pi(R+h)^2 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} Q = -Q_v(R)$$

d) Vo vnútri vodivej gule je $D = 0$, $E = 0$ aj $P = 0$. V dielektriku, t. j. pre $R < r < R+h$ je

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \quad P = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi r^2}$$

a vo vonkajšom priestore ($r > R+h$)

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad P = 0$$

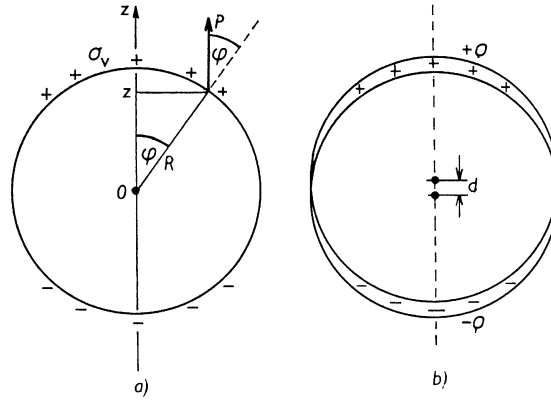
Všetky vektory poľa majú radiálny smer.

73. Homogénne polarizovaná guľa (pozri obr. R73a) má na svojom povrchu viazaný plošný náboj s hustotou, ktorá závisí od uhla φ podľa vzťahu

$$\sigma_v = P \cos \varphi$$

Takéto rozloženie náboja možno modelovať dvoma rovnomerne nabitými guľami, s konštantnými objemovými hustotami náboja $\pm\rho$. Gule sú preložené cez seba tak, že ich stredy sú posunuté o malú vzdialenosť d podľa obr. R73b. Keďže každá guľa vytvára v svojom okolí potenciál rovný

potenciálu celkového náboja gule koncentrovaného do jej stredu, možno gule (z hľadiska ich vonkajšieho potenciálu) nahraďiť bodovými nábojmi umiestnenými vo vzdialenosti d . Výsledné pole v okolí gule je teda poľom elektrického dipólu, ktorého moment treba určiť zo známej polarizácie gule. Ak koncentrácia elementárnych dipólov v guli je n a moment jedného dipólu je $p_0 = q_0 d$, potom polarizácia



Obr. R73

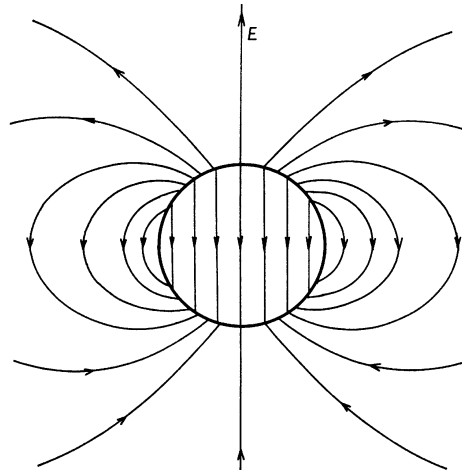
$$P = np_0 = nq_0 d = \rho d$$

kde ρ je objemová hustota nábojov v guli. Každá guľa má celkový náboj s absolútnou hodnotou

$$Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{P}{d}$$

a celkový dipólový moment polarizovanej gule je

$$p = Qd = \frac{4}{3} \pi R^3 P$$



Obr. R73c

Potenciál v okolí takého dipólu (teda v okolí polarizovanej gule)

$$V = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{R^3}{3\epsilon_0 r^3} \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}$$

Na povrchu gule je potenciál

$$V = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}}{3\epsilon_0} = \frac{PR \cos \varphi}{3\epsilon_0} = \frac{Pz}{3\epsilon_0}$$

Vo vnútri gule $V = Pz/(3\epsilon_0)$ a závisí iba od vzdialenosti z od stredu gule v smere jej polarizácie. Intenzita elektrického poľa vo vnútri gule je konštantná a antiparalelná s osou z . Je daná výrazom

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dz} \mathbf{e}_z = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

kde \mathbf{e}_z je jednotkový vektor v smere osi z . V okolí gule je intenzita elektrického poľa intenzitou elektrického dipólu s momentom $4\pi R^3 \mathbf{P}/3$. Siločiar elektrického poľa rovnomerne polarizovanej gule sú znázornené na obr. R73c.

74. a) Elektrické pole vo vnútri gule \mathbf{E}_v je superpozíciou poľa \mathbf{E}_0 a poľa \mathbf{E}_p , ktoré je od polarizácie gule, teda

$$\mathbf{E}_v = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p$$

Vektor polarizácie v guli je daný výrazom

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}_v \quad \text{a} \quad \mathbf{E}_p = \frac{-\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

čo plynie z predchádzajúcej úlohy. Z posledných troch rovníc plynie, že

$$\mathbf{E}_v = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_0 \quad \text{a polarizácia} \quad \mathbf{P} = \frac{3\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_0$$

Potenciál na povrchu gule a v jej vnútri

$$V = \frac{-3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} = \frac{-3}{\epsilon_r + 2} E_0 z$$

b) Vo vonkajšom priestore je potenciál superpozíciou potenciálu homogénneho elektrického poľa intenzity \mathbf{E}_0 , teda $V_0 = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$ a potenciálu od polarizovanej gule V_g . Potenciál od polarizovanej gule je potenciál dipólu, a teda podľa predchádzajúcej úlohy

$$V_g = \frac{R^3 \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{3\epsilon_0 r^3} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{R^3}{r^3} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$$

takže výsledný potenciál v okolí gule

$$V_{\text{vonk}} = V_0 + V_g = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{R^3}{r^3} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$$

Intenzita vonkajšieho elektrického poľa

$$\mathbf{E}_{\text{vonk}} = -\text{grad}V_0 - \text{grad}V_g = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_g$$

kde \mathbf{E}_g je intenzita poľa od polarizovanej gule. Ide o superpozíciu homogénneho poľa \mathbf{E}_0 a poľa \mathbf{E}_g , ktoré má charakter poľa dipólu.

75. Limitným prechodom $\epsilon_r \rightarrow \infty$ vo výraze pre potenciál v okolí dielektrickej gule v predchádzajúcej úlohe plynie

$$V_{vonk} = -E_0 \cdot r + \frac{R^3}{r^3} E_0 \cdot r$$

Na povrchu gule ($r = R$) a v jej vnútri je potenciál konštantný (nulový).

76. Pole je centrálné symetrické, možno teda zvolit' guľovú Gaussovu plochu s polomerom r , na ktorej platí

$$(D_1 + D_2)2\pi r^2 = Q$$

Na rozhraní platí $D_1/\epsilon_1 = D_2/\epsilon_2$, takže

$$D_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{Q}{2\pi r^2} \quad D_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{Q}{2\pi r^2}$$

Elektrické pole a potenciál

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{Q}{2\pi r^2} \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{Q}{2\pi r}$$

77. $\epsilon_r = 2,66$

$$78. W = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S U^2}{2d} (\epsilon_r - 1) = \frac{C U^2}{2} (\epsilon_r - 1)$$

79. Označme: $r_1 = 1$ cm – polomer vnútorného vodiča, $r_2 = 5$ cm – polomer plášťa, r_0 – polomer rozhrania medzi dielektrikami. Pretože intenzita elektrického poľa v okolí valcového vodiča s dĺžkovým nábojom je

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon r}$$

bude elektrické pole maximálne na vnútorných plochách dielektrík.

a) Bude teda platiť

$$E_{max1} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} r_1} \quad E_{max2} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} r_0}$$

z čoho pre polomer rozhrania plynie

$$r_0 = \frac{E_{max1} \epsilon_{r1}}{E_{max2} \epsilon_{r2}} r_1 = 3 \text{ cm}$$

b) Maximálne povolené napätie na kábli je

$$U_{max} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2}} \ln \frac{r_2}{r_0} + \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1}} \ln \frac{r_0}{r_1} = r_0 E_{max2} \ln \frac{r_2}{r_0} + r_1 E_{max1} \ln \frac{r_0}{r_1} = 127,2 \text{ kV}$$

c) Kapacita kábla

$$C = \frac{\lambda}{U} = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r2} \ln \frac{r_0}{r_1} + \epsilon_{r1} \ln \frac{r_2}{r_0}} = 157 \text{ pF/m}$$

d) Maximálna energia v kábli

$$W = \frac{C U_{max}^2}{2} = 1,27 \text{ J/m}$$

80. Maximálna hustota energie nahromadenej v dielektriku

$$w = \frac{\epsilon E_{max}^2}{2} = 10^3 \text{ J/m}^3$$

a množstvo energie na kilogram dielektrika

$$w' = \frac{w}{10^3} = 1 \text{ J/kg}$$

Pre olovené akumulátory je $w' = (36 - 144) \cdot 10^3 \text{ J/kg}$ a pre Ni-Cd akumulátory $w' = (108 \text{ až } 180) \cdot 10^3 \text{ J/kg}$ (Svět motorů, 21/75). Vidieť, že energia nahromadená v kilograme akumulátorov je oveľa (o päť rádov) väčšia ako energia, ktorú možno uskladniť v ekvivalentnej hmotnosti dielektrika.

81. a) Na dosky pôsobia príťažlivé sily

$$f = C_0 \frac{U^2}{2a} = f_0$$

C_0 je kapacita kondenzátora bez dielektrika.

b) Intenzita elektrického poľa v kondenzátore naplnenom dielektrikom je ϵ_r -krát menšia ako v kondenzátore bez dielektrika, a preto aj sila bude ϵ_r -krát menšia, teda $f = f_0/\epsilon_r$.

c) Intenzita elektrického poľa v štrbine medzi doskou a dielektrikom je taká istá ako v kondenzátore bez dielektrika, preto aj sila bude rovnaká ako v prípade a), teda $f = f_0$.

d) Na kondenzátor pritečie ϵ_r -krát väčší náboj ako v prípade a) a sila bude $f = \epsilon_r f_0$.

e) Na kondenzátor pritečie ϵ_r -krát väčší náboj ako v prípade a) a intenzita elektrického poľa v štrbine bude tiež ϵ_r -krát väčšia, teda sila $f = \epsilon_r^2 f_0$

82. a) Kapacita kondenzátora bez dielektrika

$$C_0 \approx \frac{2\pi\epsilon_0 Rl}{d} \quad \text{a s dielektrikom} \quad C \approx \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r Rl}{d} = \epsilon_r C_0$$

b) $W_0 = \frac{1}{2} C_0 U^2$

c) Kapacita kondenzátora s rúrkou zasunutou do hĺbky x

$$C(x) = C_0 \left[\frac{x}{l} (\epsilon_r - 1) + 1 \right]$$

a jeho energia

$$W(x) = \frac{1}{2} C(x) U^2 = \frac{1}{2} C_0 \left[\frac{x}{l} (\epsilon_r - 1) + 1 \right] U^2$$

Sila pôsobiaca na dielektrikum

$$f_x = -\frac{dW}{dx} = -\frac{1}{2} C_0 \frac{\epsilon_r - 1}{l} U^2$$

Sila smeruje do kondenzátora (kondenzátor "nasáva" dielektrikum). Celková práca

$$A_1 = f_x l = -\frac{1}{2} C_0 (\epsilon_r - 1) U^2 = -W_0 (\epsilon_r - 1)$$

Túto prácu vykonáva zdroj tým, že nabíja kondenzátor.

$$d) \quad W_1 = \varepsilon_r \frac{C_0 U^2}{2} = \varepsilon_r W_0 = W_0 + |A_1|$$

e) V tomto stave je na kondenzátore náboj $Q = \varepsilon_r C_0 U$ a energia kondenzátora s povytiahnutým dielektrikom je

$$W_2(x) = \frac{Q^2}{2C(x)} = \frac{Q^2}{2} \frac{1}{C_0 \left[\frac{x}{l} (\varepsilon_r - 1) + 1 \right]} = \varepsilon_r^2 W_0 \frac{l}{(\varepsilon_r - 1)x + l}$$

$$\text{Sila} \quad f_x = -\frac{dW_2}{dx} = -\varepsilon_r^2 W_0 \frac{(\varepsilon_r - 1)l}{(\varepsilon_r - 1)x + l} \quad \text{a práca} \quad A_2 = \int_l^0 f_x dx = \varepsilon_r (\varepsilon_r - 1) W_0 = \varepsilon_r |A_1|$$

Túto prácu konajú vonkajšie neelektrické sily.

f) Energia kondenzátora bez dielektrika

$$W_2 = \frac{Q^2}{2C_0} = \varepsilon_r^2 W_0 = \varepsilon_r W_1 = \varepsilon_r (W_0 + |A_1|) = W_1 + A_2$$

V celom cykle b) až f) sa energia kondenzátora zvýši ε_r^2 -krát.

83. Kapacita valcového kondenzátora bez dielektrika

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{b}{a}} \quad \text{a jeho energia} \quad W = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{b}{a}} U^2$$

Ak kvapalina medzi valcami vystúpi o dl , vzrastie energia kondenzátora o

$$dW = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} (\varepsilon_r - 1) U^2 dl$$

a sila, ktorou je dielektrikum (kvapalina) vťahované do kondenzátora

$$f_e = \frac{dW}{dl} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} (\varepsilon_r - 1) U^2$$

Na stĺpec kvapaliny výšky h pôsobí gravitačná sila

$$f_g = mg = \pi\rho(b^2 - a^2)hg$$

Kvapalina v kondenzátore vystúpi do výšky h , pri ktorej $f_g = f_e$, z čoho pre h plynie

$$h = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) U^2}{\rho g (b^2 - a^2) \ln \frac{b}{a}}$$

$$\mathbf{84.} \quad h = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) U^2}{2d^2 \rho g}$$

85. Pri vsunutí dielektrika medzi dosky kondenzátora o dl zvýši sa jeho energia o

$$dW = \frac{\varepsilon_0 a U^2 dl}{2d} (\varepsilon_r - 1)$$

Sila, ktorou je dielektrikum vťahované medzi dosky má veľkosť

$$f = \frac{dW}{dl} = \frac{\epsilon_0 a U^2}{2d} (\epsilon_r - 1)$$

86. a) $C = 177$ pF,

b) $Q = CU = 1,06 \cdot 10^{-7}$ C = $Q_1 + Q_2$, kde $Q_1 = 2,66 \cdot 10^{-8}$ C v časti so vzduchovým dielektrikom a $Q_2 = 7,96 \cdot 10^{-8}$ C v časti so skleneným dielektrikom,

c) $W = 3,17 \cdot 10^{-5}$ J.

87. Podobným postupom ako pri riešení úlohy 73 dostaneme pre potenciál v okolí valca výraz

$$V(r) = \frac{R^2}{2\epsilon_0 r^2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}$$

kde \mathbf{r} je polohový vektor so začiatkom na osi valca a kolmý na ňu. Vo vnútri valca

$$V = \frac{Pz}{2\epsilon_0}$$

Intenzita elektrického poľa vo vnútri valca

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{2\epsilon_0}$$

V okolí valca je intenzita elektrického poľa intenzitou priamkového dipólu (pozri úlohu 25) s momentom

$$\mathbf{p}' = \pi R^2 \mathbf{P}$$

88. Analogicky ako v úlohe 74 intenzita elektrického poľa \mathbf{E}_v vo vnútri valca je vektorovým súčtom intenzity \mathbf{E} a intenzity \mathbf{E}_p od polarizácie valca \mathbf{P} , teda $\mathbf{E}_v = \mathbf{E} + \mathbf{E}_p$, kde

$$\mathbf{E}_p = -\frac{\mathbf{P}}{2\epsilon_0} \quad \text{a} \quad \mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}_v$$

Z týchto výrazov dostaneme

$$\mathbf{E}_v = \frac{2}{\epsilon_r + 1} \mathbf{E} \quad \text{a} \quad \mathbf{P} = \frac{2\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 1} \mathbf{E}$$

Potenciál na povrchu valca a v jeho vnútri

$$V = -\frac{2}{\epsilon_r + 1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = -\frac{2}{\epsilon_r + 1} Ez$$

Vo vonkajšom priestore ($r > R$) je potenciál superpozíciou potenciálu intenzity poľa \mathbf{E} , teda potenciálu $V_0 = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$ a potenciálu V_v polarizovaného valca s polarizáciou \mathbf{P} . Podľa predchádzajúcej úlohy

$$V_v = \frac{R^2}{2\epsilon_0 r^2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{r} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \frac{R^2}{r^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$$

Výsledný potenciál v okolí valca

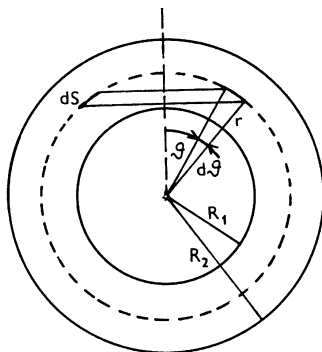
$$V_{vonk} = V_0 + V_v = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \frac{R^2}{r^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$$

Intenzita vonkajšieho elektrického poľa je gradientom uvedeného potenciálu.

89. Limitným prechodom $\varepsilon_r \rightarrow \infty$ vo výraze pre potenciál v okolí dielektrického valca z predchádzajúcej úlohy dostaneme

$$V_{vonk} = -E r + \frac{R^2}{r^2} E r = -\frac{r^2 - R^2}{r^2} E r$$

Na povrchu valca ($r = R$) a v jeho vnútri $V = 0$.



Obr. R90

90. Zvolíme si guľovú plochu s polomerom r ($R_1 < r < R_2$) a na nej pásik podľa obr. R90, ktorého plocha $dS = 2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta$. Vypočítame tok vektora \mathbf{D} zvolenou guľovou plochou, ak je na kondenzátore náboj Q :

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= Q = E \oint_S \varepsilon dS = 2\pi r^2 E \int_0^\pi (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= -2\pi r^2 E \int_{+1}^{-1} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos^2 \vartheta) d(\cos \vartheta) = \frac{4\pi(3\varepsilon_0 + \varepsilon_1)r^2 E}{3} \end{aligned}$$

z čoho intenzita poľa

$$E = \frac{3Q}{4\pi(3\varepsilon_0 + \varepsilon_1)r^2}$$

Napätie na kondenzátore

$$U = -\int_{R_2}^{R_1} E dr = \frac{3Q}{4\pi(3\varepsilon_0 + \varepsilon_1)} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \quad \text{a jeho kapacita} \quad C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi(3\varepsilon_0 + \varepsilon_1)R_1 R_2}{3(R_2 - R_1)}$$

91. Predovšetkým vypočítame kapacitu kondenzátora ako funkciu uhla α podľa obr. 91. Táto kapacita je

$$C(\alpha) = [\varepsilon_0 \alpha + \varepsilon(\pi - \alpha)] \frac{R^2}{2h}$$

Ak je na kondenzátore napätie U , potom jeho energia je

$$W(\alpha) = \frac{1}{2} C(\alpha) U^2 = [\varepsilon_0 \alpha + \varepsilon(\pi - \alpha)] \frac{R^2 U^2}{4h}$$

Moment sily pôsobiacej na dielektrickú platňu je

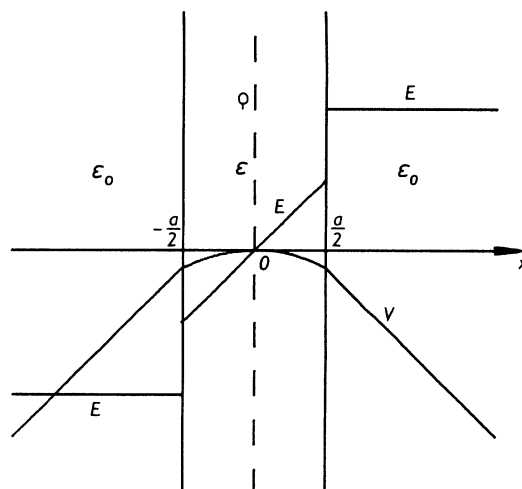
$$M = \frac{dW}{d\alpha} = -(\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{R^2 U^2}{4h}$$

Moment má taký smer, že sa snaží vtiahnuť dielektrikum do kondenzátora a nezávisí od uhla α . Avšak pre $\alpha = 0$, je $M = 0$, pretože v tomto prípade posledný výraz neplatí (pozri tiež úvahy v odseku 4.7)

$$92. \quad D = \frac{q}{4\pi r^2} \quad E = \frac{q}{4\pi \alpha r} \quad P = \frac{q}{4\pi r^2} - \frac{\varepsilon_0 q}{4\pi \alpha r}$$

$$\rho_v = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P) = \frac{\varepsilon_0 q}{4\pi \alpha r^2}$$

Všetky vektory majú radiálny smer.



Obr. R93

93. a) Nech os x smeruje kolmo na vrstvu, pričom $x = 0$ v strede vrstvy. Potom:

$$\begin{aligned} \text{– pre } |x| < a/2 \quad \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon} x \mathbf{i} & V &= -\frac{\rho}{2\varepsilon} x^2 \\ \text{– pre } |x| > a/2 \quad \mathbf{E} &= \frac{\rho a}{2\varepsilon_0} \frac{x}{|x|} \mathbf{i} & V &= -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0} |x| + \frac{\rho a^2}{8} \left(\frac{2}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

kde \mathbf{i} je jednotkový vektor v smere osi x . Grafické závislosti E a V od x sú znázornené na obr. R93.

b) Vektor polarizácie pre $|x| < a/2$

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{\rho}{\varepsilon} x \mathbf{i}$$

a pre $|x| > a/2$ je $\mathbf{P} = 0$. Na povrchu vrstvy sú viazané plošné náboje

$$\sigma_v = |\mathbf{P}(a/2)| = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \rho \frac{a}{2}$$

a vo vnútri vrstvy je konštantný viazaný objemový náboj

$$\rho_v = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \rho$$

94. a) Ak je náboj rozložený na vnútornej ploche dielektrickej guľovej vrstvy, potom
– pre $r < a$

$$E = 0 \quad V = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon a} + \left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{1}{b} \right]$$

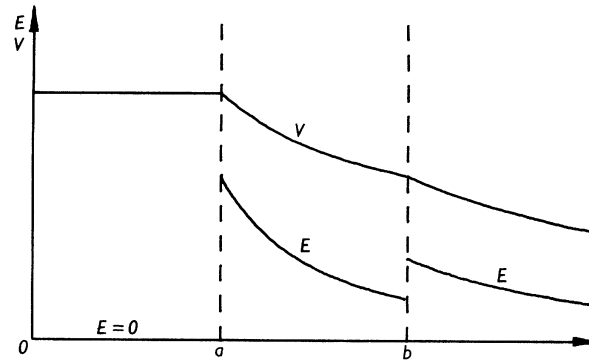
– pre $a < r < b$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \quad V = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon r} + \left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{1}{b} \right]$$

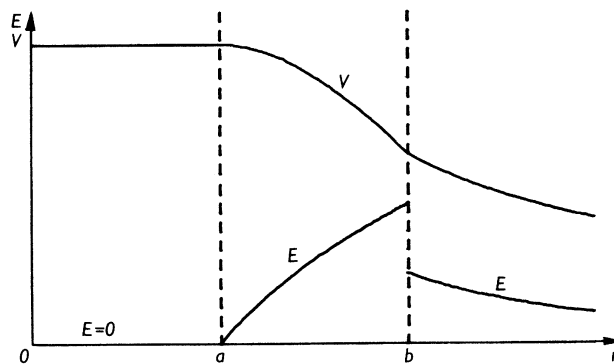
– pre $r > b$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Grafy závislostí E a V od r sú znázornené na obr. R94a.



Obr. R94a



Obr. R94b

b) Ak je náboj rozložený rovnomerne v objeme dielektrika, potom
– pre $r < a$

$$E = 0 \quad V = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{2\epsilon(b^3 - a^3)} \left(\frac{b^3 + 2a^3}{b} - 3a^2 \right) \right]$$

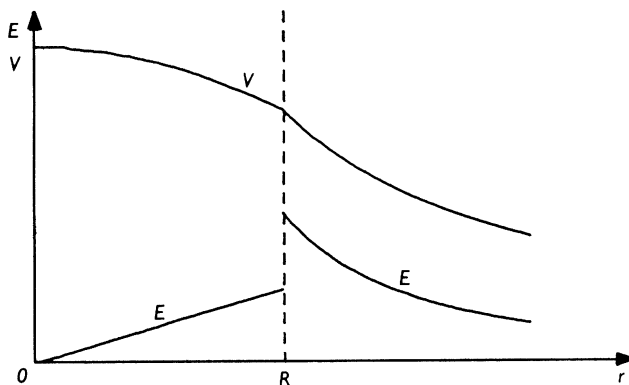
– pre $a < r < b$

$$E = \frac{Q(r^3 - a^3)}{4\pi\epsilon(b^3 - a^3)r^2} \quad V = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{2\epsilon(b^3 - a^3)} \left(\frac{b^3 + 2a^3}{b} - \frac{r^3 + 2a^3}{r} \right) \right]$$

– pre $r > b$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Grafy závislostí E a V od r sú znázornené na obr. R94b.



Obr. R95

95. Intenzita elektrického poľa E a potenciál V pre $r < R$ sú

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3} \quad V = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_0 R} + \frac{1}{2\epsilon R} - \frac{r^2}{2\epsilon R^3} \right)$$

Pre $r > R$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Grafické závislosti E a V od r sú na obr. R95. Na povrchu gule je viazaný plošný náboj $\sigma_v = Q/(4\pi R^2)$, objemový viazaný náboj je nulový ($\rho_v = -\text{div}\mathbf{P} = 0$).

96. Na rozhraní platí pre normálovú zložku vektora elektrickej indukcie (pozri obr. R96) $D_{n1} = D_{n2}$, alebo $\epsilon_{r1}E_{n1} = \epsilon_{r2}E_{n2}$. Normálové zložky elektrických polí E_{n1} a E_{n2} sú superpozíciami normálových zložiek poľa bodového náboja a poľa $\sigma_v/2\epsilon_0$ od viazaných nábojov na rozhraní. Platí teda

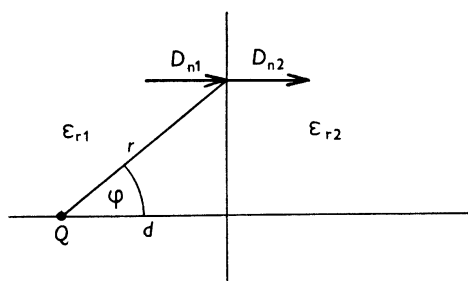
$$\epsilon_{r1} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}} \frac{Q}{r^2} \cos\varphi - \frac{\sigma_v}{2\epsilon_0} \right) = \epsilon_{r2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}} \frac{Q}{r^2} \cos\varphi + \frac{\sigma_v}{2\epsilon_0} \right)$$

Ak uvážime, že $\cos\varphi = d/r$, dostaneme výraz pre plošný viazaný náboj

$$\sigma_v = \frac{1}{\varepsilon_{r1} \varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}} \frac{Qd}{2\pi r^3}$$

Ak $d = 0$, potom $\sigma_v = 0$. Ak sa náboj Q nachádza na rozhraní, potom viazané náboje na rozhraní nie sú. Integráciou σ_v po celom nekonečnom rozhraní dostaneme celkový viazaný náboj

$$Q_v = \frac{1}{\varepsilon_{r1} \varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}} Q$$



Obr. R96

5 Elektrický prúd

97. a) $J = 1,27 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$, $v = 9,36 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$; b) $E = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$;

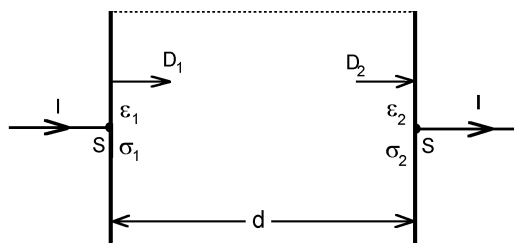
c) $Q = 20 \text{ C}$, $n = 1,25 \cdot 10^{20}$ elektrónov; d) $U = 2,2 \text{ V}$

98. $I = 20 \text{ mA}$

99. a) $I = 0,90 \text{ A}$; b) $n = 1,35 \cdot 10^{20}$ iónov, $m = 5,19 \text{ mg}$

100. Ak kondenzátorom tečie prúd I , potom intenzita elektrického poľa v dielektriku kondenzátora je $E = I/(\sigma S)$ a elektrická indukcia $D = \varepsilon I/(\sigma S)$, kde

$$\sigma(x) = \sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{d} x \quad \varepsilon(x) = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x$$



Obr. R100

Celkový náboj v objeme dielektrika kondenzátora vypočítame integráciou vektora D po povrchu dielektrika (obr. R100)

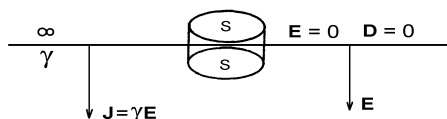
$$Q = \oint D dS = (D_2 - D_1)S = \left(\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) I = \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_{r2}}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_{r1}}{\sigma_1} \right) I = -19,5 \cdot 10^{-12} \text{ C}$$

Ak sa zmení smer prúdu, zmení sa aj znamienko náboja. Odpor kondenzátora

$$R = \int_0^d \frac{dx}{\sigma S} = \frac{d}{S(\sigma_2 - \sigma_1)} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 8 \cdot 10^6 \text{ } \Omega$$

Výkon spotrebovaný v kondenzátore

$$P = RI^2 = 8 \cdot 10^{-8} \text{ W}$$



Obr. R101

101. Ak zvolíme na rozhraní Gaussovu plochu v tvare valca podľa obr. R101, potom tok intenzity elektrického poľa touto plochou je

$$ES = \frac{\sigma S}{\epsilon}$$

kde S je plocha základne valca, ϵ je permitivita prostredia s konečnou vodivosťou γ , σ je plošná hustota náboja na rozhraní. Podľa Ohmovho zákona $E = J/\gamma$, takže pre plošnú hustotu náboja na rozhraní plyní

$$\sigma = \frac{\epsilon J}{\gamma}$$

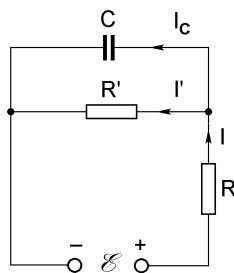
102. Kondenzátorom tečie prúd $I_C = ne\tau$, kde n je počet iónov (alebo elektrónov) vznikajúcich v jednotkovom objeme za jednotku času, e je elementárny náboj, τ je objem kondenzátora. Pre obvod na obr. R102 platí

$$\mathcal{E} = RI + R'I'$$

$$I = I' + I_C$$

z čoho

$$I = \frac{\mathcal{E} + ne\tau R'}{R + R'} = 8,1 \cdot 10^{-8} \text{ A}$$



Obr. R102

103. Z princípu kontinuity prúdu a z geometrie kondenzátora plynie, že prúdové hustoty v oboch prostrediach sú rovnaké, teda $J_1 = J_2$, alebo využitím Ohmovho zákona platí $\gamma_1 E_1 = \gamma_2 E_2$. Napätia na jednotlivých vrstvách dielektrík sú

$$U_1 = E_1 h_1 \qquad U_2 = E_2 h_2$$

kde E_1 a E_2 sú intenzity elektrických polí v jednotlivých vrstvách dielektrík. Napätie na kondenzátore

$$U = U_1 + U_2 = E_1 h_1 + E_2 h_2$$

Z uvedených rovníc dostaneme pre intenzity elektrických polí výrazy

$$E_1 = \frac{\gamma_2 U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1} \qquad E_2 = \frac{\gamma_1 U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}$$

Prúdové hustoty v dielektrikách

$$J_1 = J_2 = \frac{\gamma_1 \gamma_2 U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}$$

a elektrické indukcie

$$D_1 = \frac{\varepsilon_1 \gamma_2 U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1} \qquad D_2 = \frac{\varepsilon_2 \gamma_1 U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}$$

Všetky vektory poľa smerujú od kladnej elektródy k zápornej. Na rozhraní dielektrík je voľný plošný náboj s hustotou

$$\sigma = D_2 - D_1 = (\varepsilon_2 \gamma_1 - \varepsilon_1 \gamma_2) \frac{U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}$$

a viazaný plošný náboj s hustotou

$$\sigma_v = P_2 - P_1 = [(\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \gamma_1 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \gamma_2] \frac{U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}$$

Na rozhraní dielektrika s kladnou elektródou je

$$\sigma_v = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_1 \qquad \text{a} \qquad \sigma = D_1$$

a na rozhraní dielektrika so zápornou elektródou je

$$\sigma_v = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_2 \qquad \text{a} \qquad \sigma = -D_2$$

Voľné a viazané náboje s priestorovou hustotou v dielektriku nie sú.

104. Intenzita elektrického poľa vo vodiči súvisí s prúdovou hustotou podľa Ohmovho zákona $E = J/\gamma$ kde γ je konduktivita. Z Gaussovho zákona ďalej plynie, že

$$\operatorname{div} E = \operatorname{div} \frac{\mathbf{J}}{\gamma} = \frac{\rho(t)}{\varepsilon} \qquad \text{alebo} \qquad \operatorname{div} \mathbf{J} = \frac{\gamma \rho(t)}{\varepsilon}$$

Porovnaním posledného výrazu s rovnicou kontinuity (pri zachovaní homogénneho rozloženia náboja)

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{d\rho(t)}{dt}$$

dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{\varepsilon}\rho(t) \quad \text{ktorej riešením je} \quad \rho(t) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}t\right)$$

Hustota náboja vo vodiči s časom exponenciálne klesá. Časová konštanta procesu je $\tau = \varepsilon/\gamma$.

105. $R_x = 220 \Omega$

106. $U_{ab} = 0,22 \text{ V}, I = 0,46 \text{ A}$

107. Ak označíme napätia na kondenzátoroch $2C$ a C postupne U_1 a U_2 , potom:

a) $U_1 = 45 \text{ V}, U_2 = 15 \text{ V};$ b) $U_1 = 20 \text{ V}, U_2 = 40 \text{ V};$ c) $U_1 = 60 \text{ V}, U_2 = 0 \text{ V}$

108. $R_x = R/4$

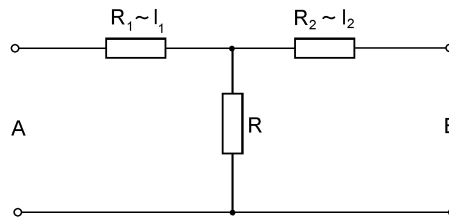
109. $U_1 = 55,1 \text{ V}, U_2 = 44,9 \text{ V}$

110. Náhradná schéma kábla so zvodom je na obr. R110, kde $R_1 \sim l_1$ je odpor kábla od stanice A po miesto zvodu (vzdialenosť l_1). Podobne $R_2 \sim l_2$ je odpor druhej časti kábla, úmerný vzdialenosti stanice B od miesta zvodu. R je odpor zvodu. Ak sa v stanici A pripojí kábel na napätie \mathcal{E}_1 , potom v stanici B sa bezprúdovo meria napätie

$$U_1 = \frac{\mathcal{E}_1 R}{R_1 + R}$$

a pri meraní v opačnom smere (zdroj \mathcal{E}_2 v stanici B) je v stanici A napätie

$$U_2 = \frac{\mathcal{E}_2 R}{R_2 + R}$$



Obr. R110

Tieto výrazy možno upraviť na tvar

$$U_1 R_1 = (\mathcal{E}_1 - U_1) R \qquad U_2 R_2 = (\mathcal{E}_2 - U_2) R$$

Vzájomným delením obidvoch rovníc a ďalšou úpravou s uvažovaním, že $R_1/R_2 = l_1/l_2$ dostaneme

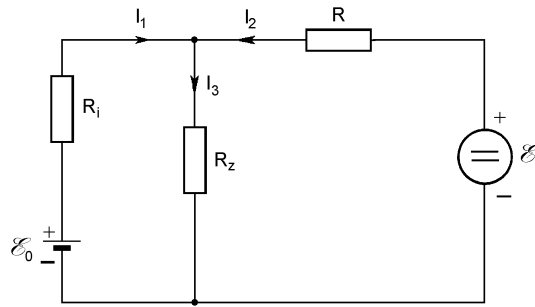
$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{U_2 \mathcal{E}_1 - U_1}{U_1 \mathcal{E}_2 - U_2}$$

Keďže dĺžka celého kábla je $l = l_1 + l_2$, pre l_1 dostaneme

$$l_1 = \frac{U_2 (\mathcal{E}_1 - U_1) l}{U_2 \mathcal{E}_1 + U_1 \mathcal{E}_2 - 2U_1 U_2}$$

Ak dosadíme číselné hodnoty, potom pre vzdialenosť miesta zvodu od stanice A dostaneme hodnotu $l_1 = 19,047 \text{ km}$.

111. a) Schéma zapojenia je na obr. R111.



Obr. R111

b) Ak zvolíme prúdy podľa obr. R111, potom riešením zodpovedajúcich Kirchhoffových rovníc pre prúd I_1 dostaneme

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_0(R + R_z) - \mathcal{E}R_z}{R_i R + R_i R_z + R R_z}$$

Ak $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$, potom $I_1 = 0$, z čoho plynie, že R musí spĺňať podmienku

$$R = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_0} - 1 \right) R_z$$

Dosadením za R vo výraze pre I_1 dostaneme

$$I_1 = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E})\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_1(R_i + R_z) - \mathcal{E}_0 R_z}$$

Ak $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2$, potom

$$I_1 = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_1(R_i + R_z) - \mathcal{E}_0 R_z}$$

c) Riešením Kirchhoffových rovníc pre prúd spotrebičom R_z dostaneme

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_0[\mathcal{E}R_i + (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0)R_z]}{\mathcal{E}_1 R_i R_z + R_z^2(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0)}$$

d) Numericky: Prúd odoberaný z batérie pri $\mathcal{E}_2 = 100$ V má hodnotu $I_1 = 104,17$ mA.

Prúd tečúci spotrebičom pri $\mathcal{E}_2 = 100$ V má hodnotu $I_3 = 598,96$ mA a pri $\mathcal{E}_1 = 120$ V hodnotu $I_3 = 600$ mA. Prúdy spotrebičom sa teda pri krajných hodnotách napätia \mathcal{E} líšia veľmi málo.

112. Zapojenie na obr. 112 v zadaní úlohy sa pre účely riešenia dá prekresliť na tvar podľa obr. R112, kde zdroj napätia U predstavuje postupne zdroje $0, +\mathcal{E}_2, -\mathcal{E}_3$. Pre prúd I riešením príslušných Kirchhoffových rovníc dostaneme

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - U R_1}{R^2}$$

kde $R^2 = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3$. Označme postupne prúdy pri jednotlivých polohách prepínača $I_1 = 60$ mA, $I_2 = 40$ mA a I_3 neznámy prúd. V jednotlivých polohách prepínača bude postupne platiť

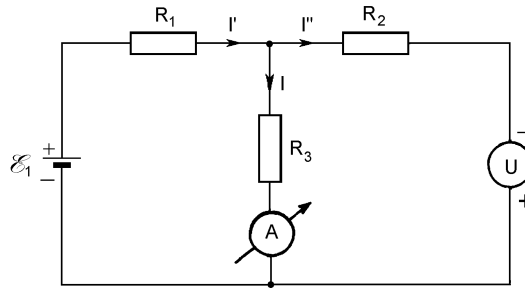
$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 R_2}{R^2} \quad (U = 0)$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{R^2} \quad (U = \mathcal{E}_2)$$

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_3 R_1}{R^2} \quad (U = -\mathcal{E}_3)$$

Riešením uvedeného systému rovníc pre prúd I_3 dostaneme

$$I_3 = I_1 + \frac{\mathcal{E}_3}{\mathcal{E}_2} (I_1 - I_2) = 90 \text{ mA}$$

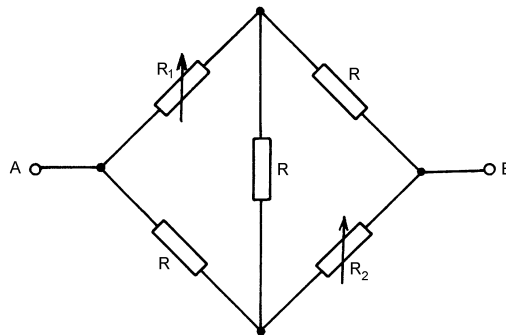


Obr. R112

113. Zapojenie na obr. 113 v zadání úlohy sa dá prekresliť na tvar podľa obr. R113. Odpor medzi svorkami A-B tohoto zapojenia vypočítaný napr. pomocou transformácie hviezda – trojuholník (pozri úlohu 250) alebo pomocou Kirchoffových zákonov je

$$R_{AB} = \frac{3RR_1R_2 + 2R^2(R_1 + R_2) + R^3}{R_1R_2 + 2R(R_1 + R_2) + 3R^2}$$

pričom musí platiť $R_{AB} = R$, čo je splnené, ak $R_1R_2 = R^2$



Obr. R113

114. Najprv vypočítame odpor uzemnenia integráciou odporov pologuľových vrstiev v pôde od $r_0 = 30 \text{ cm}$ do nekonečna, teda

$$R = \frac{1}{\sigma} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{2\pi r^2} = \frac{1}{2\pi\sigma r_0} = 55 \Omega$$

Celkový prúd tečúci do uzemnenia je

$$I = \frac{U}{R} = 2\pi\sigma r_0 U = 7\,547 \text{ A}$$

Tento prúd sa radiálne rozteká do "nekonečného polopriestoru Zeme", a teda aj po povrchu Zeme. Vo vzdialenosti r od stožiara bude prúdová hustota

$$J = \frac{I}{2\pi r^2} = \frac{\sigma_0 U}{r^2}$$

a intenzita elektrického poľa na povrchu Zeme

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{r_0 U}{r^2}$$

Krokové napätie vo vzdialenosti r od stožiara bude

$$U_k = \int_r^{r+l} E dr = r_0 U \int_r^{r+l} \frac{dr}{r^2} = \frac{r_0 l U}{r(r+l)}$$

kde $l = 80 \text{ cm}$ je dĺžka kroku.

a) Pre $r = 100 \text{ m}$ je $U_k = 9,5 \text{ V}$.

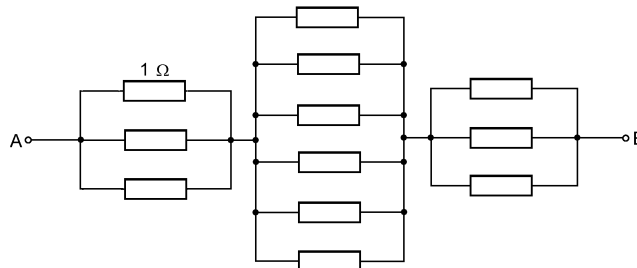
b) Pre $r = 25 \text{ m}$ je $U_k = 149 \text{ V}$. Takéto napätie by mohlo vážne ohroziť život človeka idúceho priamu ku stožiariu.

115. Integráciou elementárnych odporov guľových vrstiev s hrúbkou dr dostaneme pre odpor guľového kondenzátora

$$R = \frac{\rho(R_2 - R_1)}{4\pi R_1 R_2}$$

116. $R = \frac{1}{2\pi\sigma_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{2\pi\sigma_2 b}$

117. Ak medzi vrcholmi A a B kocky prechádza prúd, potom vrcholy priľahlé k vrcholu A sú na rovnakom potenciáli a vrcholy priľahlé k B sú tiež na rovnakom potenciáli. Pre účely určenia celkového odporu možno vrcholy s rovnakým potenciálom bezodporovo spojiť, čím vznikne zapojenie podľa obr. R117. Výsledný odpor takého zapojenia je $R_{AB} = 5/6 \Omega$.



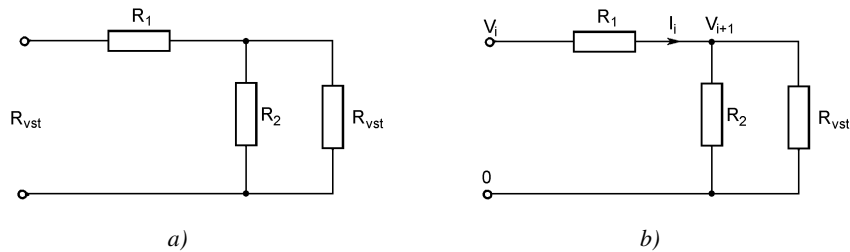
Obr. R117

118. a) Keďže odpor reťazca na obr. 118 v zadaní úlohy sa pridaním jednej dvojice $R_1 - R_2$ nezmení, potom pre reťazec možno nakresliť náhradné zapojenie podľa obr. R118a. Pre vstupný odpor tohoto zapojenia platí

$$R_{vst} = \frac{R_2 R_{vst}}{R_2 + R_{vst}} + R_1 \quad \text{z čoho} \quad R_{vst} = R_1 \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{R_2}{R_1}}}{2} = \frac{V_i}{I_i}$$

kde V_i je potenciál i -tého uzla a I_i je prúd tečúci medzi uzlami s potenciálmi V_i a V_{i+1} (pozri obr. R118b). Pre vetvu s prúdom I_i platí

$$V_i - V_{i+1} = R_1 I_i \quad \text{alebo} \quad \frac{V_{i+1}}{V_i} = 1 - R_1 \frac{I_i}{V_i} = 1 - \frac{R_1}{R_{vst}} = q$$



Obr. R118

Postupnosť potenciálov V_0, V_1, V_2, \dots je skutočne geometrická, klesajúca s kvocientom

$$q = 1 - \frac{R_1}{R_{vst}} < 1$$

pretože $R_{vst} > R_1$. Ak má postupnosť klesať s kvocientom $q = 1/2$, potom musí platiť

$$\frac{R_1}{R_{vst}} = \frac{1}{2} \quad \text{čo bude splnené vtedy, ak} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$$

Z riešenia úlohy vidíme, že každý nekonečný reťazec podľa obr. 118 možno nahradiť reálnym konečným reťazcom zakončeným odporom, ktorého hodnota sa rovná vstupnému odporu R_{vst} nekonečného reťazca. Elektrické vlastnosti konečného a nekonečného reťazca zo strany vstupných svoriek budú rovnaké. Podobne sa uvažuje aj pri analýze dlhých prenosových vedení elektromagnetických signálov, kde ekvivalentom vstupného odporu R_{vst} nekonečného reťazca je vlnový odpor (vlnová impedancia) vedenia (pozri časť 11.6).

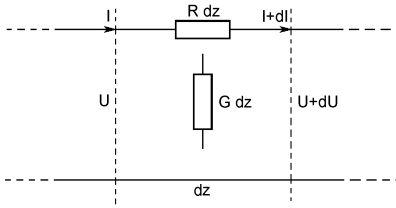
119. Obvody na obr. 119a,b v zadaní úlohy majú rovnaké vstupné odpory $R_{vst} = 2R$. Napätia $U_1 = U_0/2$, $U_2 = U_0/4$, $U_3 = U_0/8$. Vstupný odpor reťazca na obr. 119c v zadaní úlohy je tiež $2R$ a napätie v i -tom uzle je $U_i = U_0/2^i$. Výsledky sú v súhlase s výsledkami úlohy 118.

120. Na obr. R120 je znázornený elementárny úsek kábla dlhý dz s pozdĺžnym odporom Rdz a priečnou vodivosťou Gdz . Pre zmeny napätia a prúdu v danom úseku platia vzťahy

$$-dU = RIdz \quad -dI = GUdz$$

alebo

$$\frac{dU}{dz} = -RI \quad \frac{dI}{dz} = -GU$$



Obr. R120

Derivovaním druhej rovnice a dosadením do prvej dostaneme diferenciálnu rovnicu pre prúd v tvare

$$\frac{d^2 I}{dz^2} = RGI$$

ktorej všeobecné riešenie je

$$I(z) = A_1 \exp(-\sqrt{RG}z) + A_2 \exp(+\sqrt{RG}z)$$

a napätie na kábli je dané funkciou

$$U(z) = -\frac{1}{G} \frac{dI}{dz} = \sqrt{\frac{R}{G}} [A_1 \exp(-\sqrt{RG}z) - A_2 \exp(+\sqrt{RG}z)]$$

A_1 a A_2 sú integračné konštanty, ktoré možno určiť z okrajových podmienok (napr. zadaním prúdu a napätia na vstupe kábla pre $z = 0$).

Podobné, ale dôležitejšie úlohy pre časovopremenné napätia a prúdy sú analyzované v časti 11.6.

121. Odpor kondenzátora

$$R = \frac{d}{\sigma S} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\sigma C} = 3,54 \cdot 10^8 \Omega \quad \text{a prúd} \quad I = U/R = 2,82 \mu\text{A}$$

122. Odpor kondenzátorov

$$R_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1}}{\sigma_1 C_1} \qquad R_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}{\sigma_2 C_2}$$

sú spojené v sérii a pripojené na zdroj. Napätia na jednotlivých kondenzátoroch sú

$$U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2} = U \frac{\sigma_2 \epsilon_{r1} C_2}{\sigma_2 \epsilon_{r1} C_2 + \sigma_1 \epsilon_{r2} C_1} = 1169 \text{ V}$$

$$U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} = U \frac{\sigma_1 \epsilon_{r2} C_1}{\sigma_1 \epsilon_{r2} C_1 + \sigma_2 \epsilon_{r1} C_2} = 31 \text{ V}$$

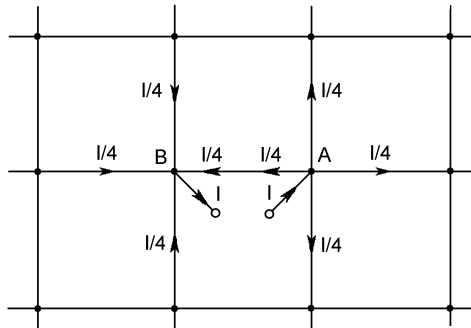
123. Elektrické odpory jednotlivých guľ vo vodnom prostredí sú

$$R_1 = \frac{1}{\sigma} \int_{a_1}^{\infty} \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\sigma a_1} \quad \text{podobne} \quad R_2 = \frac{1}{4\pi\sigma a_2}$$

Odpor medzi guľami je
$$R = R_1 + R_2 = \frac{a_1 + a_2}{4\pi\sigma a_1 a_2} = \frac{U}{I}$$

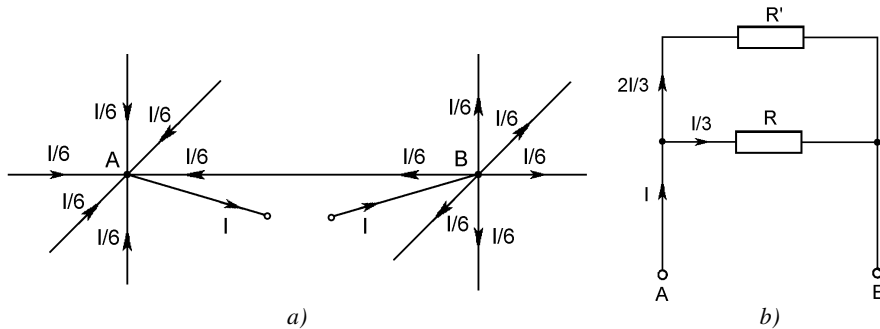
z čoho vodivosť vody

$$\sigma = \frac{(a_1 + a_2)I}{4\pi a_1 a_2 U}$$



Obr. R124

124. Predpokladajme, že k nekonečnej sieti na obr. R124 sú pripojené dva rovnaké prúdové zdroje I , a to tak, že k uzlu A je pripojený kladný pól jedného zdroja a k uzlu B je pripojený záporný pól druhého zdroja. Zostávajúce dva póly oboch zdrojov sú k sieti pripojené formálne v nekonečne. Prvý zdroj dodáva do siete prúd I , ktorý sa symetricky rozteká do štyroch vetiev okolo uzla A . Do uzla B sa podobným spôsobom stekajú také isté prúdy. Z hľadiska uzlov A a B pôsobí v sieti prúdový zdroj I , ktorého polovica prúdu tečie vetvou medzi uzlami A a B a druhá polovica celou nekonečnou sieťou. Odpor vetvy R a odpor zvyšku siete sú teda rovnaké a sú zapojené paralelne. Z toho plynie, že odpor celej siete medzi uzlami A a B je $R_{AB} = R/2$.



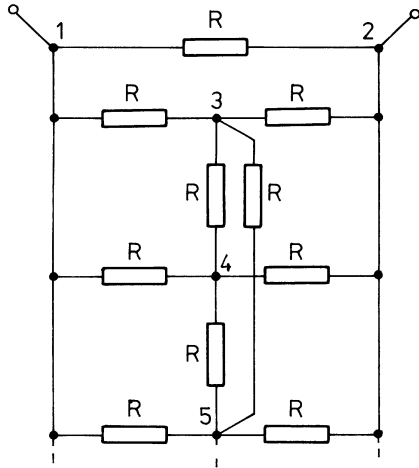
Obr. R125

125. Dva prúdové zdroje s prúdmi I pripojené k sieti podobným spôsobom ako v úlohe 124 dodávajú do siete rovnaké prúdy opačných smerov, ktoré sa vetvia do šiestich príľahlých vetiev podľa obr. R125a. Z hľadiska uzlov $A - B$ je k sieti pripojený prúdový zdroj I , ktorý do vetvy medzi uzlami A a B dodáva prúd $I/6 + I/6 = I/3$ a zvyškom siete tečie prúd $2I/3$. Celú sieť možno teda nahradiť zapojením podľa obr. R125b, kde R' je odpor siete bez odporu vetvy $A - B$. Z obr. R125b je zrejmé, že

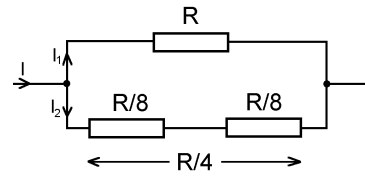
$$\frac{R'}{R} = \frac{I/3}{2I/3} = \frac{1}{2} \quad \text{z čoho } R' = R/2 \text{ a odpor celej siete} \quad R_{AB} = \frac{RR'}{R+R'} = \frac{R}{3}$$

126. Body treba usporiadať tak, ako na obr. R126. Ak sa k bodom 1 – 2 pripojí zdroj EMN, potom body 3 až n sú v dôsledku symetrie zapojenia na rovnakom potenciáli a možno ich bezodporovo spojiť. Výsledný odpor medzi bodmi 1 a 2 je teda

$$R_c = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{n-2}{2R}} = \frac{2R}{n}$$



Obr. R126



Obr. R127

127. Desiat' bodov je navzájom prepojených 45 odpormi R . Ak k dvom bodom pripojíme zdroj EMN \mathcal{E} , celkový prúd dodávaný zdrojom bude

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_i + R_c}$$

kde R_c je celkový odpor siete medzi uvažovanými bodmi. Podľa predchádzajúcej úlohy

$$R_c = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{4}{R}} = \frac{R}{5}$$

Odpor R_c je teda výsledkom paralelného radenia odporu R medzi uvažovanými bodmi a odporu $R/4$, ktorý je dvojnásobkom odporu vzniknutého paralelným spojením ôsmich odporov R (obr. R127). Pre prúdy na obrázku platí

$$I = I_1 + I_2 \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{4}$$

z čoho $I_1 = \frac{1}{5}I$ a $I_2 = \frac{4}{5}I$

Prúd I_1 tečie odporom R , ktorý je paralelný k svorkám zdroja. Jeho veľkosť je

$$I_1 = \frac{1}{5}I = \frac{\mathcal{E}}{5R_i + R} = 0,2 \text{ A}$$

Prúd I_2 sa rovnakým dielom rozteká do ôsmich odporov, ktoré sú jedným koncom pripojené ku kladnej svorke zdroja EMN a steká ôsmimi odpormi, ktoré sú pripojené jedným koncom k zápornej svorke zdroja. Teda prúd I'_2 každým z týchto šestnástich odporov je

$$I'_2 = \frac{I_2}{8} = \frac{1}{10} I = \frac{\mathcal{E}}{10R_i + 2R} = 0,1 \text{ A}$$

Ostatnými odpormi prúd netečie.

$$128. \quad I = \frac{dQ}{dt} = \mathcal{E}C_t = 10^{-8} \text{ A}$$

129. Zmena energie kondenzátora po dobe t je

$$\Delta W_C = \frac{1}{2} \Delta Q \mathcal{E} = \frac{1}{2} \mathcal{E} I t$$

a energia dodaná zdrojom $W = \mathcal{E} I t$. Zdroj dodáva dvojnásobnú energiu ako je energia kondenzátora. Rozdiel energie sa spotrebuje na mechanickú prácu spojenú so zmenou kapacity kondenzátora.

130. Výkon v odpore R_3

$$P_3 = I_3^2 R_3 = \frac{\mathcal{E}^2 R_2^2 R_3}{[R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)]^2}$$

nezávisí od malých zmien R_3 v maxime funkcie $P_3(R_3)$. Derivovaním tejto funkcie podľa R_3 a z podmienky pre jej maximum $\partial P_3 / \partial R_3 = 0$ dostaneme hľadaný vzťah medzi odpormi

$$R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

131. a) $R = 48,4 \text{ } \Omega$; b) $l = 38 \text{ cm}$; c) $P = 1 \text{ kW}$

132. Zvodový prúd v kábli tečie radiálne medzi vnútorným vodičom a plášťom. Priečny odpor kábla je

$$R = \frac{1}{\sigma l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi \sigma l} \ln \frac{r_2}{r_1} = 11\,031,78 \text{ } \Omega$$

kde r_1 je polomer vnútorného vodiča, r_2 je polomer plášťa a l je dĺžka kábla.

a) Zvodový prúd kábla je

$$I = \frac{U}{R} = \frac{2\pi \sigma U}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 54,39 \text{ mA}$$

b) Hustota prúdu v dielektriku kábla

$$J = \frac{I}{2\pi r l} = \frac{\sigma U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{8,656 \cdot 10^{-7}}{r} \quad \left[\text{A/m}^2; \text{ m} \right]$$

c) Hustota tepelného výkonu v dielektriku

$$p = JE = \frac{J^2}{\sigma} = \frac{\sigma U^2}{r^2 \ln^2 \frac{r_2}{r_1}} = \frac{7,493 \cdot 10^{-4}}{r^2} \quad \left[\text{W/m}^3; \text{ m} \right]$$

d) Celkové tepelné straty v kábli

$$P = 2\pi l \int_{r_1}^{r_2} p r dr = \frac{2\pi \sigma l U^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 32,6 \text{ W}$$

133. Celkový odpor zapojenia zo svoriek zdroja \mathcal{E}_1 (pri skratovanom \mathcal{E}_2) je $R' = 11R/5$ a zo svoriek zdroja \mathcal{E}_2 (pri skratovanom \mathcal{E}_1) $R'' = 11R/4$, takže hodnoty elektromotorických napätí možno vyjadriť vzťahmi

$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{R'P_1} = \sqrt{\frac{11RP_1}{5}} = 11\sqrt{R}, \quad [\text{V}; \Omega] \quad \mathcal{E}_2 = \sqrt{R''P_2} = \sqrt{\frac{11RP_2}{4}} = 22\sqrt{R}, \quad [\text{V}; \Omega]$$

kde P_1 a P_2 sú výkony, ktoré dodávajú zdroje \mathcal{E}_1 a \mathcal{E}_2 samostatne. Pre výpočet výkonu dodávaného do odporov zapojenia obidvoma zdrojmi súčasne treba nájsť prúdy v jednotlivých odporoch. Pomocou Kirchhoffových zákonov dostaneme pre prúdy v jednotlivých odporoch výrazy

$$I_R = \frac{3\mathcal{E}_2 - 5\mathcal{E}_1}{11R} = \frac{1}{\sqrt{11R}} \left(3\sqrt{\frac{P_2}{2}} - 5\sqrt{\frac{P_1}{5}} \right) = \frac{1}{\sqrt{R}}, \quad [\text{A}; \Omega]$$

$$I_{2R} = \frac{4\mathcal{E}_2 - 3\mathcal{E}_1}{11R} = \frac{1}{\sqrt{11R}} \left(2\sqrt{\frac{P_2}{2}} - 3\sqrt{\frac{P_1}{5}} \right) = \frac{5}{\sqrt{R}}, \quad [\text{A}; \Omega]$$

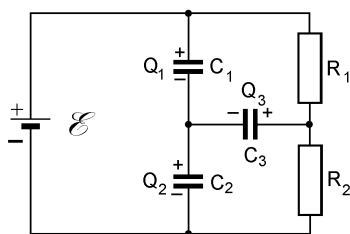
$$I_{3R} = \frac{2\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{11R} = \frac{1}{\sqrt{11R}} \left(2\sqrt{\frac{P_1}{5}} + \sqrt{\frac{P_2}{2}} \right) = \frac{4}{\sqrt{R}}. \quad [\text{A}; \Omega]$$

Celkový výkon dodávaný do zapojenia obidvoma zdrojmi je

$$P = RI_R^2 + 2RI_{2R}^2 + 3RI_{3R}^2 = 99 \text{ W}$$

alebo

$$P = P_1 + P_2 - 6\sqrt{\frac{P_1P_2}{20}} = 99 \text{ W}$$



Obr. R134

134. Ak označíme náboje na kondenzátoroch tak, ako na obr. R134, potom platia rovnice

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \mathcal{E} \quad -Q_1 + Q_2 - Q_3 = 0 \quad \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = \mathcal{E} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Riešením týchto rovníc pre náboje dostaneme

$$Q_1 = \mathcal{E} \frac{C_1(C_2R_1 + C_2R_2 + C_3R_1)}{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2 + C_3)} \quad Q_2 = \mathcal{E} \frac{C_2(C_1R_1 + C_1R_2 + C_3R_1)}{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2 + C_3)}$$

$$Q_3 = Q_2 - Q_1 = \mathcal{E} \frac{C_3(C_2R_2 - C_1R_1)}{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2 + C_3)}$$

Náboj a napätie na kondenzátore C_3 budú nulové, keď bude splnená podmienka

$$C_2R_2 - C_1R_1 = 0$$

135. Prúdová hustota vo vodiči je

$$J = \frac{E}{\rho} = \frac{r^2 E}{\alpha}$$

a celkový prúd vodičom

$$I = \int_0^a J 2\pi r dr = \frac{2\pi E}{\alpha} \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi E a^4}{2\alpha} \quad \text{z čoho} \quad E = \frac{2\alpha I}{\pi a^4}$$

Elementárna vodivosť dG' nekonečne tenkej valcovej vrstvy s plochou $dS = 2\pi r dr$ jednotkovej dĺžky je

$$dG' = \frac{dS}{\rho} = \frac{2\pi r^3 dr}{\alpha}$$

a celková vodivosť na jednotku dĺžky

$$G' = \frac{2\pi}{\alpha} \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi a^4}{2\alpha}$$

Odpor na jednotku dĺžky valca

$$R' = \frac{1}{G'} = \frac{2\alpha}{\pi a^4}$$

Vidíme, že intenzita elektrického poľa vo vodiči je daná súčinom prúdu a odporu na jednotku dĺžky vodiča, teda $E = IR'$.

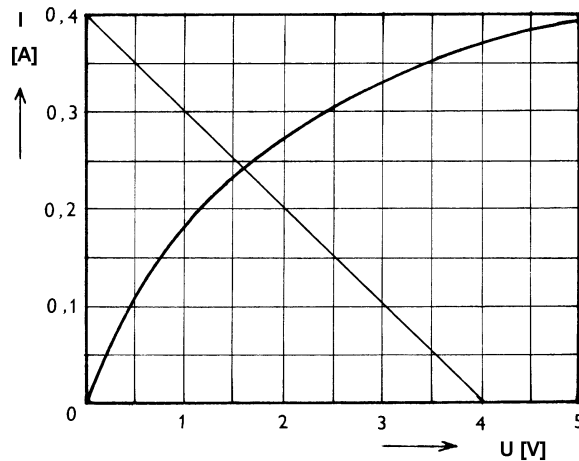
136. V grafe voltampérovej charakteristiky žiarovky zostrojíme zaťažovaciu charakteristiku odporu R (obr. R136), t. j. závislosť

$$U = \mathcal{E} - RI$$

Je to priamka prechádzajúca bodmi $I = 0,4$ A, $U = 0$ V a $I = 0$ A, $U = 4$ V. Priesečník tejto priamky s charakteristikou žiarovky dáva prúd v obvode s odporom R a žiarovkou $I = 0,24$ A a napätie na žiarovke $U_z = 1,6$ V. Napätie na odpore R je teda $U_R = RI = \mathcal{E} - U_z = 2,4$ V. Zapojenie predstavuje mostík, v ktorom, ak má byť vyvážený, t. j. ak napätie medzi svorkami A a B má byť nulové, musí byť odpor potenciometra $R' = R_1 + R_2$ delený v pomere

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{2,4}{1,6} = 1,5$$

Časti potenciometra nad a pod bežcom majú hodnoty odporov $R_1 = 24 \Omega$ a $R_2 = 16 \Omega$.



Obr. R136

137. Energia uvoľnená pri jednom blesku je $W_0 = UIt = 2 \cdot 10^{10} \text{ J}$ a celková ročná energia bleskov $W \approx 6 \cdot 10^{19} \text{ J}$. Ak sú vstupné údaje úlohy vieryhodné (sú prebrané z Feynmanovej učebnice), potom ročná energia bleskov je porovnateľná s ročnou celosvetovou produkciou elektrickej energie (porovnaj údaj v odseku 7.4).

138. Pre obvod platí rovnica

$$\mathcal{E} = RI + \sqrt{\frac{I}{k}}$$

ktorej vyhovuje prúd $I = 0,0979 \text{ A}$. Výkon v odpore R

$$P = RI^2 = 0,958 \text{ W}$$

Napätie a výkon na nelineárnom prvku sú

$$U = \sqrt{\frac{I}{k}} = 2,2 \text{ V} \qquad P = UI = 0,215 \text{ W}$$

Treba pripomenúť, že pre nelineárny prvok neexistuje pojem odporu v obyčajnom zmysle, teda ako pomer U/I , preto výrazy pre výkon tvaru $P = RI^2 = U^2/R$ sú pre neho nepoužiteľné.

139. Pre prúdy v obvode na obr. 139 v zadaní úlohy platí

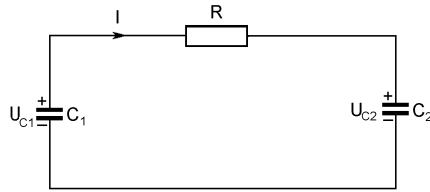
$$I_1 = \frac{P_z}{U_z} = 36 \text{ mA} \qquad I_2 = \frac{U_z}{R_0} = 39 \text{ mA}$$

Napätie na odpore R je $U_R = (I_1 + I_2)R = U - U_z = 4,2 \text{ V}$, z čoho $R = 56 \Omega$.

140. $P = 6,4 \text{ W}$

141. Pre obvod na obr. R141a platí rovnica

$$-U_{C1} + U_{C2} + RI = 0 \quad \text{alebo} \quad \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \int Idt + RI = 0$$



Obr. R141a

Deriváciou poslednej rovnice podľa času a s označením

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C}$$

dostaneme diferenciálnu rovnicu pre prúd v obvode

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

ktorej riešenie so začiatočnou podmienkou $I_0 = U_0/R$ v čase $t_0 = 0$ je

$$I = \frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = \frac{U_0}{R} \exp\left[-\frac{(C_1 + C_2)t}{RC_1C_2}\right]$$

Napätie na kondenzátore C

$$U_{C2} = \frac{1}{C_2} \int Idt = \frac{U_0}{RC_2} \int \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) dt = -\frac{U_0C}{C_2} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + \text{konšt.}$$

Hodnota integračnej konštanty plynie zo začiatočnej podmienky. V čase $t = 0$ je $U_{C2} = 0$, a tak z posledného výrazu plynie, že

$$\text{konšt.} = \frac{U_0C}{C_2}$$

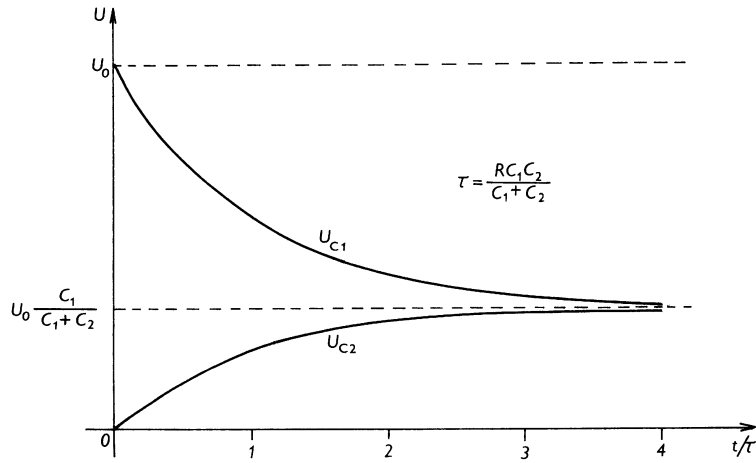
Napätie na kondenzátore C_2 je teda

$$U_{C2} = \frac{U_0C}{C_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right] = \frac{U_0C_1}{C_1 + C_2} \left\{1 - \exp\left[-\frac{(C_1 + C_2)t}{RC_1C_2}\right]\right\}$$

Napätie na kondenzátore C_1 je

$$U_{C1} = RI + U_{C2} = \frac{U_0}{C_1 + C_2} \left\{C_1 + C_2 \exp\left[-\frac{(C_1 + C_2)t}{RC_1C_2}\right]\right\}$$

Priebehy napätí na kondenzátoroch sú znázornené na obr. R141b.



Obr. R141b

142. Pre prúdy v obvode na obr. R142 platí

$$I_C + I_R = I \quad \text{alebo} \quad C \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{R} = I$$

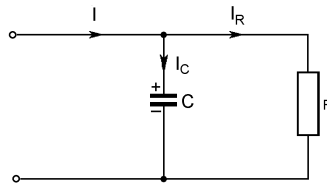
Riešenie tejto rovnice pre napätie na kondenzátore U_C so začiatočnou podmienkou $U_C = 0$ v čase $t = 0$ je

$$U_C = IR \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right]$$

Na kondenzátore bude napätie $U_{C0} = 500$ V v čase t_0 , pre ktorý z posledného výrazu plynie

$$t_0 = RC \ln \frac{IR}{IR - U_{C0}}$$

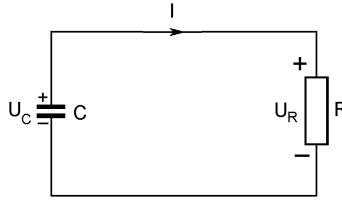
Dosadením číselných hodnôt $R = 200$ M Ω , $C = 5$ μ F, $I = 3$ μ A a $U_{C0} = 500$ V dostaneme pre čas hodnotu $t_0 = 1$ 792 s.



Obr. R142

143. Kondenzátor s kapacitou C nabitý na potenciálový rozdiel U má energiu

$$W = \frac{CU^2}{2}$$



Obr. R143

Po pripojení kondenzátora na odpor R v každom okamihu platí rovnica (obr. R143) $U_C + U_R = 0$, alebo

$$\frac{1}{C} \int I dt + RI = 0$$

Derivovaním tejto rovnice dostaneme diferenciálnu rovnicu pre prúd v obvode

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0$$

ktorej riešenie s počiatočnou podmienkou $I_0 = U/R$ pre $t = 0$ je

$$I = \frac{U}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Pri vybíjaní kondenzátora sa odporom vyžiarí tepelná energia

$$W = \int_0^{\infty} RI^2 dt = \frac{U^2}{R} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) dt = \frac{CU^2}{2}$$

ktorá sa rovná energii kondenzátora pred začiatkom vybíjania. Pri vybíjaní kondenzátora sa v skutočnosti vždy vyžiarí nejaká časť energie vo forme elektromagnetického impulzu do okolia (v okamihu zopnutia obvodu), čo v riešení nebolo vzaté do úvahy.

144. Časová konštanta $\tau = RC = \epsilon l \sigma$ závisí iba od vlastností dielektrika a nezávisí od geometrie kondenzátora

145. a) $I(t) = 0,003 e^{-3000t}$ A; b) $U_{C1} = 2$ V, $U_{C2} = U_{C3} = 1$ V; c) $Q = 1 \mu\text{C}$

146. 1. $C' = 2000$ pF

2. Ak sa nemá v časovom intervale Δt náboj na kondenzátore podstatne zmeniť, musí byť časová konštanta obvodu oveľa väčšia ako Δt , t. j. musí platiť $RC \gg \Delta t$, teda $R \gg 10^7 \Omega$.

3. Po zmene kapacity na hodnotu $C' = 2C$ je prúd v obvode

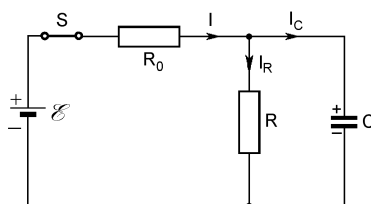
$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{2RC}\right) = \frac{\mathcal{E}}{2R} \exp\left(-\frac{t}{2RC}\right)$$

a energia spotrebovaná v odpore

$$W = R \int_0^{\infty} I^2(t) dt = \frac{1}{4} C \mathcal{E}^2$$

147. Pre prúdy I , I_C a I_R v obvode podľa obr. 147a po zopnutí spínača S platia rovnice

$$R_0 I + R I_R = \mathcal{E} \quad R I_R - \frac{1}{C} \int I_C dt = 0 \quad I = I_C + I_R$$



Obr. R147a

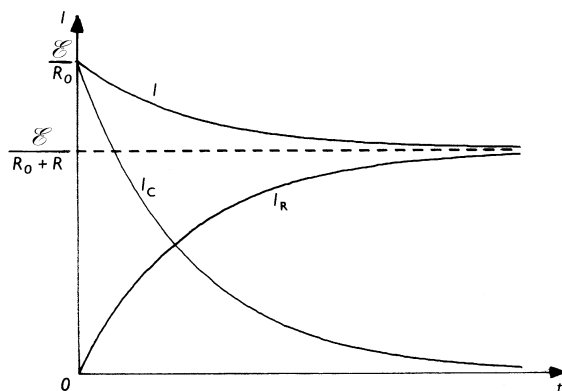
Riešením tohoto systému rovníc so začiatčnou podmienkou $t = 0$, $I_R = 0$, $I = I_C = \mathcal{E}/R_0$, dostaneme pre prúdy výrazy

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + R} \left[1 + \frac{R}{R_0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad I_C = \frac{\mathcal{E}}{R_0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad I_R = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + R} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

kde

$$\tau = \frac{R_0 R}{R_0 + R}$$

je časová konštanta obvodu. Grafy závislostí prúdov od času sú znázornené na obr. R147b.



Obr. R147b

148. Graf závislosti na obr. 148 v zadaní úlohy je daný výrazmi

$$U_C = \frac{U_0}{T} t \quad \text{pre } 0 < t < T$$

$$U_C = U_0 \left(2 - \frac{t}{T} \right) \quad \text{pre } T < t < 2T$$

Pre $0 < t < T$ musí platiť

$$U = RI + \frac{1}{C} \int Idt \quad \text{kde} \quad \frac{1}{C} \int Idt = U_C$$

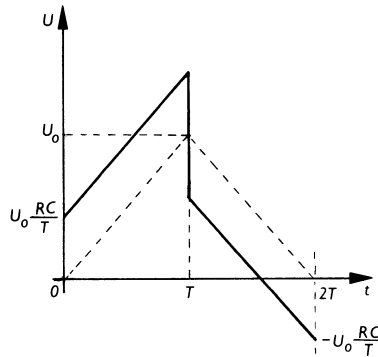
a
$$I = C \frac{dU_C}{dt} = \frac{U_0 C}{T} \quad \text{teda} \quad U = U_0 \left(\frac{t}{T} - \frac{RC}{T} \right)$$

Pre $T < t < 2T$ podobne musí platiť

$$U = RI + \frac{1}{C} \int Idt \quad \text{kde} \quad I = C \frac{dU_C}{dt} = -\frac{U_0 C}{T}$$

takže
$$U = U_0 \left(2 - \frac{RC}{T} - \frac{t}{T} \right)$$

Graf závislosti vstupného napätia od času je na obr. R148.



Obr. R148

149. Podľa obr. 149a v zadaní úlohy v okamihu nástupu čela impulzu ($t = 0$) je kondenzátor C nenabitý a správa sa ako skrat. Prúd dodávaný do obvodu je limitovaný paralelnou dvojicou $R_1 - R_2$ a má maximálnu hodnotu

$$I_{max} = U_0 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

kde U_0 je amplitúda impulzu generátora. V tom istom okamihu v obvode na obr. 149b je

$$I_{max} = \frac{U_0}{R_1'}$$

pretože kondenzátor C predstavuje skrat. V čase $t = \Delta t$ je na kondenzátore C náboj $I_C \Delta t$, kde $I_C = U_0 / R_1$ je nabíjací prúd kondenzátora. Napätie na kondenzátore

$$U_C = \frac{I_C \Delta t}{C} = \frac{U_0 \Delta t}{C R_1}$$

V čase $t = \Delta t$ sa kondenzátor cez skratovaný generátor začne vybíjať so začiatočným prúdom

$$I_{min} = \frac{U_C}{R_1} = \frac{U_0 \Delta t}{C R_1^2}$$

V obvode na obr. 149b je v čase $t = \Delta t$ kondenzátor C nabitý na napätie

$$U_C' = \frac{U_0 \Delta t}{C R_1'}$$

a začne sa cez generátor vybíjať so začiatočným prúdom

$$I_{min} = \frac{U'_C}{R'_1} = \frac{U_0 \Delta t}{C' R_1'^2}$$

Časová konštanta vybíjania kondenzátora C cez skratovaný generátor je $\tau = CR_1$ a kondenzátora C'

$$\tau' = \frac{R'_1 R'_2}{R'_1 + R'_2} C'$$

Porovnaním výrazov pre I_{max} , I_{min} a τ oboch obvodov dostaneme rovnice

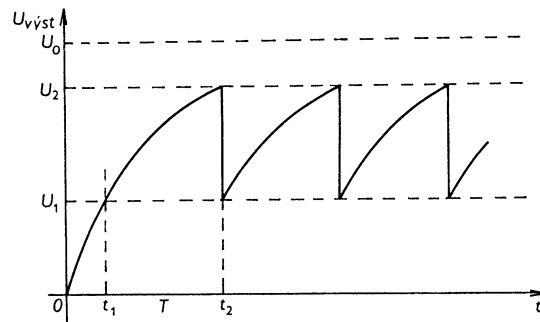
$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R'_1 \quad CR_1^2 = C' R_1'^2 \quad CR = \frac{R'_1 R'_2}{R'_1 + R'_2} C'$$

z ktorých plynie, že obvody budú identické, ak

$$C' = C \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right)^2 \quad R'_1 = R_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad R'_2 = \frac{R_2^2}{R_1 + R_2}$$

alebo

$$C = C' \left(\frac{R'_2}{R'_1 + R'_2} \right)^2 \quad R_1 = R'_1 \frac{R'_1 + R'_2}{R'_2} \quad R_2 = R'_1 + R'_2$$



Obr. R150

150. Napätie na kondenzátore má časový priebeh

$$U = U_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right]$$

a v čase t_1 dosiahne hodnotu

$$U_1 = U_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t_1}{RC}\right) \right]$$

čo je minimálna úroveň napätia generátora. Maximálna hodnota napätia na kondenzátore je v čase t_2 , kedy

$$U_2 = U_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t_2}{RC}\right) \right]$$

Z posledných dvoch výrazov možno vyjadriť časy t_1 a t_2

$$t_1 = -RC \ln\left(1 - \frac{U_1}{U_0}\right) \quad t_2 = -RC \ln\left(1 - \frac{U_2}{U_0}\right)$$

Periódka kmitov relaxačného generátora

$$T = t_2 - t_1 = RC \ln \frac{U_0 - U_1}{U_0 - U_2}$$

Časový priebeh napätia relaxačného generátora je znázornený na obr. R150.

151. Ak označíme $C' = 10^{-2} \text{ F/m}^2$ kapacitu bunečnej membrány na jednotku plochy, tak hrúbku bunečnej membrány možno určiť zo vzťahu

$$d = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{C'} = 2,65 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

časová konštanta bunečného kondenzátora

$$\tau = R'C' = \rho \epsilon = 1 \text{ ms}$$

kde R' je priečny odpor jednotkovej plochy bunečnej membrány (v jednotkách $\Omega \cdot \text{m}^2$), ρ je rezistivita bunečnej membrány a ϵ je jej permitivita. Rezistivitu možno určiť zo vzťahu

$$\rho = \frac{R'}{d} = 3,76 \cdot 10^7 \Omega \cdot \text{m}$$

čo je veľká hodnota v porovnaní s rezistivitou dobrých izolantov.

6 Magnetizmus elektrických prúdov

152. Priame časti vodiča s prúdom I k magnetickej indukcii v strede polkružnice neprispievajú, pretože smer prúdu je paralelný, resp. antiparalelný so sprievodičom k stredu polkružnice. K magnetickej indukcii prispieva iba časť prúdu tečúceho polkruhovým vodičom. Hodnota tohto príspevku je

$$B = \frac{\mu_0 I}{4a}$$

153. Magnetická indukcia v bode P je superpozíciou indukcie B' od prúdu v polkružnici a B'' od prúdu v dvojici paralelných nekonečných vodičov (obr. R153). Magnetická indukcia od elementu prúdu na polkružnici je

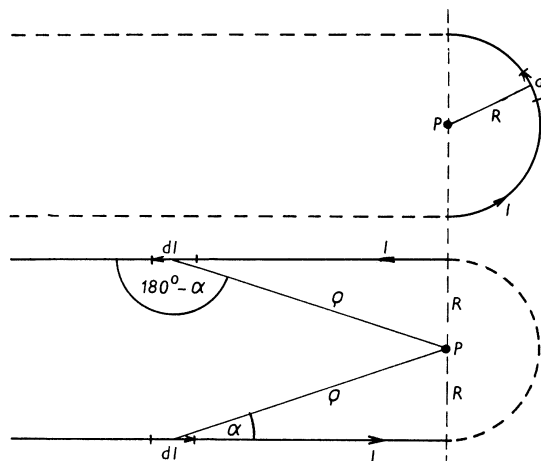
$$dB' = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2}$$

a celkový príspevok od prúdu v polkruhovej časti je

$$B' = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

Pri danom smere prúdu vektor B' smeruje pred nákresňu. Od dvoch symetrických elementov dl na paralelných častiach vodiča magnetická indukcia je

$$dB'' = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{2\pi \rho^2} = \frac{\mu_0 I \sin \alpha d\alpha}{2\pi R} \quad \text{a} \quad B'' = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



Obr. R153

Vektor B'' smeruje tiež pred nákresňu. Od dvoch symetrických elementov dl na paralelných častiach vodiča magnetická indukcia je

$$B = B' + B'' = \frac{\mu_0 I (2 + \pi)}{4\pi R}$$

$$154. B = \frac{4\mu_0 I a^2}{\pi(a^2 + 4d^2)(2a^2 + 4d^2)^{1/2}}$$

155. a) Pole v bode x bude superpozíciou polí dvoch kruhových prúdov nI , teda

$$B = \frac{\mu_0 n I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{[a^2 + (b/2 + x)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[a^2 + (b/2 - x)^2]^{3/2}} \right\}$$

b) Rozvinieme výraz pre B do mocninného radu podľa mocnín x . Pretože $x \ll a, b$ obmedzíme sa na prvé tri členy rozvoja, takže

$$B(x) = B(0) + \left(\frac{dB}{dx}\right)_{x=0} x + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2B}{dx^2}\right)_{x=0} x^2$$

Funkcia $B(x)$ takto nadobudne tvar

$$B = \frac{\mu_0 n I a^2}{3} \left[1 + \left(\frac{15 b^2}{4 r_0^4} - \frac{3}{r_0^2} \right) \frac{x^2}{2} \right] \quad \text{kde} \quad r_0 = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

c) Pri danej presnosti nebude B závisieť od x , ak

$$\frac{15 b^2}{4 r_0^4} - \frac{3}{r_0^2} = 0$$

čo je splnené pri $a = b$, pritom $r_0 = \sqrt{5/4} a$.

d) V bode 0 má magnetická indukcia hodnotu

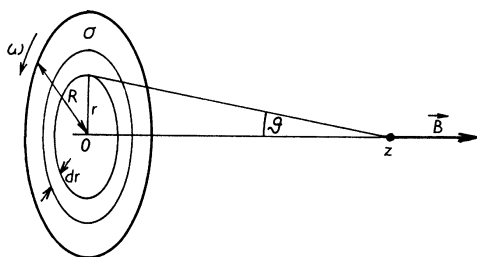
$$B(0) = \frac{\mu_0 n I a^2}{r_0^3} = 0,715541 \frac{\mu_0 n I}{a} = 0,899176 \cdot 10^{-6} \frac{n I}{a} \quad [\text{T; A; m}]$$

156. Disk možno rozložiť na medzikružia s polomerom r a šírkou dr , pričom príspevok k magnetickej indukcii od jedného medzikružia podľa obr. R156 je

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} \sin^3 \vartheta = \frac{\mu_0 dI}{2} \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

kde $dI = \omega \sigma dr$. Celková magnetická indukcia v bode z je

$$B = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \int_0^R \frac{r^3 dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \left(\frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 2|z| \right)$$

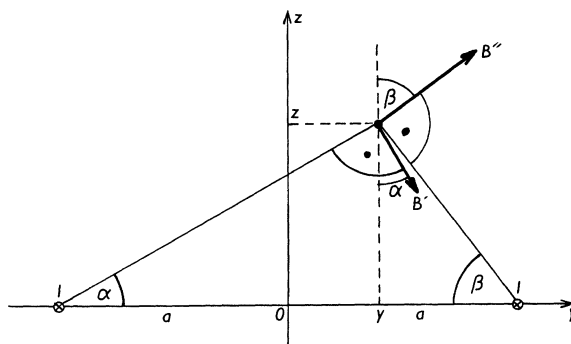


Obr. R156

alebo vo vektorovom tvare

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \sigma}{2} \left(\frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 2|z| \right) \vec{\omega}$$

157. a) Magnetická indukcia bude mať zložky iba v rovine kolmej na vodiče (rovina yz podľa obr. R157). Prúdy I tečú za nákrešou obr. R157 a magnetické indukcie od jednotlivých prúdov v bode (y, z) sú



Obr. R157

$$B' = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{(a+y)^2 + z^2}} \quad B'' = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{(a-y)^2 + z^2}}$$

Zložky magnetickej indukcie v smere súradných osí sú

$$B'_y = B' \sin \alpha = \frac{\mu_0 I z}{2\pi[(a+y)^2 + z^2]} \quad B''_y = B'' \sin \beta = \frac{\mu_0 I z}{2\pi[(a-y)^2 + z^2]}$$

$$B'_z = -B' \cos \alpha = \frac{-\mu_0 I(a+y)}{2\pi[(a+y)^2 + z^2]} \quad B''_z = B'' \cos \beta = \frac{\mu_0 I(a-y)}{2\pi[(a-y)^2 + z^2]}$$

a výsledné zložky magnetickej indukcie od oboch prúdov

$$B_y = B'_y + B''_y = \frac{\mu_0 I z}{2} \left[\frac{1}{(a-y)^2 + z^2} + \frac{1}{(a+y)^2 + z^2} \right]$$

$$B_z = B'_z + B''_z = \frac{\mu_0 I}{2} \left[\frac{a-y}{(a-y)^2 + z^2} + \frac{a+y}{(a+y)^2 + z^2} \right]$$

b) V prípade, ak prúd vľavo od osi z na obr. R157 tečie pred nákresňu, zložky magnetickej indukcie budú

$$B_y = -B'_y + B''_y \quad B_z = -B'_z + B''_z$$

158. Použitím zákona celkového prúdu dostávame pre magneticú indukciu výrazy:

– pre $r < a$

$$B = \frac{\mu I r}{2\pi a^2}$$

– pre $a < r < b$

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

– pre $b < r < b + d$

$$B = \frac{\mu I [(b+d)^2 - r^2]}{2\pi r(2bd + d^2)}$$

– pre $r > b + d$

$$B = 0$$

159. Podľa obr. R159 platí pre pomer priečnej zložky prúdu I_p k pozdĺžnej I_z

$$\frac{I_p}{I_z} = \frac{2a}{\delta}$$

Magneticá indukcia vo vnútri solenoidu je

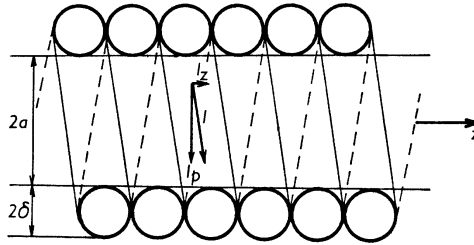
$$B_{int} = \mu_0 I_p n = \frac{\mu_0 I_p}{2\delta}$$

kde $n = 1/(2\delta)$ je počet závitov na jednotku dĺžky solenoidu. Na povrchu solenoidu

$$B_{ext} = \frac{\mu_0 I_z}{2\pi a}$$

Pre pomer týchto indukcií platí

$$\frac{B_{int}}{B_{ext}} = 2\pi \frac{a^2}{\delta^2}$$



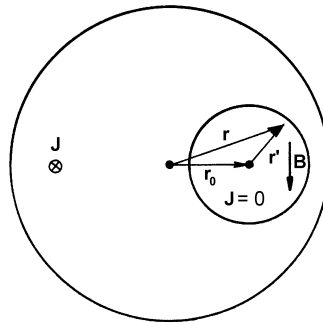
Obr. R159

160. Odpor vinutia solenoidu $R = 184 \Omega$. Tepelný výkon

$$P = \frac{U^2}{R} = 3,13 \text{ W} \quad \text{a prúd v solenoide} \quad I = \frac{P}{U} = 131 \text{ mA}$$

Magnetická indukcia v strede solenoidu s dĺžkou d , polomerom r a s počtom závitov n na jednotku dĺžky pri prúde I je

$$B = \frac{\mu_0 I n d}{2\sqrt{\frac{d^2}{4} + r^2}} = 8,05 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$



Obr. R161

161. Dané prúdové rozloženie možno považovať za superpozíciu prúdovej hustoty J v celom valci a prúdovej hustoty $-J$ v dutine valca. Podľa obr. R161 intenzita magnetického poľa v bode danom polohovým vektorom r , spôsobená prúdovou hustotou J bude

$$B' = \mu_0 \frac{Jr}{2} \quad \text{alebo vo vektorovom vyjadrení} \quad B' = \mu_0 \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{2}$$

Intenzita poľa od prúdu s hustotou $-\mathbf{J}$ v tom istom bode je

$$\mathbf{B}'' = \mu_0 \frac{-\mathbf{J} \times \mathbf{r}'}{2}$$

Výsledné pole v dutine je

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' + \mathbf{B}'' = \mu_0 \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{2} = \mu_0 \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}_0}{2}$$

kde $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ je polohový vektor stredu dutiny vzhľadom na stred valca. Pole v dutine je homogénne.

162. Podľa obr. R162 priestorový uhol, v ktorom vidno prúdovú slučku l z bodu P je Ω . Pri zmene polohy bodu P o $d\mathbf{u}$ sa zmení priestorový uhol o $d\Omega$. Posunutie bodu P o $d\mathbf{u}$ je ekvivalentné posunutiu slučky o $-\mathbf{du}$. Zmena priestorového uhla $d\Omega$ je rovná súčtu elementárnych priestorových uhlov malých rovnobežníkov tvorených vektormi $d\mathbf{l}$ a $-\mathbf{du}$. Plocha takého rovnobežníka je

$$dS = |d\mathbf{u} \times d\mathbf{l}|$$

a plošný vektor rovnobežníka

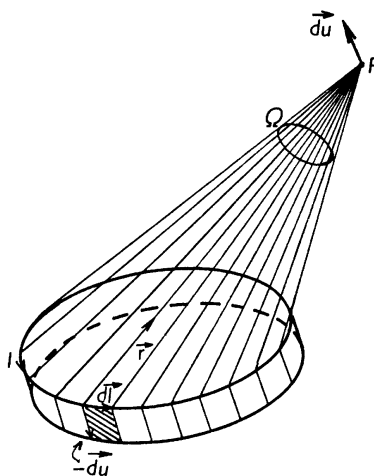
$$d\mathbf{S} = -d\mathbf{u} \times d\mathbf{l}$$

ktorého priemet do smeru vektora \mathbf{r} delený s r^2 dáva elementárny priestorový uhol

$$-\left(\frac{d\mathbf{u} \times d\mathbf{l}}{r^3}\right) \cdot \mathbf{r} = -\left(\frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}\right) \cdot d\mathbf{u}$$

Integráciou posledného výrazu pozdĺž celej slučky l dostaneme zmenu $d\Omega$ v tvare

$$d\Omega = -d\mathbf{u} \cdot \oint_l \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$



Obr. R162

avšak $d\Omega = \text{grad } \Omega \cdot d\mathbf{u}$, takže

$$-\text{grad}\Omega = \oint_l \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Magnetická indukcia prúdovej slučky sa teda v bode P dá vyjadriť výrazom

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{grad}\Omega = -\text{grad} \frac{\mu_0 I \Omega}{4\pi} = -\text{grad} V_m$$

kde

$$V_m = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega$$

je skalárny magnetický potenciál.

163. Valcovo symetrické pole od priameho vodiča

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

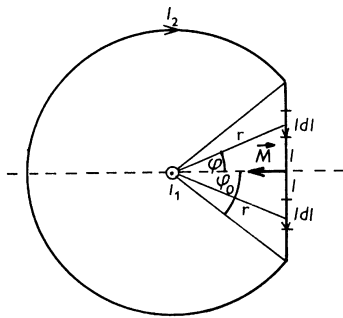
bude pôsobiť iba na priamy úsek uzavretého okruhu, pretože na jeho kruhovej časti je magnetická indukcia paralelná s prúdovými elementmi. Podľa obr. R163 elementárny moment dvojice síl pôsobiaci na dva symetrické prúdové elementy $I_2 dl$ je

$$dM = 2ldF = 2I_2 B \sin \varphi dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l^2 dl}{\pi r^2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R \cos \varphi_0}{\pi} \text{tg}^2 \varphi d\varphi$$

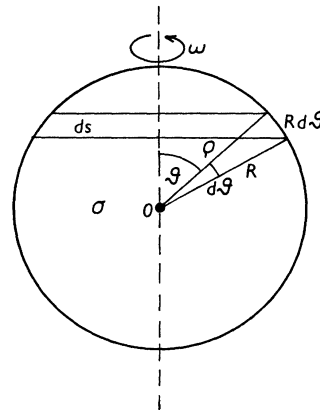
Celkový moment

$$M = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R \cos \varphi_0}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \text{tg}^2 \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{\pi} (\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0)$$

smeruje na obr. R163 doľava.



Obr. R163



Obr. R164

164. Magnetický moment dutej gule možno vypočítať integráciou elementárnych magnetických momentov prúžkov na guľovej ploche podľa obr. R164. Označme: $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ plošnú hustotu náboja na guľovej ploche, $ds = 2\pi R d\vartheta$ plochu prúžka, $d\mathbf{l} = \omega ds / (2\pi) = \sigma \omega ds / (2\pi)$ prúd