DODATOK I

STRUČNÝ PREHĽAD VEKTOROVEJ ANALÝZY

1 Sčítavanie vektorov a násobenie vektora skalárom

Vektor $\boldsymbol{A}$ je fyzikálna veličina, ktorá má udanú veľkosť (modul, absolútnu hodnotu) A a smer. Možno ho vyjadriť napríklad v zložkách pozdĺž osí kartézskeho súradnicového systému x, y, z

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

kde $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sú jednotkové vektory s modulom 1 v smere súradnicových osí (pozri Dodatok II). Vektory možno sčítavať. Súčet dvoch vektorov $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ je vektor

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_x + B_x)\boldsymbol{i} + (A_y + B_y)\boldsymbol{j} + (A_z + B_z)\boldsymbol{k}$$

Pre sčítavanie vektorov platí komutatívny zákon

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$$

a asociatívny zákon

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$$

Vždy platí

$$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| \le A + B$$

Rozdiel dvoch vektorov

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$$

je vektor, ktorý sa rovná súčtu vektora $\boldsymbol{A}$ s vektorom $-\boldsymbol{B}$ (vektor s rovnakým modulom ako $\boldsymbol{B}$, ale opačného smeru).

Súčin skalára α s vektorom $\boldsymbol{A}$ je vektor, ktorého modul je $|\alpha| A$ a smer je súhlasný so smerom vektora $\boldsymbol{A}$ ak $\alpha > 0$, alebo opačný smeru $\boldsymbol{A}$, ak $\alpha < 0$.

2 Násobenie vektorov

Sú definované dva súčiny vektorov:

a) **Skalárny súčin dvoch vektorov** $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}$ – je skalár s hodnotou $AB\cos\varphi$, kde φ je uhol, ktorý vektory $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ zvierajú, teda

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = AB\cos\varphi$$

Skalárny súčin dvoch navzájom kolmých vektorov ($\varphi = \pi/2$) sa rovná nule. Skalárny súčin dvoch paralelných, resp. antiparalelných vektorov ($\varphi = 0, \pi$)

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = \pm AB$$

Pre skalárny súčin vektorov platí komutatívny zákon a distributívny zákon, t. j.

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}.\boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\,.\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{C}$$

avšak neplatí asociatívny zákon, pretože

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}.\boldsymbol{C}) \neq (\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

Pre jednotkové vektory pravouhlého súradnicového systému platia výrazy

$$\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}.\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}.\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{j} = 0$$

$$\boldsymbol{i}.\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{k} = 1$$

Skalárny súčin vektorov v zložkách pravouhlých súradníc

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Ak $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B},$ potom

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{A} = A^2 = A_x^{\,2} + A_y^{\,2} + A_z^{\,2}$$

b) **Vektorový súčin dvoch vektorov** $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ je vektor, ktorého modul je

$$\left|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\right| = AB \sin\varphi$$

(φ je uhol medzi vektormi $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$) a smer vektora $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ je taký, že vektory $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ tvoria pravotočivý súradnicový systém. Vektorový súčin dvoch paralelných vektorov ($\varphi = 0, \pi$) sa rovná nule. Vektorový súčin dvoch navzájom kolmých vektorov ($\varphi = \pi/2$) je vektor s modulom AB.

Pre vektorový súčin dvoch vektorov platí distributívny zákon, t. j.

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$$

avšak neplatí komutatívny zákon. Platí antikomutatívny zákon, t. j.

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$$

a neplatí ani asociatívny zákon, pretože

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \neq (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C}$$

Vektorové súčiny jednotkových vektorov $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sú

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}$$

Vektorový súčin dvoch vektorov v zložkách pravouhlého súradnicového systému

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{k}$$

Dvojnásobný vektorový súčin $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ je vektor koplanárny s vektormi $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$, a je daný výrazom

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B})$$

Zmiešaný vektorový súčin

$$\boldsymbol{A}.(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}.(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}.(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$$

je skalár, ktorého veľkosť sa rovná objemu rovnobežnostena určeného vektormi $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$. V zložkách pravouhlého súradnicového systému

$$\boldsymbol{A}.(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Ďalej platia vzťahy

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}).(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A}.\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}.\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}.\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}.\boldsymbol{C})$$
$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) = [\boldsymbol{A}.(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{D})]\boldsymbol{C} - [\boldsymbol{A}.(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})]\boldsymbol{D} = [\boldsymbol{A}.(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D})]\boldsymbol{B} - [\boldsymbol{B}.(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D})]\boldsymbol{A}$$

DODATOK II

SÚRADNICOVÉ SYSTÉMY

1 Dvojrozmerné súradnicové systémy

Na určenie polohy bodu v rovine treba zadať dve čísla (súradnice), pričom spôsob zadania polohy (súradníc) závisí od povahy problému, v ktorom bod vystupuje. Na tento účel slúžia súradnicové systémy, ktoré musia mať zadaný **začiatok, smer** (+/–) súradnicových osí a **mierku** (škálu). Najčastejšie používané súradnicové systémy v rovine sú:

– **pravouhlý (kartézsky) systém** x, y
– **polárny systém súradníc** ρ, φ.

1.1 Pravouhlý (kartézsky) dvojrozmerný systém súradníc

Pravouhlý systém súradníc v rovine je sústava dvoch navzájom pravouhlých (ortogonálnych) osí podľa *obr. I*. Začiatkom (pólom alebo nulovým bodom) 0 je priesečník osí.

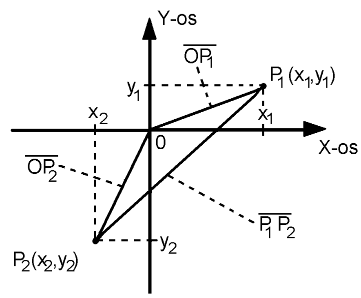
Vzdialenosti na horizontálnej osi sa zadávajú hodnotami $\pm x$ vzhľadom na začiatok, na vertikálnej osi $\pm y$ od začiatku. Poloha bodu P v rovine je potom určená dvojicou čísel x, y, čo označujeme $P(x, y)$.

Vzdialenosť $\overline{OP}$ bodu $P(x, y)$ od začiatku 0 je daná Pytagorovou vetou:

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vzdialenosť d medzi dvoma bodmi $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$:

$$d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



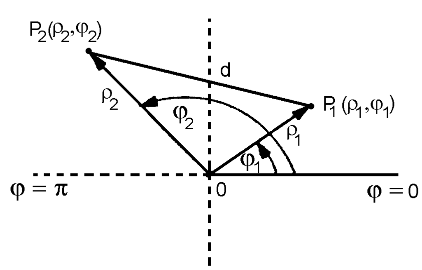
Obr. I

1.2 Systém polárnych súradníc

Polárne súradnice sa používajú pri analýze problémov so stredovou symetriou v rovine. Poloha bodu P sa zadáva (pozri *obr. II*):

1) **vzdialenosťou** (polomerom alebo dĺžkou polohového vektora) $\rho = \overline{OP}$,

2) **smerovým uhlom** (polárny uhol, uhlová súradnica alebo argument) φ medzi spojnicou $\overline{OP}$ a polárnou osou. Polárny uhol φ je kladný pri otáčaní proti smeru hodinových ručičiek a záporný pri otáčaní v smere pohybových ručičiek. Pretože uhol sa v rovine v oblúkovej miere opakuje po hodnotách 2π, najčastejšie sa pri jeho zadávaní obmedzujeme na interval hodnôt $0 \le \varphi < 2\pi$ alebo v stupňovej miere $0 \le \varphi < 360°$. Nazývame ich hlavné hodnoty.



Obr. II

Vzdialenosť d dvoch bodov $P_1(\rho_1, \varphi_1)$ a $P_2(\rho_2, \varphi_2)$ v polárnych súradniciach

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

je daná kosínusovou vetou.

1.3 Konverzie v dvojrozmerných súradnicových systémoch

Prechod od polárnych súradníc (ρ, φ) k pravouhlým súradniciam (x, y) sa vykoná pomocou vzťahov

$$x = r\cos\varphi \qquad\qquad y = r\sin\varphi$$

a prechod od pravouhlých súradníc (x, y) k polárnym (ρ, φ) je daný vzťahmi

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad\qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

2 Trojrozmerné súradnicové systémy

Trojrozmerné súradnicové systémy sa používajú na určenie polohy bodu v priestore. Podľa povahy problému možno použiť niektorý z nasledovných najčastejšie používaných súradnicových systémov:

– **pravouhlý (kartézsky) systém** x, y, z

– **cylindrický (valcový) systém** ρ, φ, z

– **sférický (guľový) systém** r, ϑ, φ.

Každý zo systémov musí mať určený **začiatok** 0 (pre cylindrický systém je začiatkom bod na osi z), **smer** (+/–) a **mierka**.

2.1 Pravouhlý trojrozmerný systém súradníc

Tento systém predstavuje tri navzájom ortogonálne (pravouhlé) súradnice, ktoré nazývame os x, os y a os z (pozri *obr. III*).

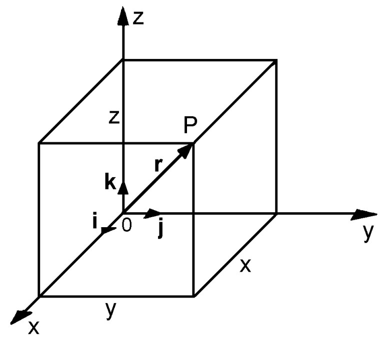
Vzdialenosť bodu $P(x, y, z)$ od začiatku 0

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Najkratšia **vzdialenosť** d medzi dvoma bodmi $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Jednotkové vektory v poradí $\boldsymbol{i} \to \boldsymbol{j} \to \boldsymbol{k}$ tvoria pravotočivý systém.



Obr. III

2.2 Cylindrický systém súradníc

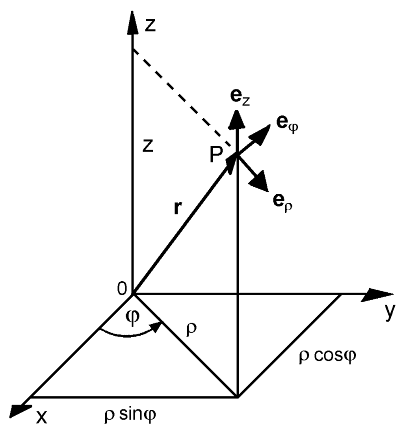
Polárne súradnice sa používajú v problémoch s osovou (cylindrickou) symetriou a rotačnou symetriou.

Poloha bodu v cylindrickom systéme je daná súradnicami (ρ, φ, z), kde z je cylindrická os, ρ je kolmá vzdialenosť bodu P od osi z (pozor – nie od začiatku na osi z) a φ je azimutálny uhol medzi referenčnou rovinou prechádzajúcou osou z a rovinou v ktorej leží bod P (pozri *obr. IV*). Definičné oblasti:

pre ρ je $\rho \geq 0$

pre φ je $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

pre z je $-\infty \leq z \leq +\infty$



Obr. IV

Pre z = 0 prechádza cylindrický systém na systém polárnych súradníc. Jednotkové vektory v poradí $\boldsymbol{e}_\rho \rightarrow \boldsymbol{e}_\varphi \rightarrow \boldsymbol{e}_z$ tvoria pravotočivý systém.

2.3 Sférický systém súradníc

Sférické súradnice sa používajú pri problémoch so stredovou symetriou, napr. v geografii, pri opise dipólových polí, v kvantovej mechanike pri opise energetických stavov atómov a p.

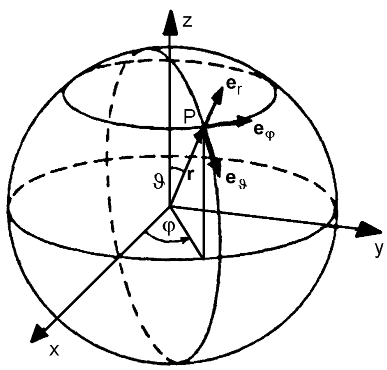
Bod P v sférických súradniciach je daný trojicou čísel (r, ϑ, φ) na *obr. V*, kde

r je **vzdialenosť** bodu P od začiatku 0 a má hodnoty $r \geq 0$,

ϑ je **polárny uhol** (geografická dĺžková súradnica) medzi polárnou osou (napr. osou z) a smerom vektora $\boldsymbol{r}$. Nadobúda hodnoty z intervalu $0 \leq \vartheta \leq \pi$.

φ je **azimutálny uhol** (geografická šírková súradnica v rovníkovej rovine) medzi priemetom vektora $\boldsymbol{r}$ do roviny kolmej na polárnu os (na *obr. V* os z) a zvolenou osou v tejto rovine (napr. os x). Uhol φ nadobúda hodnoty z intervalu $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Jednotkové vektory v poradí $\boldsymbol{e}_r \rightarrow \boldsymbol{e}_\vartheta \rightarrow \boldsymbol{e}_\varphi$ tvoria pravotočivý systém.



Obr. V

2.4 Konverzie medzi trojrozmernými súradnicovými systémami

Prechod cylindrických súradníc (ρ, φ, z') na kartézske súradnice (x, y, z) umožňujú vzťahy

$$x = \rho \cos\varphi \qquad y = \rho \sin\varphi \qquad z = z'$$

Prechod kartézskych súradníc (x, y, z) na cylindrické súradnice (ρ, φ, z') umožňujú vzťahy

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \qquad z' = z$$

Prechod sférických súradníc (r, ϑ, φ) na kartézske súradnice (x, y, z) umožňujú vzťahy

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$$
$$y = r\sin\vartheta\sin\varphi \qquad 0 \le \vartheta \le \pi$$
$$z = r\cos\vartheta$$

Prechod kartézskych súradníc (x, y, z) na sférické súradnice (r, ϑ, φ) umožňujú vzťahy

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (\textit{rovnica guľovej plochy})$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\cos\vartheta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Prechod sférických súradníc (r, ϑ, φ) na cylindrické súradnice (ρ, φ', z) umožňujú vzťahy

$$\rho = r\sin\vartheta$$
$$\varphi' = \varphi \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$$
$$z = r\cos\vartheta \qquad 0 \le \vartheta \le \pi$$

Prechod cylindrických súradníc (ρ, φ', z) na sférické súradnice (r, ϑ, φ) umožňujú vzťahy

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \qquad \vartheta = \mathrm{arctg}\,\frac{\rho}{z} \qquad \varphi = \varphi'$$

Tabuľka 22

Diferenciálne operácie na skalárnych a vektorových poliach

Gradient (grad) V:

Pravouhlé súradnice (x, y, z)

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

Cylindrické súradnice (ρ, φ, z)

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

Sférické súradnice (r, ϑ, φ)

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\boldsymbol{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

Divergencia (div) $\boldsymbol{E}$:

Pravouhlé súradnice (x, y, z)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Cylindrické súradnice (ρ, φ, z)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho E_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Sférické súradnice (r, ϑ, φ)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\, E_\vartheta\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}E_\varphi$$

Rotácia (rot) $\boldsymbol{E}$:

Pravouhlé súradnice (x, y, z)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

Cylindrické súradnice (ρ, φ, z)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho E_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_\rho & \rho E_\varphi & E_z \end{vmatrix}$$

Sférické súradnice (r, ϑ, φ)

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial \sin\vartheta E_\varphi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r E_\varphi}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r E_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta}\right)\boldsymbol{e}_\varphi =$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\vartheta & r\sin\vartheta\boldsymbol{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ E_r & rE_\vartheta & r\sin\vartheta E_\varphi \end{vmatrix}$$

Tabuľka 23

Laplaceov operátor

Pravouhlé súradnice (x, y, z)
$$\Delta = \nabla.\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
Cylindrické súradnice (ρ, φ, z)
$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
Sférické súradnice (r, ϑ, φ)
$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

NIEKOĽKO LITERÁRNYCH PRAMEŇOV K PREDMETU "ELEKTROMAGNETIZMUS"

O elektromagnetizme bolo napísaných veľmi veľa vynikajúcich diel. Medzi prvé, ktorých úroveň zodpovedá dnešným teoretickým predstavám patrí Maxwellova monografia **"Treatise on Electricity and Magnetism"** (Pojednanie o elektrine a magnetizme) prvý raz vydaná v roku 1873. Jej tretie vydanie vyšlo už v roku 1891 (3d ed., Oxford University Press, 1891; reprint ed., Dover, New York 1954) a posledné v júni 1998 vo vydavateľstve Oxford University Press. Maxwell v nej na základe Ampérových a Faradayových experimentálnych poznatkov predložil jednotnú teóriu elektromagnetizmu včítane svetelných javov.

Nepokladám za účelné predkladať tu rozsiahly zoznam učebníc, ktoré boli napísané potom, a ktoré sa dnes len ťažko obstarávajú, nemôžem však nespomenúť aspoň niektoré, ktoré si zasluhujú mimoriadnu pozornosť a obdiv. Sú to napríklad:

1. **Stratton, J.: "Electromagnetic Theory"**, McGraw – Hill Book Co., Inc., New York 1941 – existuje český preklad z roku 1961,
2. **Sommerfeld, A.: "Elektrodynamik"**, Akademische Verlagsgessellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1949,
3. **Tamm, I. J.: "Osnovy teoriji električestva"**, GITTL, Moskva 1957,
4. **Jackson, J. D.: "Classical Electrodynamics"**, J. Wiley and Sons, Inc. New York, London 1962.

V roku 1961 vznikla na Univerzite v Berkley v Kalifornii, USA špeciálna komisia zložená z renomovaných vedcov a pedagógov, aj nositeľov Nobelovej ceny za fyziku, ktorá dostala za úlohu koordinovať tvorbu nových moderných učebníc základného kurzu fyziky, ktoré by odrážali vtedajší stav fyzikálnych poznatkov a pokroky v technike. Druhý, už spomínaný diel tohto päťdielneho kurzu je venovaný elektromagnetizmu a vyšiel v roku 1965. Je to kniha:

5. **Purcell, E. M.: "Electricity and Magnetism"**, Berkley Physics Course, Vol. 2, McGraw Hill Book Comp., New York 1965.

"Berkleyský kurz" je jedno z najdokonalejších diel z fyzikálnej učebnicovej tvorby. Je napísaný na vysokej odbornej úrovni a s takým pedagogickým majstrovstvom, že ho môže čítať každý, kto má aspoň priemernú matematickú prípravu zodpovedajúcu gymnaziálnej úrovni. S ním možno porovnávať iba ďalej citované a tiež už spomínané učebnice Richarda P. Feynmana. Edward Mills Purcell, autor uvedenej učebnice, dostal spolu s Felixom Blochom v roku 1952 Nobelovu cenu za výskumy vo vysokofrekvenčnej spektroskopii (jadrová magnetická rezonancia).

V súčasnosti okrem tejto knihy existujú u nás pomerne nedávne vydania osvedčených učebníc, na ktoré sú študenti obyčajne odkazovaní. Sú to napríklad knihy:

6. **Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M.: "Feynmanove prednášky z fyziky 3"**, Alfa Bratislava 1988
7. **Sedlák, B., Štoll, J.: "Elektřina a magnetismus"**, Academia Praha Vydavatelství Karolinum 1993
8. **Čičmanec, P.: "Všeobecná fyzika 2 – Elektrina a magnetizmus"**, Vydavateľstvo UK Bratislava 2002

Dúfajme, že aj dielo, na konci ktorého ste sa práve ocitli, Vám pomohlo odhaliť a pochopiť niektoré taje sveta, v ktorom žijeme a ktorého sme neoddeliteľnou súčasťou.