

11 ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY

Z pohľadu ďalekej budúcnosti ľudstva – povedzme desaťtisíc rokov – bude Maxwellov objav zákonov elektrodynamiky hodnotený ako najväčší objav 19. storočia. Americká občianska vojna vedená v tom istom desaťročí bude v porovnaní s touto dôležitou vedeckou udalosťou hodnotená ako bezvýznamná provinciálna šarvátka.

"Feynmanove prednášky z fyziky"

11.1 PODSTATA ELEKTROMAGNETICKÝCH VLN

Ak sa elektrické náboje pohybujú v priestore tak, že ich rýchlosť je periodickou funkciou času, vytvárajú v svojom okolí elektromagnetické pole, ktoré má vlnový charakter, t. j. je periodické v čase i v priestore a šíri sa v priestore istou konečnou rýchlosťou. Konečnú rýchlosť, ktorou sa elektromagnetické rozruchy vo vákuu šíria, zvykne nazývať rýchlosťou svetla, označujeme ju univerzálne písmenom c ¹ a je predpokladom pre existenciu elektromagnetických vln (nekonečná rýchlosť by vznik vlny neumožňovala). Každú vlnu, a teda aj elektromagnetickú, charakterizujú dva parametre: frekvencia jej kmitov $f = \omega/(2\pi)$ a jej vlnová dĺžka λ . Tieto parametre sú navzájom viazané vzťahom

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (11.1)$$

Rýchlosť svetla c je jedna z univerzálnych prírodných konštánt a jej meraniu sa budeme venovať v odseku 11.7.

Myšlienku o existencii elektromagnetických vln a možnosti ich šírenia v priestore vyslovil už Faraday a o niekoľko desaťročí neskôr, v rokoch 1864 až 1873 anglický fyzik James Clerk Maxwell, tieto myšlienky svojimi teoretickými prácami zdôvodnil. Maxwellova teória elektromagnetizmu umožňuje na základe jej zákonov napísať diferenciálne rovnice – vlnové rovnice, ktorých riešenie v neohraničenom priestore predstavuje elektromagnetické vlny, a ktorých rýchlosť šírenia vo vákuu sa rovná práve rýchlosti svetla. Ďalšie teoretické práce ukázali, že vlastnosti elektromagnetických vln – odraz, lom, prípadne rozptyl – sú rovnaké, aké boli experimentálne zistené pre svetelné vlny. Na základe týchto skúseností Maxwell usúdil, že svetelné vlny sú tiež elektromagnetické vlny, ibaže veľmi krátkych vlnových dĺžok, ktorým zodpovedajú extrémne vysoké frekvencie. Na rozdiel od iných vlnových procesov (akustických, gravitačných) elektromagnetické vlny pozostávajú z dvoch vlnových polí, ktoré sú nerozlučne spojené a nemôžu existovať oddelene. V neohraničenom vákuu sú obidve tieto dielčie vlny priečne (transverzálne) k smeru ich šírenia a roviny kmitov ich vektorov elektrického

¹ Podľa latinského slova "celeritas" = rýchlosť.

a magnetického poľa sú tiež navzájom kolmé. Kolmosť vektorov môže byť porušená v anizotropných látkových prostrediach. V ohraničených prostrediach, napr. v trubicových vlnodoch, môžu vzniknúť aj pozdĺžne (longitudinálne) vlny. V smere šírenia vlny sa prenáša aj jej elektromagnetická energia resp. hybnosť. V bezstratových prostrediach zostávajú amplitúdy poľí rovnaké v celom priestore, v stratových prostrediach amplitúdy v smere šírenia klesajú tak, ako sa časť energie vlny premieňa na teplo v prostredí. Treba však pripomenúť, že bezstratových prostredí takmer niet, pretože aj v prostrediach bez joulovských strát existujú vždy dielektrické straty spojené s periodickou zmenou polarizácie materiálu.

Význam elektromagnetických vln je obrovský. Na nich je založená prakticky všetka diaľková komunikácia, ktorá sa uskutočňuje v obrovskom intervale frekvencií. Doslova sme ponorení v "mori" signálov všetkých možných frekvencií produkovaných umelými aj prirodzenými zdrojmi, ako to vidieť z tabuľky 20. Z nej si možno urobiť predstavu o šírke celého, dnes známeho elektromagnetického spektra. Dolnou hranicou použiteľných kmitov sú frekvencie okolo 10 Hz a najvyššie dnes detegované frekvencie sú rádu 10^{22} Hz. Pomer týchto frekvencií činí $10^{21} \approx 2^{70}$, teda elektromagnetické spektrum pokrýva 70 oktáv. Z týchto 70 oktáv viditeľné svetlo s frekvenciami od cca $3,9 \cdot 10^{14}$ Hz ($\lambda = 769$ nm) do $7,7 \cdot 10^{14}$ Hz ($\lambda = 389$ nm) nepokrýva ani celú jednu oktávu, pričom táto necelá oktáva má rozhodujúci význam pre život na Zemi. Na jednej strane je ľudské oko citlivé iba na ňu, a na druhej strane, svetelné žiarenie zo Slnka je podmienkou pre proces tvorby uhľovodíkov z kyslíčnika uhličitého a vody v rastlinnej ríši. Tento proces sa nazýva **fotosyntéza**. Energie $E = hf$ uvedené v prvom stĺpci tabuľky sú energie fotónov odpovedajúcich daným frekvenciám, pričom h je Planckova konštanta.

Elektromagnetické vlny experimentálne objavil na univerzite v Karlsruhe v roku 1887 nemecký fyzik Heinrich Hertz, žiak a chránenec fyzika, fyziológa, filozofa a znalca umenia Hermanna von Helmholtza (1821 – 1894). Hertz prvý určil aj vlnovú dĺžku meraním vzdialenosti susedných miním vybudenej stojatej vlny. Z vlnovej dĺžky a známej frekvencie (určenej z hodnôt L a C rezonančného obvodu) využitím výrazu (11.1) stanovil rýchlosť danej elektromagnetickej vlny na hodnotu $3,2 \cdot 10^8$ m/s. Sám o tomto výsledku skepticky vyhlásil, že ho treba považovať iba za rádový odhad. Vidíme však, že jeho odhad bol blízky k dnes používanej hodnote rýchlosti svetla c , a to bola podpora Maxwellovej teórie, podľa ktorej elektromagnetické vlny a svetlo majú rovnakú podstatu a v neohraničenom voľnom priestore (vo vákuu) sa šíria rovnakou rýchlosťou.

11.2 VLNOVÉ ROVNICE

Po tomto úvode o podstate a niektorých vlastnostiach elektromagnetických vln sa pokúsime matematicky preskúmať ich vlastnosti tak, ako plynú z Maxwellovej teórie elektromagnetizmu. Predpokladajme, že v neohraničenom, elektricky homogénnom a izotropnom prostredí (s konštantnými číselnými hodnotami ϵ a μ) existujú nenulová intenzita elektrického poľa \mathbf{E} a magnetická indukcia \mathbf{B} . Vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} sú vo všeobecnosti funkciami polohy a času. Ďalej budeme predpokladať, že prostredie je lineárne, t. j. také, že v ňom platí Ohmov zákon, a hustota náboja sa rovná nule. Tieto predpoklady sú takmer vo všetkých praktických prípadoch splnené. Úlohou v tomto odseku je – na základe

Tabuľka 20
Spektrum elektromagnetických vln

$E = hf$ [J]	f [Hz]	Vlnová dĺžka $\lambda = c/f$	Typy vln (žiarenia)	Zdroje	Typy fyzikálnych interakcií	Detektory
10^{-30}	10^3	1000 km		LC oscilátory		elektronické zariadenia
10^{-29}	10^4	100 km			jadrové momenty s vonkaj. magn. poľom	
10^{-28}	10^5	10 km				
10^{-27}	10^6	1 km	rozhlasové a TV vlny			
10^{-26}	10^7	100 m	AM rozhlas			
10^{-25}	10^8	10 m				
10^{-24}	10^9	1 m	mikrovlny, radar	masery		
10^{-23}	10^{10}	10 cm		klystróny, magnetrony	vnútrokryšt.	kryšt. detektory
10^{-22}	10^{11}	1 cm		lasery		fotocitliv. difr. mriežky
10^{-21}	10^{12}	1 mm				oko
10^{-20}	10^{13}	0,1 mm		tepelné zdroje		kremenná optika
10^{-19}	10^{14}	$10 \mu\text{m}$	IČ žiarenie	lasery		
10^{-18}	10^{15}	$1 \mu\text{m}$				
10^{-17}	10^{16}	100 nm	viditeľné svetlo			
10^{-16}	10^{17}	10 nm	UV žiarenie		vonkajšie elektróny	
10^{-15}	10^{18}	1 nm				
10^{-14}	10^{19}	10^{-10} m	röntgen žiarenie	röntgen trubice	vnútorné elektróny	fotoplatne
10^{-13}	10^{20}	10^{-11} m	Gamma žiarenie	Cyklotrony		počítacie častice

Maxwellových rovníc – napísať diferenciálne rovnice pre vektory \mathbf{E} a $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$.¹ Štyri Maxwellove rovnice formulované v odseku 8.6 za uvedených predpokladov nadobudnú tvar

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (11.2a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (11.2b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (11.2c)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (11.2d)$$

V týchto rovniciach treba separovať vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} . Najjednoduchšie sa to dá urobiť tak, že napr. na rovnicu (11.2a) aplikujeme ešte raz operáciu rotácie, takže dostaneme rovnicu

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H} \quad (11.3)$$

Pre operáciu rot rot na ľavej strane tejto rovnice podľa tabuľky 2 platí identita

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$$

a s jej využitím možno rovnicu (11.3) prepísať do tvaru

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Rovnicu, ak vezmeme do úvahy rovnicu (11.2c), možno ešte zjednodušiť a napísať v konečnom tvare

$$\Delta \mathbf{E} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (11.4a)$$

Formálne úplne rovnakými operáciami na rovnici (11.2b) využitím vyššie uvedenej operátorovej identity a rovníc (11.2a) a (11.2d) dostaneme rovnicu pre vektor \mathbf{H} vo formálne rovnakom tvare

$$\Delta \mathbf{H} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (11.4b)$$

¹ Môže vzniknúť oprávnená otázka, prečo sa chystáme vyjadrovať elektromagnetické vlny vektormi \mathbf{E} a \mathbf{H} , a nie vektormi \mathbf{E} a \mathbf{B} . Príčinou toho, na prvý pohľad paradoxného prístupu je skutočnosť, že teraz predmetom záujmu nebude silové pôsobenie polí na náboje, ale tok výkonu v elektromagnetickej vlne, ktorý je daný práve vektorovým súčinom vektorov \mathbf{E} a \mathbf{H} (pozri ďalej Poyntingov vektor).

Parciálne diferenciálne rovnice (11.4a,b) sa nazývajú **vlnové rovnice** pre vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} . Na úrovni základného kurzu elektromagnetizmu možno o nich povedať iba toľko, že ich možným riešením sú elektrické a magnetické vlny, ktoré v čase a v priestore zanikajú.

Budeme sa zaoberať niektorými jednoduchšími prípadmi vlnových polí. Predovšetkým sa obmedzíme na v čase harmonické vlny, pre ktoré môžeme s výhodou využiť symbolicko-komplexnú metódu známu z teórie striedavých prúdov. Túto metódu možno využiť pre všetky periodické vlny, pretože sú superpozíciou harmonických vln. Zobrazíme teda trigonometrické funkcie $\sin \omega t$, resp. $\cos \omega t$ v komplexnej reprezentácii komplexným časovým faktorom $e^{j\omega t}$ vlny, kde ω je frekvencia očakávanej vlny a komplexné amplitúdy závislé od polohy danej polohovým vektorom \mathbf{r} budú potom $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ a $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ (pozor – sú to komplexné vektory!). Obrazmi poľa sú teda komplexné vektory

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t} \quad (11.5a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{j\omega t} \quad (11.5b)$$

ktoré možno dosadiť do rovníc (11.4a,b). Po ich úprave a vydelením s $e^{j\omega t}$ dostaneme rovnice pre komplexné amplitúdy polí v tvare

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) - j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (11.6a)$$

$$\Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}) - j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (11.6b)$$

Sú to Helmholtzove parciálne diferenciálne rovnice pre komplexné amplitúdy elektromagnetickej vlny v stratovom prostredí ($\sigma \neq 0$). Častejšie sa zapisujú v tvare

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{K}^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (11.6a)$$

$$\Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \mathbf{K}^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (11.6b)$$

kde \mathbf{K} je **koeficient šírenia vlny** daná výrazom

$$\mathbf{K}^2 = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) \quad (11.8)$$

Možno si všimnúť, že výraz v zátvorke je komplexná konduktívita \mathbf{y} prostredia definovaná už v odseku 9.5.1 vzťah (9.47). Výraz (11.8) možno napísať aj v tvare

$$\mathbf{K}^2 = -j\omega\mu\mathbf{y} = \omega^2\mu\epsilon^*$$

kde

$$\epsilon^* = \epsilon + \frac{\sigma}{j\omega} = \epsilon(1 - j \operatorname{tg} \delta) = \epsilon' - j\epsilon'' \quad (11.9)$$

je v elektrotechnickej literatúre často uvádzaná **komplexná permitivita** materiálu, ktorá opisuje dielektrické a vodivostné vlastnosti materiálu v závislosti od frekvencie.

Analýza harmonických vln sa značne zjednoduší v bezstratových prostrediach, prípadne vo vákuu (alebo i vo vzduchu). V takých prostrediach $\sigma = 0$, a teda aj $\operatorname{tg} \delta = 0$, $\epsilon'' = 0$, $\epsilon^* = \epsilon$ a

$$K^2 = \beta^2 = \omega^2 \epsilon \mu \quad (11.10)$$

Konštanta

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \quad [\text{rad.m}^{-1}] \quad (11.11)$$

je **fázový koeficient vlny**. V prípade bezstratového prostredia sa zjednodušia aj Helmholtzove rovnice na tvar

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \beta^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (11.12a)$$

$$\Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \beta^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (11.12b)$$

Tieto rovnice sa nazývajú tiež **rovnícami membrány**, pretože ak Δ je dvojrozmerný Laplaceov operátor, opisujú aj kmity pružných blán (membrán).

11.3 ROVINNÁ ELEKTROMAGNETICKÁ VLNA

Najčastejšie v praxi sa vyskytujúce vlnové polia sú guľové vlny a rovinné vlny. Guľová vlna sa vytvára v blízkom okolí zdroja vlnového poľa, ktorým môže byť elektrický vibrátor (dipól), prípadne malá prúdová slučka. Toto pole vo veľmi veľkej vzdialenosti r od zdroja prechádza na pole rovinatej vlny. Pod rovinnou elektromagnetickou vlnou budeme rozumieť vlnové pole, v ktorom vektory intenzít poľa závisia iba od jednej súradnice a času. Budeme tiež predpokladať, že prostredie je homogénne, izotropné a neohraničené a pre jednoduchosť budeme tiež predpokladať, že je aj bezstratové, teda jeho konduktivita je nulová ($\sigma = 0$). Nech v pravouhlom súradnicovom systéme xyz závisia vektory intenzít poľa iba od súradnice z , takže

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_x(z, t)\mathbf{i} + E_y(z, t)\mathbf{j} + E_z(z, t)\mathbf{k} = \mathbf{E}_T(z, t) + E_z(z, t)\mathbf{k} \quad (11.13a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = H_x(z, t)\mathbf{i} + H_y(z, t)\mathbf{j} + H_z(z, t)\mathbf{k} = \mathbf{H}_T(z, t) + H_z(z, t)\mathbf{k} \quad (11.13b)$$

kde

$$\mathbf{E}_T(z, t) = E_x(z, t)\mathbf{i} + E_y(z, t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{H}_T(z, t) = H_x(z, t)\mathbf{i} + H_y(z, t)\mathbf{j}$$

sú vektorové zložky elektrického a magnetického poľa priečne na smer súradnice z (ďalej už funkčnú závislosť od z nebudeme vypisovať).

Prv, než sa pokúsime nájsť výrazy pre vektory intenzít poľa (11.13) riešením rovníc (11.12), posúdime niektoré ich vlastnosti priamym využitím Maxwellových rovníc (11.2). Zistíme, že očakávané riešenia budú mať veľmi zaujímavé a dôležité vlastnosti. Pre tieto účely predovšetkým prepíšeme rovnice (11.2c) a (11.2d) do operátorového tvaru

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (11.14a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (11.14b)$$

a operátor nabra napíšeme v tvare súčtu priečného operátora ∇_T a jeho pozdĺžnej zložky $(\partial/\partial z)\mathbf{k}$, teda

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla_T + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \quad (11.15)$$

Ak dosadíme (11.15) a výrazy (11.13) do (11.14), po vykonaní formálnych skalárnych súčinov dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} \nabla_T \cdot \mathbf{E}_T + \frac{\partial E_z}{\partial t} &= 0 \\ \nabla_T \cdot \mathbf{H}_T + \frac{\partial H_z}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Prvé členy týchto rovníc sa identicky rovnajú nule, lebo elektrické a magnetické pole závisí od z a ∇_T je operátor priečných súradníc x a y . Platí teda

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (11.16)$$

t. j. z -ové zložky elektrického a magnetického poľa nezávisia od súradnice z a v tomto ohľade sú konštanty.

Ak podobne prepíšeme rovnice (11.2a) a (11.2b) do formálneho tvaru (pre $\sigma = 0$)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

a dosadíme sem vyjadrenia (11.13) a (11.15), po úprave dostaneme rovnice

$$\mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial z} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_T}{\partial t} - \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \mathbf{k} \quad (11.17)$$

$$\mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{H}_T}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \mathbf{k} \quad (11.18)$$

Rovnice (11.17) a (11.18) majú zvláštnu štruktúru. Vektory na ich ľavých stranách sú priečne, pretože sú výsledkom vektorového súčinu pozdĺžneho vektora \mathbf{k} a priečného vektora $\partial \mathbf{E}_T / \partial z$, resp. $\partial \mathbf{H}_T / \partial z$. Prvé členy na pravých stranách sú priečne vektory, ktoré sa musia rovnať ľavým stranám, pretože druhé členy sú pozdĺžne vektory, ktoré sa tým pádom musia rovnať nule. Takto sa každá z uvažovaných rovníc rozpadne na dve rovnice nasledovných tvarov

$$\mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial z} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_T}{\partial t} \quad (11.19a)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \quad (11.19b)$$

$$\mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{H}_T}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial t} \quad (11.20a)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \quad (11.20b)$$

Z rovníc (11.19b) a (11.20b) vidíme, že z -ové zložky poľa sú nezávislé nielen od súradnice, ale aj od času. Sú to teda statické elektrické a magnetické polia v smere osi z , t. j.

$$E_z = \text{konšt.} \quad H_z = \text{konšt.} \quad (11.21)$$

Vzniká otázka, ako interpretovať takýto na prvý pohľad prekvapujúci výsledok našej analýzy.

Z matematického hľadiska je taký výsledok prípustný, pretože ak sa pozrieme na rovnice (11.2), nulové a statické priestorovo homogénne polia týmito rovnicami pri $\sigma = 0$ vyhovujú. Z fyzikálneho hľadiska im vyhovujú aj superpozície statických a iných, nestatických im vyhovujúcich polí. Statické riešenia (11.21) teda možno považovať za superpozíciu navzájom nesúvisiacich statických polí "obrovského kondenzátora so statickým nábojom a obrovskej cievky so stálym prúdom". Pri analýze iba vlnových procesov môžeme tieto polia z analýzy vylúčiť.

Z týchto závažných úvah plynie, že v našom zápise vektorov elektrického a magnetického poľa (11.13) rovinnou elektromagnetickou vlnou musia byť vektory \mathbf{E}_T a \mathbf{H}_T , a teda možno vyhlásiť, že:

– *rovinná elektromagnetická vlna je priečnou (transverzálnou) elektromagnetickou vlnou, pretože jej vektory \mathbf{E}_T a \mathbf{H}_T kmitajú v rovine priečnej (v rovine xy) k smeru jej šírenia z . V literatúre sa často označuje ako TEM-vlna (transverzálne elektromagnetická vlna).*

Využitím vlnových rovníc (11.12) nájdeme teraz amplitúdy rovinatej vlny $\mathbf{E}_T(z)$ a $\mathbf{H}_T(z)$, ak časová závislosť je harmonická, teda $e^{j\omega t}$. Keďže rovnice sú symetrické, stačí riešiť prvú, pričom laplacián Δ možno nahradiť obyčajnou druhou deriváciou podľa súradnice z , teda

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_T}{dz^2} + \beta^2 \mathbf{E}_T = 0$$

Riešenie tejto rovnice možno napísať v tvare

$$\mathbf{E}_T(z) = \mathbf{E}'_T e^{-j\beta z} + \mathbf{E}''_T e^{+j\beta z}$$

a podobne pre magnetickú zložku poľa

$$\mathbf{H}_T(z) = \mathbf{H}'_T e^{-j\beta z} + \mathbf{H}''_T e^{+j\beta z}$$

Ak napokon posledné dva výrazy vynásobíme faktorom $e^{j\omega t}$, dostaneme kompletne hľadané riešenie vlnových rovníc pre rovinnú elektromagnetickú vlnu v tvare

$$\mathbf{E}_T(z, t) = \mathbf{E}'_T e^{j(\omega t - \beta z)} + \mathbf{E}''_T e^{j(\omega t + \beta z)} \quad (11.22a)$$

$$\mathbf{H}_T(z, t) = \mathbf{H}'_T e^{j(\omega t - \beta z)} + \mathbf{H}''_T e^{j(\omega t + \beta z)} \quad (11.22b)$$

Každé z týchto riešení pozostáva z dvoch častí s vlnovými (časovo-pozdĺžnymi) faktormi $e^{j(\omega t \pm \beta z)}$ a so začiatočnými amplitúdami \mathbf{E}'_T , \mathbf{E}''_T , resp. \mathbf{H}'_T , \mathbf{H}''_T . Vlna, ktorá postupuje v zápornom smere osi z s vlnovým faktorom $e^{j(\omega t + \beta z)}$ sa zvykne nazývať odrazenou vlnou a v praxi môže skutočne predstavovať odrazený signál od nejakej prekážky. Odrazenú vlnu bez ujmy na všeobecnosti môžeme z našich úvah vylúčiť a riešenia (11.22) iba pre postupujúcu vlnu napíšeme v tvare

$$\mathbf{E}_T(z, t) = \mathbf{E}'_T e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (11.23a)$$

$$\mathbf{H}_T(z, t) = \mathbf{H}'_T e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (11.23b)$$

Argument exponenciálnych funkcií v posledných výrazoch možno využiť na určenie fázovej rýchlosti vlny v_f . Ak argument (fázu) položíme rovný konštante a zdiferencujeme

$$\omega dt \pm \beta dz = 0$$

dostaneme pre fázovú rýchlosť

$$v_f = \frac{dz}{dt} = \pm \frac{\omega}{\beta} = \pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

Vo vákuu, kde $\epsilon = \epsilon_0$ a $\mu = \mu_0$ je fázová rýchlosť

$$v_{f0} = \pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \pm c \quad (11.24)$$

teda veľkosťou sa rovná rýchlosti svetla c . Rýchlosť c je maximálna limitná rýchlosť pohybu fázy v neohraničenom vákuu. V látkovom neohraničenom prostredí pre vlnu postupujúcu v kladnom smere osi z platí, že

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} < c \quad (11.25)$$

kde ϵ_r a μ_r sú relatívna permitivita a permeabilita prostredia.¹

¹ V ohraničenom vákuu, napr. v trubicových vlnovodoch, je fázová rýchlosť vždy väčšia ako c a môže dosahovať nekonečných hodnôt. Táto skutočnosť nie je v rozpore s teóriou relativity, pretože fázovou rýchlosťou sa prenáša iba tvar vlny. Informácia, teda energia vlny, sa prenáša grupovou rýchlosťou, ktorá je naopak vždy menšia ako c (pozri napr. Tirpák, A.: Elektronika veľmi vysokých frekvencií, Vydavateľstvo UK Bratislava 2001)

Elektromagnetické vlny sú dané reálnymi alebo imaginárnymi časťami výrazov (11.23), teda napr.

$$\mathbf{E}_T(z,t) = \mathbf{E}'_T \sin(\omega t - \beta z) \quad (11.26a)$$

$$\mathbf{H}_T(z,t) = \mathbf{H}'_T \sin(\omega t - \beta z) \quad (11.26b)$$

Ak na okamih zmrazíme čas, výrazy (11.26) predstavujú sínusové funkcie pozdĺž osi z s dĺžkou jednej periódy Δz plynúcej z výrazu $\beta \Delta z = 2\pi$. Dĺžka jednej periódy je vlnovou dĺžkou $\lambda = \Delta z$, z čoho

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi v_f}{\omega} = \frac{v_f}{f}$$

S využitím fázovej rýchlosti, resp. vlnovej dĺžky, možno vlnový faktor napísať v troch tvaroch

$$e^{j(\omega t \pm \beta z)} = e^{j\omega \left(t \pm \frac{z}{v_f} \right)} = e^{j \left(\omega t \pm \frac{2\pi}{\lambda} z \right)} \quad (11.27)$$

Nakoniec zostáva zodpovedať ešte na jednu otázku: V akom vzájomnom vzťahu sú amplitúdy elektrickej a magnetickej zložky elektromagnetickej vlny? Zatiaľ vieme, že obidva vektory ležia v priechnej rovine. Vzájomný vzťah týchto vektorov udávajú rovnice (11.19a) a (11.20a). Ak do nich dosadíme výrazy (11.23) dostaneme vzťahy

$$\mathbf{k} \times \beta \mathbf{E}_T = \omega \mu \mathbf{H}_T \quad (11.28a)$$

$$\beta \mathbf{H}_T \times \mathbf{k} = \omega \varepsilon \mathbf{E}_T \quad (11.28b)$$

Ak si uvedomíme, že

$$\frac{\omega \mu}{\beta} = \frac{\beta}{\omega \varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

potom výrazy (11.28) možno prepísať na tvary

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_T = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H}_T$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H}_T \times \mathbf{k} = \mathbf{E}_T$$

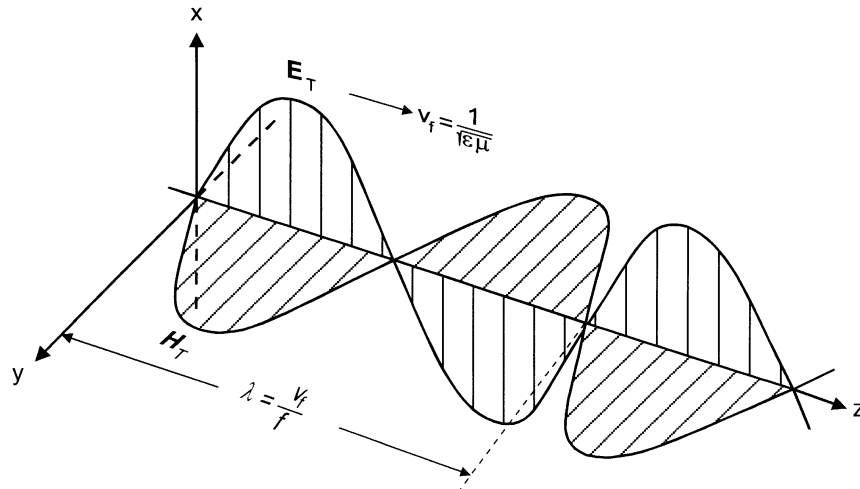
Vidíme, že obidve rovnice poskytujú rovnakú informáciu: priečne vektory \mathbf{E}_T , \mathbf{H}_T spolu s pozdĺžnym jednotkovým vektorom \mathbf{k} sú navzájom kolmé a sledujú pravotočivý súradnicový systém. Pomer priečných zložiek E'_T / H'_T je reálna veličina

$$Z = \frac{E'_T}{H'_T} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad [\Omega] \quad (11.29)$$

a nazýva sa **charakteristická (vlnová) impedancia prostredia**. Reálna hodnota tejto veličiny znamená, že elektrický a magnetický vektor v rovinnej elektromagnetickej vlně v bezstratovom prostredí sú vo fáze. Charakteristická impedancia vákuua

$$Z_{00} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \mu_0 c = 376,73 \Omega$$

je podobne ako c jedna z prírodných konštánt. Ak v priestorovo neohraničenom vákuu existuje elektromagnetická vlna s amplitúdou magnetickej zložky $H_T = 1 \text{ A/m}$, potom jej elektrická zložka má amplitúdu $E_T = Z_0 H_T = 376,73 \text{ V/m}$. Rovinná elektromagnetická vlna aj s jej parametrami je schematicky znázornená na obr. 11.1.



Obr. 11.1

Ak je prostredie stratové, výpočet vlnového poľa sa stáva zložitým. Amplitúdy polí v smere šírenia budú vo všeobecnosti klesať, elektrická a magnetická vlna nebudú vo fáze a charakteristická impedancia bude komplexná, daná výrazom

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon^*}} \quad (11.30)$$

kde ϵ^* je komplexná permitivita prostredia definovaná výrazom (11.9). Relatívne jednoduchý je prípad malých strát (kvalitné dielektriká) alebo naopak, prípad prostredí s veľkými stratami (dobré vodiče), ktorý vedie na povrchový jav, alebo skinefekt. Budeme sa ním zaoberať v odseku 11.5.

11.4 TOK VÝKONU V ELEKTROMAGNETICKEJ VLNE. POYNTINGOV VEKTOR

Pri práci so stálymi jednosmernými prípadne nízkofrekvenčnými prúdmi je zvykom spájať prenos elektrickej energie s prúdom, ktorý tečie vodičmi medzi zdrojom a spotrebičom. Na vysokých a veľmi vysokých frekvenciách táto koncepcia prenosu zlyháva, pretože vysokofrekvenčné prúdy sa riadia svojimi zákonitosťami a ich smery nemusia vždy udávať smer prenosu energie. Okrem toho, také prúdy majú vo väčšine prípadov zložitý plošný prípadne objemový charakter a sú prakticky nemerateľné. Prenášanú energiu treba teda počítať z elektromagnetických polí, ktoré sú dôsledkom týchto prúdov. Možno teda povedať, že energia sa prenáša "bezdrôtovo" prostredníctvom poľa. Tento prístup k prenosu elektromagnetickej energie nie je nijako prekvapivý – celkom prirodzene prijímame elektromagnetickú energiu zo Slnka, tepelnú i svetelnú, bez akéhokoľvek vodivého spojenia zdroja (Slnka) a spotrebiča (Zeme).

K posúdeniu otázky prenosu elektromagnetickej energie v priestore treba urobiť energetickú bilanciu poľa na základe Maxwellových rovníc. Predpokladajme teda, že v nejakom objeme τ priestoru uzavretom plochou A sú nenulové elektrické a magnetické polia dané svojimi vektormi \mathbf{E} a \mathbf{H} , ktoré sú funkciami polohy a času. Tieto polia vyhovujú Maxwellovým rovniciam

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Vynásobme skalárne prvú rovnicu s \mathbf{H} a druhú s \mathbf{E} a odčítajme druhú od prvej. Dostaneme

$$\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\varepsilon \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mu \mathbf{H}^2}{2} \right) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (11.31)$$

Ľavá strana výrazu (11.31) sa dá vyjadriť ako $\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ (pozri tabuľku 2), teda

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mu \mathbf{H}^2}{2} \right) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (11.32)$$

Výraz v zátvorke na pravej strane rovnice je objemová hustota energie elektromagnetickeho poľa

$$w_{elmag} = \frac{\varepsilon \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mu \mathbf{H}^2}{2}$$

ktorý sme už predtým získali zvlášť pre statické elektrické a statické magnetické polia. Teraz vidíme, že platí aj pre časovopremenné polia. Druhý člen $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ na pravej strane výrazu (11.32) je objemová hustota tepelného (Joulovho) výkonu, s ktorým sa elektromagnetická energia mení na teplo v prostredí.

Ak výraz (11.32) integrujeme cez objem τ a na integrál na ľavej strane rovnice použijeme Gaussovu vetu, ktorou sa objemový integrál premení na plošný, po úprave dostaneme rovnicu

$$-\frac{dW}{dt} = \oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} + \int_{\tau} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, d\tau \quad (11.33)$$

kde

$$W = \int_{\tau} w_{elmag} \, d\tau$$

je celková elektromagnetická energia uzavretá v objeme τ . Rovnica (11.33) udáva energetickú bilanciu poľa v objeme τ a nazýva sa **Poyntingova veta**.¹ Podľa Poyntingovej vety sa časový úbytok elektromagnetickej energie W v objeme τ rovná súčtu energie vyžiarenej z objemu τ plochou A (prvý integrál na pravej strane rovnice) a energie spotrebovanej na teplo v objeme τ (druhý integrál na pravej strane rovnice). Hodnota druhého integrálu môže byť kladná, ak vektory \mathbf{J} a \mathbf{E} majú rovnaký smer, ale aj záporná, ak \mathbf{J} a \mathbf{E} majú opačný smer (čo je napr. v zdrojoch elektrickej energie). Vektorový súčin $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ v prvom člene na pravej strane rovnice, ktorý sa integruje po uzavretej ploche A , je dôležitou vektorovou veličinou poľa

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-2}] \quad (11.34)$$

ktorá sa nazýva Poyntingov vektor \mathbf{S} ,² a ktorý udáva plošnú hustotu toku výkonu (alebo hustotu toku energie jednotkovou plochou za jednotku času). Smer šírenia energie alebo výkonu je kolmý na rovinu, v ktorej ležia vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} . V rovinatej elektromagnetickej vlne je tento smer totožný so smerom šírenia vlny, teda je to smer fázovej rýchlosti v_f . Neskôr uvidíme, že ak sa vlna šíri pozdĺž nejakého vedenia (koaxiálny kábel, dvojvodičové vedenie alebo trubicový vlnovod), Poyntingov vektor má smer osi vedenia.

Na Poyntingovom vektore je kuriózne to, že jeho koncepcia nezlyháva ani v prípade navzájom nezávislých statických elektrických a magnetických polí, ktoré sú dôsledkom časovo stálych prúdov a otvára nám nové neobvyklé pohľady na toky elektromagnetickej energie. Spomeňte si na kondenzátor, ktorý sme nabíjali v odseku 3.7.3, a tým zvyšovali jeho energiu. Zopakujme tento postup a pomaly nabíjajme kondenzátor na obr. 11.2 postupným prenosom nábojov dq . Pri každom prenesení náboja dq sa zvýši energia kondenzátora s kapacitou $C = \epsilon_0 \pi a^2 / h$ na obr. 11.2 o hodnotu

$$dW = hEdq = h^2 CE dE$$

[pozri tiež výraz (3.36)]. Energia kondenzátora narastá s výkonom

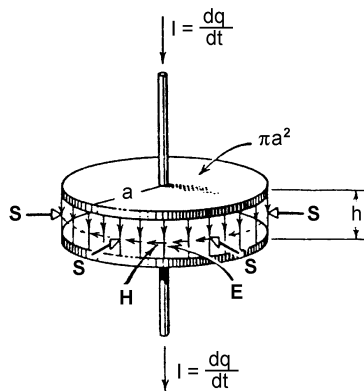
$$P = \frac{dW}{dt} = hE \frac{dq}{dt} = h^2 CE \frac{dE}{dt} \quad (11.35)$$

¹ Podľa amerického fyzika Johna Henryho Poyntinga (1852 – 1914).

² Označenie \mathbf{S} pochádza z nemeckého názvu Strahlungsvektor – vektor žiarenia.

Pôvod tohto výkonu je v práci sily, ktorá prenáša náboje medzi doskami. Dalo by sa teda povedať, že energia postupuje prírodnými vodičmi tak, ako sa kondenzátor postupne nabíja. Pozrime sa však, čo nám prináša Poyntingova veta. Predovšetkým v kondenzátore je $\mathbf{J} = 0$, teda aj Joulov tepelný výkon $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0$. Elektrické pole s intenzitou \mathbf{E} , smeruje na obrázku zhora nadol, a počas nabíjania kondenzátora je v ňom aj magnetické pole, ktorého intenzita \mathbf{H} na okraji kondenzátora má azimutálny smer a jej veľkosť plynie z Ampérovho zákona

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_p \quad (11.36)$$



Obr. 11.2

pričom sa integruje po kruhovom obvode kondenzátora na polomere $r = a$. Veličina

$$I_p = \pi a^2 \epsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

je celkový posuvný prúd v kondenzátore. Po dosadení do (11.36) dostaneme výraz

$$2\pi a H = \pi a^2 \epsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

z čoho intenzita magnetického poľa má veľkosť

$$H = \frac{\epsilon_0 a}{2} \frac{dE}{dt}$$

a smeruje azimutálne s orientáciou ako na obrázku. Vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} sú navzájom kolmé a vektorový súčin $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, teda Poyntingov vektor, smeruje zo všetkých strán do vnútra kondenzátora. Jeho veľkosť je na obvode kondenzátora všade rovnaká s hodnotou

$$S = EH = \frac{\epsilon_0 a}{2} E \frac{dE}{dt}$$

Celkový tok Poyntingovho vektora t. j. výkon vstupujúci do kondenzátora sa rovná súčinnu S a obvodovej plochy $2\pi ah$, teda

$$P = 2\pi ahS = \varepsilon_0 \pi a^2 h E \frac{dE}{dt} = h^2 CE \frac{dE}{dt}$$

Výsledok je fascinujúci – energia vstupuje do kondenzátora štrbinou zo všetkých strán a rastie rovnako rýchlo ako udáva výraz (11.35), len nepostupuje vodičmi, ale vstupuje do kondenzátora jeho obvodom.

Iným príkladom je výkon časovo stáleho prúdu spotrebovaný na teplo v odpore. Ak má odporový vodič valcový tvar a prúd tečie pozdĺž jeho osi, na jednej strane sa energia prenáša "tlačeníím" elektrónov pozdĺž osi, ale na druhej strane, podľa Poyntingovej koncepcie, vstupuje do vodiča jeho plášťom a vo vnútri sa mení na teplo. Čitateľ sa o tom môže presvedčiť riešením úlohy 297 a v úlohe 298 sa dozvie, že v koaxiálnom kábli energia nepostupuje vodičmi prostredníctvom prúdu, ale dutinou kábla, resp. jeho dielektrikom vo forme elektromagnetického poľa smerom k záťaži.

Naskytá sa otázka, ako sa vlastne prenáša elektromagnetická energia. Možno iba povedať, že pri statických poliach a pri nízkych frekvenciách je otázka spôsobu prenosu energie otázkou vkusu. V takých prípadoch je však prirodzenejšie viazať prenos energie na prúd, lebo vtedy aj podľa Feynmana je "Poyntingov prístup príliš bláznivý". Pri veľmi vysokých frekvenciách sa naopak Poyntingovmu vektoru nemožno vyhnúť.

Ak je elektromagnetické pole harmonické pole, potom jeho vektory možno vyjadriť jeho komplexnými obrazmi

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$$

a zaviesť **komplexný Poyntingov vektor**

$$\mathbf{S}_{\text{kompl}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) \quad (11.37)$$

ku ktorému sa možno formálne dopracovať rovnako, ako k pojmu **komplexný výkon** v odseku 9.5. Veličina $\mathbf{H}^*(\mathbf{r})$ je komplexne združená amplitúda intenzity magnetického poľa. **Reálna časť výrazu (11.37) udáva strednú hodnotu Poyntingovho vektora**, teda strednú hodnotu toku výkonu v harmonickej elektromagnetickej vlne.

V rovinnej elektromagnetickej vlne v bezstratovom prostredí elektrické a magnetické vektory \mathbf{E}_T a \mathbf{H}_T sú priečne, navzájom kolmé, vo fáze a navzájom viazané vlnovou impedanciou Z . Stredný Poyntingov vektor takého poľa je

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S}_{\text{kompl}} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_T \times \mathbf{H}_T^* = \frac{1}{2Z} |\mathbf{E}'_T|^2 \mathbf{k} = \frac{1}{2} Z |\mathbf{H}'_T|^2 \mathbf{k}$$

Výkon v rovinnej elektromagnetickej vlne sa šíri v smere osi z a je úmerný štvorcu amplitúdy elektrického alebo magnetického poľa.

11.5 POVRCHOVÝ JAV (SKINEFEKT)

11.5.1 Jednorozmerný rovinný prípad

Teraz sa budeme zaoberať šírením elektromagnetických vln v prostredí, ktoré je na rozdiel od dobrých dielektrík vysoko vodivé, ako je napríklad väčšina kovov. Na základe jednoduchých energetických úvah možno očakávať, že elektromagnetická vlna bude v takomto prostredí v smere svojho šírenia silne tlmená v dôsledku strát energie premenou na teplo. Pod účinkom elektromagnetickej vlny budú totiž v takom prostredí tiecť elektrické prúdy. Ich prúdová hustota $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ v izotropnom vodivom prostredí s konduktivitou σ na základe Ohmovho zákona je

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (11.38)$$

Elektrické pole je teda úmerné prúdovej hustote v prostredí. Ak je prúd harmonický, je harmonické aj elektromagnetické pole a výraz (11.38) možno prepísať pre komplexné amplitúdy závislé od súradníc, teda

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Vidíme, že elektrická vlna kopíruje prúdovú vlnu v prostredí, takže Helmholtzovu rovnicu (11.6a) možno prepísať pre vlnu prúdovej hustoty do tvaru

$$\Delta \mathbf{J}(\mathbf{r}) - j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0 \quad (11.39)$$

Ak je prostredie vysoko vodivé, také, že

$$\sigma \gg \omega\epsilon$$

možno v rovnici (11.39) konduktivitu posuvného prúdu $\omega\epsilon$ zanedbať a prepísať rovnicu do tvaru

$$\Delta \mathbf{J}(\mathbf{r}) - j\omega\mu\sigma\mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0 \quad (11.40a)$$

Podobným spôsobom možno prepísať aj rovnicu (11.6b)

$$\Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}) - j\omega\mu\sigma\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (11.40b)$$

Všeobecné riešenia týchto rovníc sú formálne rovnaké a líšia sa iba charakterom hraničných podmienok. Budeme sa zaoberať riešením prvej z rovníc. Najjednoduchší je prípad, ak prúdová hustota závisí iba od jednej z pravouhlých súradníc, napríklad od súradnice x . Vodivé prostredie nemôže byť v celom nekonečnom priestore, ale musí mať nejakú hranicu v konečne. Nech je rozhraním rovina yz pre $x = 0$ a vodivé prostredie je nekonečný polpriestor $x \geq 0$. Nech navyše má prúdová hustota smer osi z , potom $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = J_z(x)\mathbf{k}$ a rovnica (11.40a) prejde na tvar

$$\frac{d^2 J_z(x)}{dx^2} - j\omega\mu\sigma J_z(x) = 0 \quad (11.41)$$

Substitúciou

$$\gamma^2 = j\omega\mu\sigma \quad (11.42)$$

prejde rovnica (11.41) na konečný tvar

$$\frac{d^2 J_z(x)}{dx^2} - \gamma^2 J_z(x) = 0 \quad (11.43)$$

Rovnica (11.43) má tvar rovnice vedenia tepla alebo rovnice difúzie (v stacionárnom prípade), a preto aj jej riešenie musí mať charakter funkcie, ktorá so súradnicou x exponenciálne klesá. Všeobecné riešenie rovnice možno napísať v tvare

$$J_z(x) = J_{z0} e^{-\gamma x} + J'_{z0} e^{+\gamma x} \quad (11.44)$$

kde J_{z0} a J'_{z0} sú integračné konštanty a fyzikálne predstavujú hraničné hodnoty (pre $x = 0$) dvoch amplitúd prúdovej hustoty, z ktorých jedna smerom do vodiča klesá a druhá rastie. Je prirodzené očakávať, že celková prúdová hustota musí smerom do vnútra materiálu klesať, čo znamená, že druhá integračná konštantka $J'_{z0} = 0$. Riešenie (11.44) možno teda zapísať v tvare

$$J_z(x) = J_{z0} e^{-\gamma x} \quad (11.44a)$$

Komplexná konštantka šírenia γ sa dá napísať v tvare

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu\sigma} = \frac{1+j}{\delta} \quad (11.45)$$

kde α je koeficient útlmu udávaný v m^{-1} , alebo v neperoch na meter (Np/m – jednotku však SI-sústava nepripúšťa), prípadne v decibeloch na meter (dB/m) a β je už zavedený fázový koeficient udávaný v radiánoch na meter (rad/m). Veličina

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad [m] \quad (11.46)$$

je hĺbka vniku (skinová hĺbka – skin depth¹). Je to charakteristická hĺbka, s ktorou prúdová hustota a súčasne elektrické aj magnetické pole exponenciálne klesajú smerom do vnútra prostredia (materiálu). V hĺbke δ poklesnú amplitúdy všetkých troch veličín na $1/e$ -tinu ich povrchových hodnôt. Tento jav sa nazýva **povrchovým javom** alebo **skin-efektom**.

Na základe uvedenej analýzy možno napísať riešenie pre prúdovú harmonickú vlnu vynásobením výrazu (11.44a) s faktorom $e^{j\omega t}$ a využitím substitúcií (11.45), (11.46) takto

¹ Skin je anglický názov pre "kožu" alebo "šupku".

$$J_z(x, t) = J_{z0} e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)} \quad (11.47)$$

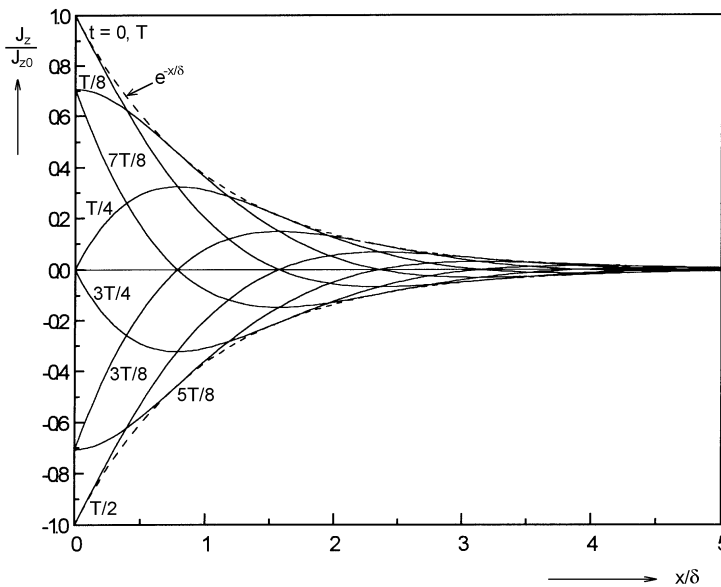
Skutočná prúdová hustota v prostredí je reálnou časťou výrazu (11.47), teda

$$J_z(x, t) = J_{z0} e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \quad (11.48)$$

Z výrazu (11.48) vidíme, že ide o silne tlmenú vlnu prúdovej hustoty, ktorá postupuje do vnútra materiálu. Prúdová hustota v čase kmitá s frekvenciou ω

Pre dobré vodiče je hĺbka vniku veľmi malá a závisí od frekvencie. V medi ($\sigma = 5,8 \cdot 10^7$ S/m, $\mu \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m) už pri pomerne nízkej frekvencii $f = 1$ MHz je δ iba

$$\delta \approx 6,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$



Obr. 11.3

Vidíme, že vysokofrekvenčné prúdy tečú iba vo veľmi tenkej vrstve (šupke) pod povrchom vodiča a smerom do jeho vnútra sa veľmi rýchlo exponenciálne tlmia. Na obr. 11.3 je znázornená závislosť normovanej prúdovej hustoty od pomeru x/δ pre niekoľko vybraných zlomkov periódy T . Je to silne tlmená prúdová vlna.

Nakoniec treba zodpovedať otázku, aké je elektromagnetické pole v prostredí. Jeho elektrická zložka je formálne daná rovnakými výrazmi ako (11.47), resp. (11.48), v ktorých treba zameniť $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{E}$. Magnetickú zložku poľa možno principiálne získať riešením rovnice (11.40b), jednoduchšie a poučnejšie je však jej vyjadrenie cez impedanciu prostredia. Podľa výrazu (11.30) impedancia Z_s vodivého (stratového) prostredia je daná vzťahom

$$Z_s = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon^*}}$$

kde ϵ^* je komplexná permitivita stratového materiálu daná výrazom (11.9), teda

$$\epsilon^* = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega}$$

Pre vysokovodivé prostredia $\sigma \gg \omega\epsilon$, takže komplexná permitivita je daná približným výrazom

$$\epsilon^* \approx -j \frac{\sigma}{\omega}$$

Dosadením do výrazu pre impedanciu dostaneme

$$Z_s = \sqrt{j \frac{\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = (1+j) \frac{1}{\sigma\delta} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\delta} e^{j\frac{\pi}{4}} = Z_s e^{j\frac{\pi}{4}}$$

kde

$$Z_s = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\delta} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}$$

je absolútna hodnota stratovej impedancie. Magnetickú zložku poľa možno potom na základe vzťahu (11.29) napísať v tvare

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{E}}{Z_s} = \frac{\mathbf{E}}{Z_s} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Využitím tohto vzťahu a vzťahov (11.38), (11.47) a (11.48) možno výrazy pre harmonickú elektromagnetickú vlnu v dobre vodivom prostredí napísať v tvare

$$\mathbf{E}_z(x, t) = \mathbf{E}_{z0} e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)} \quad (11.49a)$$

$$\mathbf{H}_y(x, t) = \frac{\mathbf{E}_{z0}}{Z_s} e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (11.49b)$$

alebo pomocou reálnych funkcií

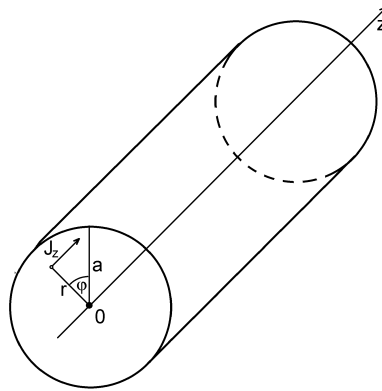
$$E_z(x, t) = E_{z0} e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \quad (11.50a)$$

$$H_y(x, t) = \frac{E_{z0}}{Z_s} e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (11.50b)$$

Vidíme, že elektrické a magnetické vektory ležia v priechnej rovine, smerom do vnútra vodiča sú tlmené s charakteristickou hĺbkou δ a sú fázovo navzájom posunuté o uhol $\pi/4 = 45^\circ$.

11.5.2 Povrchový jav vo valcovom vodiči

Analýza jednorozmerného povrchového javu s rovinným nekonečným rozhraním nezodpovedá reálnym prúdovým rozloženiam, je však matematicky jednoduchá. Prakticky dôležitejší je prípad prúdu valcovým vodičom umiestneným v dielektriku (vo vzduchu), alebo prúdu v dutej kovovej trubici s vnútorným vodičom (koaxiálny kábel), prípadne bez vnútorného vodiča (trubicový cylindrický vlnovod).



Obr. 11.4

Naznačíme preto riešenie problému vysokofrekvenčného prúdu vo valcovom vodiči s polomerom a , ak prúd tečie v smere osi vodiča z . Problém treba riešiť v cylindrických súradniciach r, φ, z . Nech má očakávaná prúdová hustota komplexnú amplitúdu $J_z(r)$, kde r je vzdialenosť od osi vodiča (pozri obr. 11.4). V takomto prípade treba rovnicu (11.40a) napísať pre cylindrickú súradnicu r (problém nezávisí od φ ani od z), pre ktorú má Laplaceov operátor tvar (pozri tabuľku 23)

$$\Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

Ak prúdovú hustotu označíme $J_z(r)$, prejde rovnica (11.40a) na tvar

$$\frac{d^2 J_z(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dJ_z(r)}{dr} - j\omega\mu\sigma J_z(r) = 0$$

a líši sa formálne od rovnice (11.41) iba členom $(1/r)dJ_z(r)/dr$, ktorý však spôsobí, že jej riešenie sa nedá vyjadriť pomocou elementárnych funkcií. Po úprave rovnica nadobudne tvar

$$r^2 \frac{d^2 J_z(r)}{dr^2} + r \frac{dJ_z(r)}{dr} + k^2 r^2 J_z(r) = 0 \quad (11.51)$$

kde

$$k^2 = -j\omega\mu\sigma = -j\frac{2}{\delta^2}$$

Rovnica (11.51) je v matematickej literatúre známa ako **Besselova diferenciálna rovnica**¹ nultého rádu. Jej riešenie je dané nekonečnými radmi nazývanými **Besselove funkcie** prvého a druhého druhu komplexného argumentu kr . Funkcia druhého druhu ale diverguje pre $r \rightarrow 0$, takže sa v riešení neobjaví. Prúdová hustota je potom daná Besselovou funkciou prvého druhu nultého rádu a má všeobecný tvar nekonečného radu

$$J_z(r) = J_z(kr) = J_{00} \left(1 - \frac{(kr)^2}{2^2} + \frac{(kr)^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{(kr)^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right) \quad (11.52)$$

Výraz v zátvorke (11.52) konverguje pre všetky konečné reálne aj komplexné hodnoty argumentu kr . Hodnotu J_{00} treba určiť z hraničnej podmienky na povrchu vodiča. Ak zavedieme ďalšiu substitúciu

$$kr = \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{\delta} r = \sqrt{-j} u$$

kde

$$u = \frac{\sqrt{2}}{\delta} r$$

rozpadne sa riešenie (11.52) na dva nekonečné rady, ktoré sú reálnou a imaginárnou časťou komplexnej funkcie prúdovej hustoty argumentu u . Riešenie má tvar

$$J_z = J_{00} \left\{ \left[1 - \frac{u^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{u^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \right] + j \left[\frac{u^2}{2^2} - \frac{u^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{u^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \right] \right\} \quad (11.53)$$

Funkcie v hranatých zátvorkách výrazu (11.53) majú špeciálne mená a ich tabuľky sa nachádzajú vo vybraných matematických príručkách.² Prvá sa volá

ber u – Besselova (funkcia) reálna argumentu u

a druhá

bei u – Besselova (funkcia) imaginárna argumentu u

teda

$$\text{ber } u = 1 - \frac{u^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{u^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \quad (11.54a)$$

¹ Pozri napr. Rektorys, K.: Přehled užití matematiky, SNTL Praha 1981

² Pozri napr. Jahnke, E., Emde, F., Lösch, F.: Tafeln höherer Funktionen, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1960

$$\text{bei } u = \frac{u^2}{2^2} - \frac{u^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{u^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \quad (11.54b)$$

Výraz pre amplitúdu prúdovej hustoty v cylindrickom vodiči možno teda napísať v tvare

$$\mathbf{J}_z = J_{00}(\text{ber } u + j \text{ bei } u) \quad (11.55)$$

alebo

$$\mathbf{J}_z(r) = J_{00} \left(\text{ber } \frac{\sqrt{2}r}{\delta} + j \text{ bei } \frac{\sqrt{2}r}{\delta} \right) \quad (11.56)$$

Na povrchu vodiča pre $r = a$ je amplitúda prúdovej hustoty

$$\mathbf{J}_z(a) = \mathbf{J}_{za} = J_{00} \left(\text{ber } \frac{\sqrt{2}a}{\delta} + j \text{ bei } \frac{\sqrt{2}a}{\delta} \right)$$

takže riešenie (11.56) možno nakoniec vyjadriť v tvare

$$\mathbf{J}_z(r) = \mathbf{J}_{za} \frac{\text{ber } \frac{\sqrt{2}r}{\delta} + j \text{ bei } \frac{\sqrt{2}r}{\delta}}{\text{ber } \frac{\sqrt{2}a}{\delta} + j \text{ bei } \frac{\sqrt{2}a}{\delta}} \quad (11.57)$$

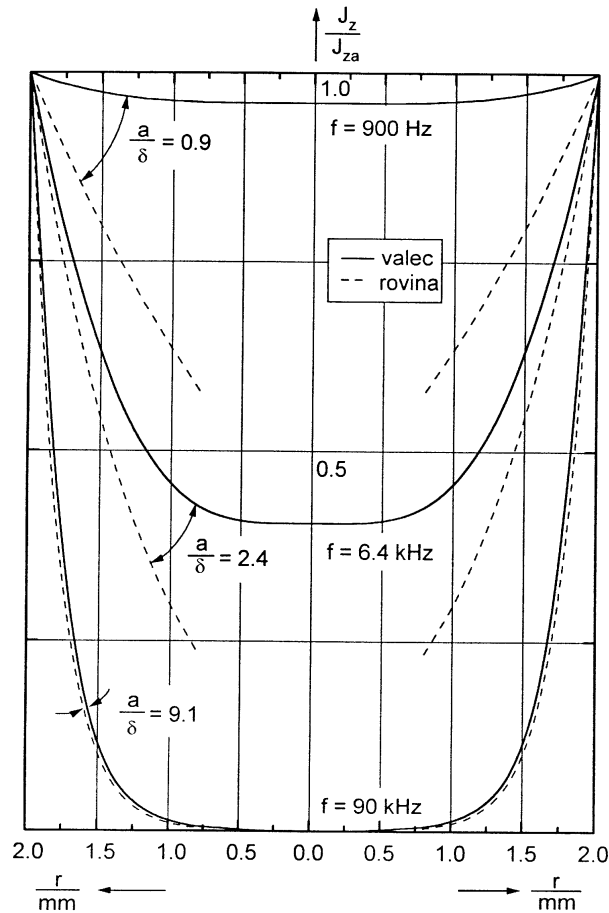
Reálna amplitúda prúdovej hustoty normovaná k jej povrchovej hodnote je daná výrazom

$$\frac{J_z(r)}{J_{za}} = \left(\frac{\text{ber}^2 \frac{\sqrt{2}r}{\delta} + \text{bei}^2 \frac{\sqrt{2}r}{\delta}}{\text{ber}^2 \frac{\sqrt{2}a}{\delta} + \text{bei}^2 \frac{\sqrt{2}a}{\delta}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11.58)$$

Výraz je implicitne funkciou parametrov μ a σ vodiča, frekvencie prúdu $f = \omega/(2\pi)$ a explicitne funkciou vzdialenosti r od osi vodiča. Numerická analýza takého výrazu je úloha pre počítač. Pre medený valcový vodič s polomerom $a = 2$ mm a pre tri frekvencie 900 Hz, 6,4 kHz a 90 kHz boli počítačom spracované a na obr. 11.5 grafmi znázornené normované prúdové hustoty podľa výrazu (11.58). Čiarkovane sú v obrázku nakreslené závislosti amplitúd prúdovej hustoty pre tie isté frekvencie, ale v rovinnom prípade, pre ktorý sú prúdové hustoty dané výrazom (11.48).

Z obrázka predovšetkým vidieť, že so zvyšovaním frekvencie je prienik prúdu do vnútra valcového vodiča stále menší a prúd tečie pod povrchom vodiča v stále menšej hĺbke. Zatiaľ čo pri pomere $a/\delta = 0,9$ ($f = 900$ Hz) je prúd rozložený na priereze vodiča prakticky rovnomerne, pri $a/\delta = 9$ ($f = 90$ kHz) prúdová hustota klesá približne na $1/e$ -tinu (0,368) povrchovej hodnoty pod povrchom už v hĺbke cca $\delta \approx 0,22$ mm. Je zrejme, že vnútrajšok vodiča je pri týchto a vyšších frekvenciách úplne nevyužitý, čo zvyšuje efektívny odpor vodiča. Ak sa má efektívny odpor znížiť, potom namiesto jedného hrubého vodiča treba

použiť zväzok navzájom izolovaných tenších vodičov, čím sa zvýši efektívna prierezová plocha a zníži sa vysokofrekvenčný odpor. Taký zväzok vodičov sa nazýva "vysokofrekvenčné lanko" a používa sa napr. na vinutie cievok pre vysokokvalitné LC obvody. Hrubé vodiče na vysokých frekvenciách by sa teoreticky mohli tiež nahradiť rúrkami kvôli úspore materiálu.



Obr. 11.5

Druhá vec, ktorú si možno na obrázku všimnúť, je hĺbka vniku prúdu v rovinnom prípade v porovnaní s valcovým prípadom. Ak je pomer $a/\delta \sim 1$ a menej (nízka frekvencia), prúd efektívnejšie preniká do valcového vodiča ako do rovinného. Ak je pomer a/δ podstatne väčší ako 1, ako je to v prípade $f = 90 \text{ kHz}$ na obrázku, keď $a/\delta \approx 9$, závislosť prúdovej hustoty od hĺbky r je prakticky rovnaká pre rovinný aj valcový prípad. V takých prípadoch zložitú analýzu valcového prípadu možno nahradiť jednoduchším rovinným prípadom.

11.6 ZÁKLADY TEÓRIE DLHÝCH VEDENÍ

11.6.1 Prúdové a napät'ové vlny na dvojvodičových vedeniach

Pod pojmom "dvojvodičové vedenie" máme na mysli signálový alebo energetický prenosový systém pozostávajúci z dvoch vodičov spájajúcich zdroj signálu (generátor) a spotrebič (záťaž), pričom v istom okamihu a v istej priechnej rovine prúd jedným vodičom tečie k záťaži a druhým naopak, ku generátoru. Jednoduchými príkladmi dvojvodičových vedení, analyzovanými už pri inej príležitosti, sú dvojvodičový symetrický kábel (dvojlinka) a koaxiálny kábel. Pri prenose jednosmerných a nízkofrekvenčných elektrických signálov resp. výkonov sú takéto vedenia jedinými a výhradnými prenosovými médiami a môžu slúžiť na prenos signálov až do frekvencií desiatok gigahertzov (GHz).

Menej jednoznačným je pojem "dlhé vedenie", pretože tento súvisí s frekvenciou prenášaného signálu. Ak na vstupe vedenia istej dĺžky l pôsobí generátor signálu s frekvenciou f , bude sa tento napät'ovo-prúdový signál šíriť pozdĺž vedenia s istou konečnou rýchlosťou rovnou fázovej rýchlosti v_f elektromagnetickej vlny v danom dielektrickom prostredí kábla, pretože s napätím a prúdom sú nerozlučne spojené ich elektrické a magnetické polia. Pri danej frekvencii vznikne na vedení okrem elektromagnetickej aj prúdová a napät'ová vlna s vlnovou dĺžkou $\lambda = v_f/f$. Ak je dĺžka l vedenia oveľa väčšia ako vlnová dĺžka λ , vedenie nazývame dlhým. V praxi sa za dlhé považujú už vedenia, pre ktoré je splnená podmienka

$$l \geq \lambda/4$$

Vidíme, že pojem "dlhé vedenie" je relatívny. Napríklad vedenie vysokého napätia v energetickej sieti je dlhým až pri dĺžke rádovo tisícov kilometrov, čo súvisí s nízkou frekvenciou napätia energetickej siete (50 Hz). Na druhej strane, úsek kábla určeného na prenos televízneho signálu pri frekvencii 1000 MHz je už "dlhý" keď má iba 10 centimetrov. Pri dlhom vedení sa súčasne vyžaduje, aby jeho priečne rozmery boli menšie ako štvrtina pracovnej vlnovej dĺžky.

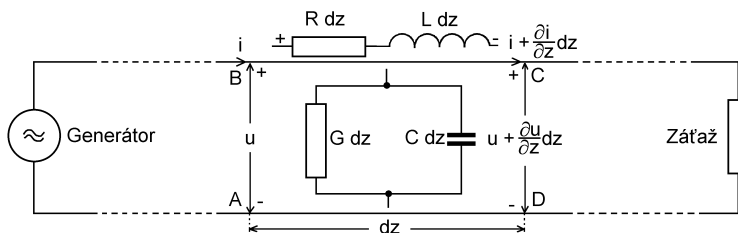
Dlhé vedenia sa niekedy nazývajú aj vedenia s rozloženými parametrami. Pri prenose signálov sa totiž okrem ich pozdĺžneho odporu a priečnej vodivosti uplatňujú aj pozdĺžna reaktancia a priečna susceptancia, ktoré možno chápať ako spojito rozložené pozdĺž vedenia, na rozdiel od sústredených parametrov, akými sú odpory rezistorov, indukčnosti cievok a kapacity kondenzátorov, z ktorých pozostávajú diskkrétne obvody na nízkych frekvenciách. Rozložené parametre vedenia sa uplatňujú pri veľkej dĺžke vedenia alebo pri vysokej frekvencii prenášaného signálu.

Každé dvojvodičové vedenie charakterizujú štyri primárne parametre:

- a) pozdĺžny odpor vedenia na jednotku dĺžky R [Ω/m] spôsobený nenulovou vodivosťou vodiča a skin efektom;
- b) pozdĺžna indukčnosť vedenia na jednotku jeho dĺžky L [H/m] spôsobená indukčnými vlastnosťami vodiča;
- c) priečna vodivosť vedenia na jednotku dĺžky G [S/m] spôsobená neideálnym dielektrikom, ktoré tvorí izoláciu medzi vodičmi;
- d) priečna kapacita vedenia na jednotku dĺžky C [F/m] predstavujúca kapacitné vlastnosti dvojice vodičov.

Nekonečne krátky úsek vedenia dz má potom pozdĺžny odpor jedného vodiča Rdz , priečnu vodivosť Gdz , pri frekvencii ω pozdĺžnu indukčivnú reaktanciu ωLdz a priečnu kapacitnú susceptanciu ωCdz . Treba mať na pamäti, že v dôsledku skinefektu sú aj pozdĺžny odpor aj priečna vodivosť závislé od frekvencie.

Vedenie, ktorého parametre pozdĺž jeho dĺžky zostávajú konštantné, sa nazýva homogénne alebo regulárne. V našej teórii sa budeme zaoberať iba vlastnosťami homogénnych vedení. Z nehomogénnych vedení je dôležité najmä exponenciálne vedenie, ktorého úseky sa často používajú ako spojovacie články medzi vedeniami s rôznymi parametrami.



Obr. 11.6

Na obr. 11.6 je zobrazený infinitesimalný úsek vedenia dĺžky dz . Predpokladajme, že na vstup vedenia je pripojený generátor napätia, ktoré závisí od času, a nemusí byť nevyhnutne harmonické. Pozdĺž vedenia sa vytvorí napätie závislé od času t a vzdialenosti z . Funkčné závislosti napätia a prúdu pozdĺž vedenia označíme $u = u(z, t)$ a $i = i(z, t)$. Na vybraný úsek vedenia môžeme aplikovať Kirchhoffove zákony. Na vstupe medzi bodmi A a B vybraného úseku vedenia je napätie u a prúd v bode B pozdĺž vedenia je i . Na jeho výstupe medzi bodmi C a D je napätie $u + (\partial u / \partial z) dz$, v bode C je pozdĺžny prúd $i + (\partial i / \partial z) dz$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme odpor a indukčnosť spätného, spodného vodiča sústrediť do horného a spodný považovať za bezodporový a bezindukčný. Podľa druhého Kirchhoffovho zákona pre uzavretý obvod ABCDA platí

$$u - \left(Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \right) dz - \left(u + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) = 0$$

Podľa prvého Kirchhoffovho zákona rozdiel prúdov v bode B a C sa rovná zvodovému prúdu cez vodivosť G a kapacitu C na dĺžke úseku dz , teda

$$i - \left(Gu + C \frac{\partial u}{\partial t} \right) dz - \left(i + \frac{\partial i}{\partial z} dz \right) = 0$$

Z týchto rovníc po úprave dostaneme

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (11.59a)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = Gu + C \frac{\partial u}{\partial t} \quad (11.59b)$$

V rovniciach (11.59) možno separovať u a i . Derivujme rovnicu (11.59a) podľa súradnice z a dosadíme za $\partial i / \partial z$ z rovnice (11.59b). Dostaneme

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R \frac{\partial i}{\partial z} + L \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = -RGu - RC \frac{\partial u}{\partial t} + L \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} \quad (11.60)$$

Derivujeme ďalej rovnicu (11.59b) podľa času

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = G \frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

a dosadíme do rovnice (11.60). Po úprave dostaneme diferenciálnu rovnicu pre napätie u v tvare

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = RGu + (RC + GL) \frac{\partial u}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11.61a)$$

Podobným postupom dostaneme symetrickú rovnicu pre prúd i

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = RG i + (RC + GL) \frac{\partial i}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (11.61b)$$

Z historických dôvodov sa rovnice (11.59), resp. (11.61) nazývajú **telegrafné rovnice**, pretože boli odvodené a analyzované v čase vzniku drôtovej telegrafie.¹ Ich riešením pri zadaných začiatočných a hraničných podmienkach dostaneme napätia a prúdy na vedení pre ľubovoľné časové priebehy vstupného napätia.

V praxi sú najdôležitejšie periodické alebo jednoduché harmonické napät'ové a prúdové priebehy, ktoré v komplexnom vyjadrení majú tvar $U(z)e^{j\omega t}$ a $I(z)e^{j\omega t}$, kde $U(z)$ a $I(z)$ sú komplexné amplitúdy napätia a prúdu na vedení. Ak v rovniciach (11.59) nahradíme prúd a napätie uvedenými komplexnými obrazmi, dostaneme po úprave diferenciálne rovnice pre komplexné amplitúdy v tvare

$$-\frac{dU}{dz} = (R + j\omega L)I = ZI \quad (11.62a)$$

$$-\frac{dI}{dz} = (G + j\omega C)U = YU \quad (11.62b)$$

kde $Z = R + j\omega L$ je pozdĺžna impedancia vedenia na jednotku jeho dĺžky a $Y = G + j\omega C$ je jeho priečna admitancia na jednotku dĺžky. V rovniciach (11.62) možno tiež separovať premenné. Ich derivovaním podľa z a kombináciou výsledku derivácie s pôvodnými rovnicami dostaneme rovnice

$$\frac{d^2 U}{dz^2} = \gamma^2 U \quad (11.63a)$$

$$\frac{d^2 I}{dz^2} = \gamma^2 I \quad (11.63b)$$

¹ Kirchhoff, G. R.: Über die Bewegung der Elektrizität in Drähten, Pogg. Ann., Bd. 100 (1857)

Heaviside, O.: On the Extra Current, Phil. Mag., vol. 2 (1876), p. 53

Poincaré, H.: Sur la propagation de l'électricité, Comptes rendus, vol. 17 (1897), p. 1027

$$\text{kde} \quad \gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (11.64)$$

je **konštanta šírenia napät'ových a prúdových vln**. Rovnice (11.63) sú telegrafné rovnice pre harmonické napät'ové a prúdové priebehy. Z matematického hľadiska sú to obyčajné diferenciálne rovnice druhého rádu, ktorých všeobecné riešenia majú tvar

$$U(z) = U_0^+ e^{-\gamma z} + U_0^- e^{\gamma z} \quad (11.65a)$$

$$I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z} \quad (11.65b)$$

Vzhľadom na to, že konštanta šírenia γ je vo všeobecnosti komplexné číslo a časový faktor je $e^{j\omega t}$, každé z riešení predstavuje tlmenú napät'ovú resp. prúdovú vlnu ako superpozíciu dvoch komponent šíriacich sa v navzájom opačných smeroch pozdĺž osi vedenia (osí z).

Integračné konštanty $U_0^+, U_0^-, I_0^+, I_0^-$ predstavujú komplexné amplitúdy postupujúcich a odrazených napät'ových a prúdových vln v referenčnej rovine $z = 0$ a treba ich určiť z hraničných podmienok, napríklad z prúdu a napätia na vstupe a výstupe vedenia. Našťastie počet integračných konštánt možno redukovať na polovicu, pretože prúdy a napätie nie sú nezávislé, ale sú viazané rovnicami (11.62). Skutočne, využitím rovnice (11.62a) môžeme napísať

$$I(z) = -\frac{1}{Z} \frac{dU}{dz} = \frac{\gamma}{Z} (U_0^+ e^{-\gamma z} - U_0^- e^{\gamma z}) = \frac{1}{Z_v} (U_0^+ e^{-\gamma z} - U_0^- e^{\gamma z})$$

a riešenia (11.65) nadobudnú tvar

$$U(z) = U_0^+ e^{-\gamma z} + U_0^- e^{\gamma z} \quad (11.66a)$$

$$I(z) = \frac{U_0^+}{Z_v} e^{-\gamma z} - \frac{U_0^-}{Z_v} e^{\gamma z} \quad (11.66b)$$

Veličina

$$Z_v = \frac{Z}{\gamma} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (11.67)$$

je **charakteristická (vlnová) impedancia** vedenia, ktorá, ako vidíme, závisí iba od primárnych parametrov vedenia a od frekvencie ω . Neskôr uvidíme, že udáva pomer komplexných amplitúd napätia a prúdu iba postupujúcej vlny od zdroja k záťaži. Integračné konštanty U_0^+ a U_0^- treba určiť z okrajových podmienok. Ako okrajové podmienky možno zvoliť napríklad vstupné napätie U_{vst} a vstupný prúd I_{vst} . Nech sa teda vstup vedenia nachádza v rovine $z = 0$ ako na obr. 11.7, kde $U = U_{vst}$ a $I = I_{vst}$. Z výrazov (11.66) plynie, že

$$U_{vst} = U_0^+ + U_0^- \quad \text{a} \quad Z_v I_{vst} = U_0^+ - U_0^-$$

Riešením tejto sústavy rovníc pre konštanty U_0^+ a U_0^- dostaneme

$$U_0^+ = \frac{U_{vst} + Z_v I_{vst}}{2} \quad U_0^- = \frac{U_{vst} - Z_v I_{vst}}{2} \quad (11.68)$$

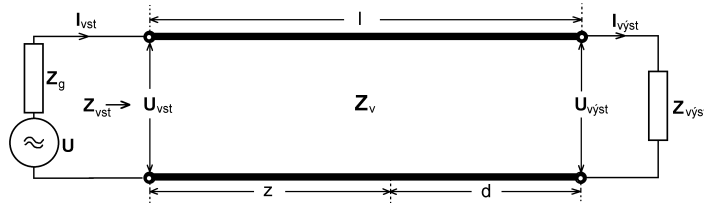
Dosadením za integračné konštanty vo výrazoch (11.66) a využitím hyperbolických funkcií

$$\sinh \gamma z = \frac{e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}}{2} \quad \cosh \gamma z = \frac{e^{\gamma z} + e^{-\gamma z}}{2} \quad (11.69)$$

dostaneme výrazy pre komplexné amplitúdy napätia a prúdu v tvare

$$U(z) = U_{vst} \cosh \gamma z - Z_v I_{vst} \sinh \gamma z \quad (11.70a)$$

$$I(z) = I_{vst} \cosh \gamma z - \frac{U_{vst}}{Z_v} \sinh \gamma z \quad (11.70b)$$



Obr. 11.7

Druhá možnosť voľby hraničných podmienok je vybrať ich ako výstupné veličiny na konci vedenia dĺžky l (pozri obr. 11.7). Nech teda pre $z = l$ je $U = U_{vyst}$ a $I = I_{vyst}$. Využitím výrazov (11.66) dostaneme pre konštanty U_0^+ a U_0^- systém rovníc

$$U_{vyst} = U_0^+ e^{-\gamma l} + U_0^- e^{\gamma l}$$

$$Z_v I_{vyst} = U_0^+ e^{-\gamma l} - U_0^- e^{\gamma l}$$

z čoho

$$U_0^+ = \frac{U_{vyst} + Z_v I_{vyst}}{2} e^{\gamma l} \quad U_0^- = \frac{U_{vyst} - Z_v I_{vyst}}{2} e^{-\gamma l} \quad (11.71)$$

Dosadením konštant do výrazov (11.66) dostaneme pre amplitúdy napätia a prúdu výrazy

$$U(z) = U_{vyst} \cosh \gamma(l-z) + Z_v I_{vyst} \sinh \gamma(l-z) \quad (11.72a)$$

$$I(z) = I_{vyst} \cosh \gamma(l-z) + \frac{U_{vyst}}{Z_v} \sinh \gamma(l-z) \quad (11.72b)$$

Namiesto vzdialenosti od začiatku vedenia je v tomto prípade výhodnejšie merať vzdialenosť d od konca vedenia, teda $d = l - z$, (pozri obr. 11.7) a výrazy (11.72) prepísať do tvaru

$$U(d) = U_{výst} \cosh \gamma d + Z_v I_{výst} \sinh \gamma d \quad (11.73a)$$

$$I(d) = I_{výst} \cosh \gamma d + \frac{U_{výst}}{Z_v} \sinh \gamma d \quad (11.73b)$$

Všimnime si ešte konštantu šírenia γ (11.64), ktorá závisí od primárnych parametrov vedenia a od frekvencie ω . Je to sekundárny parameter vedenia, vo všeobecnosti komplexné číslo, ktoré možno napísať v tvare

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (11.74)$$

kde α [m^{-1}] je koeficient útlmu a β [$rad.m^{-1}$] je fázový koeficient. Porovnaním (11.64) a (11.74) dostaneme vzťah

$$\alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

z ktorého môžeme vypočítať α a β . Umocníme rovnicu na druhú a oddelíme reálne a imaginárne časti. Získame systém dvoch rovníc, ktorých riešením dostaneme zložité výrazy pre koeficient útlmu a fázový koeficient

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (RG - \omega^2 LC) \right]} \quad (11.75a)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (RG - \omega^2 LC) \right]} \quad (11.75b)$$

Ak frekvencia klesá k nule, t. j. ak

$$\omega = 0 \quad (11.76)$$

potom limitná hodnota koeficientu útlmu

$$\alpha = \sqrt{RG} \quad (11.77a)$$

a fázový koeficient

$$\beta = 0 \quad (11.77b)$$

Je to prípad prenosového vedenia pracujúceho s konštantným napätím, ktorý už bol analyzovaný v kapitole 5 (pozri úlohu 120).

Ak naopak, frekvencia rastie a platí, že

$$\omega L \gg R \quad \text{a} \quad \omega C \gg G \quad (11.78)$$

s využitím Newtonovho binomického vzorca možno písať

$$\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2} \approx \omega L + \frac{1}{2} \frac{R^2}{\omega L} \quad \sqrt{\omega^2 C^2 + G^2} \approx \omega C + \frac{1}{2} \frac{G^2}{\omega C}$$

Dosadením týchto výrazov do vzťahov (11.75) a zanedbaním členov so súčinnmi RG dostaneme výrazy pre vysokofrekvenčné hodnoty koeficientu útlmu a fázového koeficientu v tvaroch

$$\alpha \approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (11.79a)$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{LC} \quad (11.79b)$$

V limitnom prípade bezstratového vedenia, ak

$$R = 0 \qquad G = 0$$

je

$$\alpha = 0 \quad (11.80a)$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \quad (11.80b)$$

Tento prípad dôležitý pre prax bude analyzovaný v odseku 11.6.3.

11.6.2 Impedancia na vedení a koeficient odrazu

Dôležitá veličina na vedení je impedancia. **Impedancia v ľubovoľnej priechnej rovine vedenia udáva pomer komplexných amplitúd napätia $U(z)$ a prúdu $I(z)$.** Na vstupe a výstupe vedenia je impedancia daná výrazmi

$$Z_{vst} = \frac{U_{vst}}{I_{vst}} \quad (11.81a)$$

$$Z_{výst} = \frac{U_{výst}}{I_{výst}} \quad (11.81b)$$

Ak je daná vstupná impedancia, potom impedanciu $Z(z)$ v ľubovoľnej rovine vo vzdialenosti z od vstupu vedenia dostaneme delením výrazu (11.70a) s (11.70b), pričom využijeme vzťahy (11.81a). Dostaneme

$$Z(z) = Z_v \frac{Z_{vst} - Z_v \operatorname{tgh} \gamma z}{Z_v - Z_{vst} \operatorname{tgh} \gamma z} \quad (11.82)$$

V prípade, že je daná výstupná impedancia, vydelíme vzťah (11.73a) výrazom (11.73b) a využijeme vzťah (11.81b), čím dostaneme výraz pre impedanciu vo vzdialenosti $d = l - z$ od konca vedenia v tvare

$$Z(d) = Z_v \frac{Z_{výst} + Z_v \operatorname{tgh} \gamma d}{Z_v + Z_{výst} \operatorname{tgh} \gamma d} \quad (11.83)$$

Výrazy (11.82) a (11.83) umožňujú získať transformačné vzťahy medzi vstupnou a výstupnou impedanciou na vedení. Ak vo vzorci (11.82) položíme $z = l$, dostaneme výstupnú impedanciu na vedení v tvare

$$Z_{výst} = Z_v \frac{Z_{vst} - Z_v \operatorname{tgh} \gamma l}{Z_v - Z_{vst} \operatorname{tgh} \gamma l} \quad (11.84)$$

alebo z výrazu (11.83) pre $d = -l$ výraz pre vstupnú impedanciu

$$Z_{vst} = Z_v \frac{Z_{výst} + Z_v \operatorname{tgh} \gamma l}{Z_v + Z_{výst} \operatorname{tgh} \gamma l} \quad (11.85)$$

Pri analýze dlhých vedení sa popri pojme impedancie často pracuje s jej prevrátenou hodnotou, admitanciou Y . Je to vhodné najmä vtedy, ak je na dlhom vedení zapojených viac elektrických prvkov paralelne. Admitančné vzťahy získané ako podiel komplexných amplitúd prúdu a napätia sú formálne zhodné s výrazmi (11.82) až (11.85), ak v nich urobíme zámenu

$$Y \rightarrow \frac{1}{Z}$$

Pre opis vlnového poľa na vedení je vhodné zaviesť komplexnú veličinu závislú od polohy na vedení nazývanú **koefficient odrazu**. Koefficienty odrazu sa definujú zvlášť pre napäťovú a zvlášť pre prúdovú vlnu, líšia sa však iba znamienkom.

Uvažujme riešenia (11.65) telegrafných rovníc, ktoré sú superpozíciou postupujúcej (+) a odrazenej (-) vlny a možno ich napísať v tvare

$$U(z) = U^+(z) + U^-(z) = U_0^+ e^{-\gamma z} + U_0^- e^{\gamma z} \quad (11.86a)$$

$$I(z) = I^+(z) + I^-(z) = \frac{U_0^+}{Z_v} e^{-\gamma z} - \frac{U_0^-}{Z_v} e^{\gamma z} \quad (11.86b)$$

kde

$$U^+(z) = U_0^+ e^{-\gamma z} \quad I^+(z) = \frac{U_0^+}{Z_v} e^{-\gamma z} \quad (11.87)$$

sú amplitúdy postupujúcej napäťovej a prúdovej vlny a

$$U^-(z) = U_0^- e^{\gamma z} \quad I^-(z) = -\frac{U_0^-}{Z_v} e^{\gamma z} \quad (11.88)$$

sú amplitúdy odrazených vln. **Napäťový koefficient odrazu** $\rho_u(z)$ na vedení definujeme ako pomer odrazenej a postupujúcej napäťovej vlny, teda

$$\rho_u(z) = \frac{U^-(z)}{U^+(z)} = \frac{U_0^-}{U_0^+} e^{2\gamma z} = \rho_{0u} e^{2\gamma z} \quad (11.89)$$

kde

$$\rho_{0u} = \frac{U_0^-}{U_0^+}$$

je napätový koeficient odrazu v referenčnej rovine $z = 0$. Podobne možno pre prúdovú vlnu definovať **prúdový koeficient odrazu**

$$\rho_i(z) = \frac{I^-(z)}{I^+(z)} = -\frac{U_0^-}{U_0^+} e^{2\gamma z} = -\rho_{0u} e^{2\gamma z} = -\rho_u(z) \quad (11.90)$$

ktorý sa od napätového koeficientu odrazu skutočne líši iba znamienkom. Treba si uvedomiť, že s pojmom odraz elektromagnetických alebo prúdovo napätových vln je spojený reálny odraz časti energie smerom ku generátoru.

Pre obidva koeficienty odrazu je vhodné zaviesť spoločné označenie $\rho(z)$ vzťahom

$$\rho(z) = \rho_u(z) = -\rho_i(z)$$

Ak sú konštanty U_0^+, U_0^- dané vstupnými amplitúdami napätia a prúdu, teda výrazmi (11.68), potom

$$\rho_{0u} = \frac{U_0^-}{U_0^+} = \frac{Z_{vst} - Z_v}{Z_{vst} + Z_v} = \rho_{vst} \quad (11.91)$$

a ďalej

$$\rho(z) = \frac{Z_{vst} - Z_v}{Z_{vst} + Z_v} e^{2\gamma z} = \rho_{vst} e^{2\gamma z} \quad (11.92)$$

Z výrazu (11.91) vidieť, že koeficient odrazu na vstupe vedenia súvisí so vstupnou impedanciou a podľa výrazu (11.92) sa transformuje pozdĺž vedenia. Netreba zvlášť zdôrazňovať, že koeficient odrazu je bezrozmerné komplexné číslo definované v komplexnej rovine na kruhu s polomerom 1.

S využitím výrazov (11.86) možno nájsť všeobecné vzťahy medzi impedanciou a koeficientom odrazu v ľubovoľnej rovine z na vedení. Platí totiž

$$Z(z) = \frac{U(z)}{I(z)} = \frac{U^+(z) + U^-(z)}{I^+(z) + I^-(z)} = \frac{U^+(z)}{I^+(z)} \frac{1 + \frac{U^-(z)}{U^+(z)}}{1 + \frac{I^-(z)}{I^+(z)}}$$

Z výrazov (11.87) plynie, že

$$\frac{U^+(z)}{I^+(z)} = Z_v \quad (11.93)$$

a s použitím výrazov (11.89) a (11.90) môžeme vzťah pre impedanciu napísať v tvare

$$Z(z) = Z_v \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)} \quad (11.94)$$

z čoho koeficient odrazu

$$\rho(z) = \frac{Z(z) - Z_v}{Z(z) + Z_v} \quad (11.95)$$

Z výrazu (11.95) plynie zaujímavá a dôležitá skutočnosť: na vedení v rovine z nebudú žiadne odrazy, teda koeficienty odrazu sa budú rovnať nule [$\rho(z) = 0$] vtedy, ak sa bude v danej rovine impedancia $Z(z)$ rovnať charakteristickej impedancii vedenia Z_v , t. j. ak

$$Z(z) = Z_v$$

V takom prípade hovoríme o režime prispôsobenia na vedení, kedy celý výkon bez odrazov postupuje v rovine z od generátora smerom k záťaži. Vo všetkých ostatných prípadoch na vedení existuje postupujúca aj odrazená vlna, ktoré spolu interferujú a vytvárajú charakteristické konfigurácie napät'ových a prúdových vln, ktoré sa nazývajú **stojaté vlny**. Ich vlastnosti budeme analyzovať v odseku 11.6.4.

11.6.3 Bezstratové dlhé vedenia

Bezstratové vedenia sú také, ktorých pozdĺžny odpor R a priečna vodivosť G sú nulové, teda $R = 0$, $G = 0$. Reálne vedenia majú vždy určité straty, ale v mnohých prípadoch sú tak malé, že ich možno zanedbať, čím sa teoretická analýza vedení značne zjednoduší. Konštanta šírenia γ daná výrazom (11.64) sa na bezstratovom vedení redukuje na tvar

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2 LC} = j\omega\sqrt{LC} = j\beta$$

z čoho vyplýva, že koeficient útlmu

$$\alpha = 0 \quad (11.96a)$$

a fázový koeficient

$$\beta = \frac{\omega}{v_f} = \omega\sqrt{LC} \quad (11.96b)$$

Fázová rýchlosť prúdovo-napät'ových vln na vedeniach je teda daná výrazom

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad [\text{m.s}^{-1}] \quad (11.97)$$

Charakteristická impedancia definovaná výrazom (11.67) sa stáva reálnou a prejde na jednoduchý tvar

$$Z_v = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad [\Omega] \quad (11.98)$$

Z výrazov (11.96) plynie, že postupujúca aj odrazená prúdovo-napät'ová vlna majú konštantné amplitúdy nezávislé od súradnice z a z výrazu (11.98) vidieť, že prúdy a napätia týchto vln sú vo fáze vzhľadom na reálnosť Z_v . Reálna veličina Z_v daná

výrazom (11.98) sa často nazýva vlnový odpor vedenia a závisí iba od geometrie vedenia a elektrických vlastností prostredia vyplňajúceho vedenie. Tak napr. koaxiálne vedenie s polomerom vnútorného vodiča a a s vnútorným polomerom plášťa b , ktorý je naplnený neferomagnetickým dielektrikom ($\mu_r = 1$) s relatívnou permitivitou ϵ_r , má kapacitu

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln \frac{b}{a}} \quad [\text{F.m}^{-1}]$$

a indukčnosť

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad [\text{H.m}^{-1}]$$

[pozri odsek 3.5 výraz (3.16) a odsek 7.5.1 výraz (7.38)]. Dosadením do výrazu (11.98) pre vlnový odpor koaxiálneho kábla dostaneme

$$Z_v = \frac{Z_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \approx \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a} \quad [\Omega] \quad (11.99)$$

kde

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_r}} \approx \frac{376,73}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad [\Omega]$$

je charakteristická impedancia neohraničeného dielektrika. Koaxiálne káble sa vyrábajú s vlnovými odporami v rozsahu 50 až 75 Ω . Dá sa ukázať, že v tomto intervale hodnôt Z_v majú koaxiálne káble s malými stratami ploché minimum útlmu a minimálnu intenzitu elektrického poľa na povrchu vnútorného vodiča (pozri úlohu 39).

Vlnový odpor dvojvodičového symetrického netieneného kábla (dvojlinky) je daný výrazom

$$Z_v = \frac{Z_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a} \quad (11.100)$$

kde d je osová vzdialenosť vodičov a a je polomer vodiča. Typická hodnota vlnových odporov vyrábaných dvojliniek je 300 Ω .

Výrazy (11.70) pre komplexné amplitúdy napätia a prúdu na bezstratovom vedení možno s využitím vzťahov

$$\cosh(j\beta z) = \cos \beta z \quad \sinh(j\beta z) = j \sin \beta z$$

prepísať do tvaru

$$U(z) = U_{vst} \cos \beta z - j Z_v I_{vst} \sin \beta z \quad (11.101a)$$

$$I(z) = I_{vst} \cos \beta z - j \frac{U_{vst}}{Z_v} \sin \beta z \quad (11.101b)$$

Ak sú dané výstupné amplitúdy napätí a prúdov, potom tieto amplitúdy vo vzdialenosti d od konca vedenia budú podľa vzťahov (11.73) dané výrazmi

$$U(d) = U_{vyst} \cos \beta d + j Z_v I_{vyst} \sin \beta d \quad (11.102a)$$

$$I(d) = I_{vyst} \cos \beta d + j \frac{U_{vyst}}{Z_v} \sin \beta d \quad (11.102b)$$

Impedančné vzťahy (11.82), (11.83) a (11.85) prejdú pre bezstratové vedenie na tvary

$$Z(z) = Z_v \frac{Z_{vst} - j Z_v \operatorname{tg} \beta z}{Z_v + j Z_{vst} \operatorname{tg} \beta z} \quad (11.103)$$

$$Z(d) = Z_v \frac{Z_{vyst} + j Z_v \operatorname{tg} \beta d}{Z_v + j Z_{vyst} \operatorname{tg} \beta d} \quad (11.104)$$

$$Z_{vst} = Z_v \frac{Z_{vyst} + j Z_v \operatorname{tg} \beta l}{Z_v + j Z_{vyst} \operatorname{tg} \beta l} \quad (11.105)$$

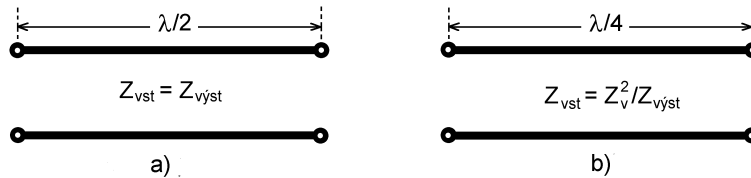
Jednou z najčastejších úloh pri analýze dlhých prenosových vedení je transformácia impedancie medzi vstupom, výstupom alebo ľubovoľnou rovinou na vedení podľa výrazov (11.103) až (11.105). V praxi sa k týmto výpočtom používajú rôzne diagramy, z ktorých najznámejší je **impedančný kruhový diagram** (Smithov diagram).¹

Nakoniec uvedieme niekoľko špeciálnych, v praxi dôležitých prípadov transformácie impedancie podľa vzťahu (11.105):

1. Vedenie, ktorého dĺžka $l = n\lambda/2$, kde $n = 1, 2, 3, \dots$. Fáza $\beta l = (2\pi/\lambda)n\lambda/2 = n\pi$ a $\operatorname{tg} n\pi = 0$. Ak $n = 1$ vedenie sa volá **polvlnové vedenie**. Podľa vzťahu (11.105)

$$Z_{vst} = Z_{vyst} \quad (11.106)$$

Impedancia sa transformuje v pomere 1 : 1. Pri analýze prenosových vlastností bezstratového vedenia každý jeho homogénny úsek dĺžky $n\lambda/2$ možno ignorovať (obr. 11.8a).



Obr. 11.8

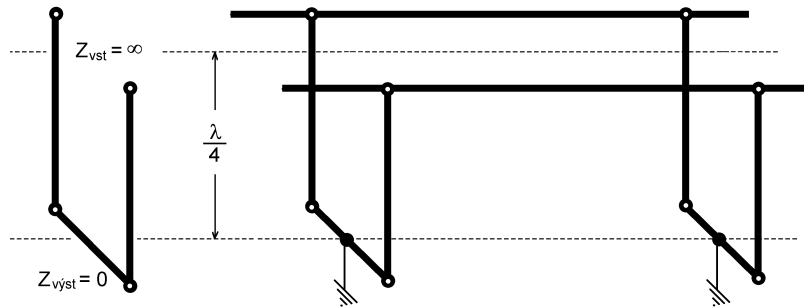
2. Vedenie, ktorého dĺžka $l = (2n + 1)\lambda/4$, pre $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Fáza $\beta l = (n + 1/2)\pi$ a $\operatorname{tg}(n + 1/2)\pi = \pm\infty$. Ak $n = 0$, ide o **štvrtvlnové vedenie** (obr. 11.8b). Podľa vzťahu (11.105)

¹ Smith, P.H.: Transmission Line Calculator, Electronics **12**, 29 (1939).

Pozri tiež: Tirpák, A.: Elektronika veľmi vysokých frekvencií, Vydavateľstvo UK Bratislava 2001
Tysl, V., Růžička, V.: Teoretické základy mikrovlnné techniky, SNTL Praha 1989

$$Z_{vst} = \frac{Z_v^2}{Z_{výst}} \quad (11.107)$$

Na takom úseku vedenia dochádza k inverznej transformácii impedancie. Štvrťvlnové vedenia má veľký význam v prenosovej technike. Predovšetkým sa často využíva na prispôsobenie, pretože pri požadovanej výstupnej impedancii možno vstupnú impedanciu nastaviť vhodnou voľbou Z_v . Ak je štvrťvlnové vedenie na konci skratované, jeho vstupná impedancia je pri danej vlnovej dĺžke (danej frekvencii) nekonečná. Na vstupných svorkách sa také vedenie správa ako ideálny paralelný rezonančný obvod, ktorý možno okrem iného využiť aj na mechanickú fixáciu vedenia ako **štvrťvlnový izolátor** podľa obr. 11.9, žiaľ, iba pri jednej vlnovej dĺžke, resp. frekvencii.



Obr. 11.9

3. Bezstratové vedenie dĺžky l na konci skratované ($Z = 0$) pri iných dĺžkach ako $\lambda/4$ má v súhlase s výrazom (11.105) vstupnú impedanciu

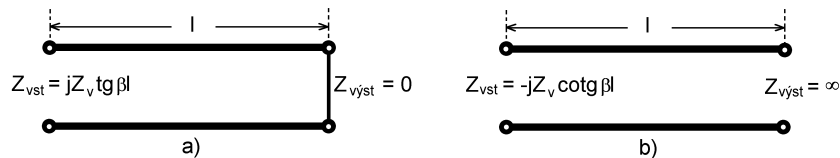
$$Z_{vst} = j Z_v \operatorname{tg} \beta l \quad (11.108)$$

Táto impedancia je výlučne induktívna alebo kapacitná reaktancia závislá od dĺžky vedenia l (obr. 11.10a).

4. Bezstratové vedenie dĺžky l , na konci otvorené ($Z_{výst} = \infty$) má pri iných dĺžkach ako $\lambda/4$ v súhlase s výrazom (11.105) vstupnú impedanciu

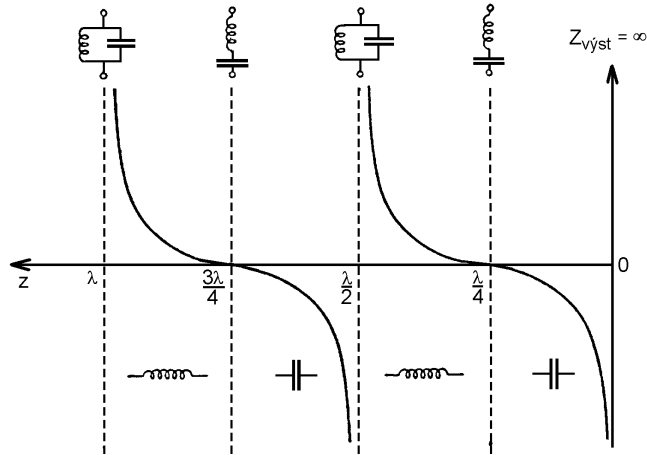
$$Z_{vst} = -j Z_v \operatorname{cotg} \beta l \quad (11.109)$$

ktorá je len kapacitná alebo len induktívna reaktancia (obr. 11.10b).



Obr. 11.10

Skratovanými alebo otvorenými vedeniami možno na veľmi vysokých frekvenciách realizovať kapacitné alebo indukčné reaktancie, ktoré vyžadujú malé kapacity alebo indukčnosti, a neboli by realizovateľné sústredenými kondenzátormi, prípadne cievkami. Na obr. 11.11. je symbolicky znázornená závislosť vstupnej reaktancie vedenia, ktoré je na konci otvorené ($Z_{výst} = \infty$) od jeho dĺžky $l = z$.



Obr. 11.11

11.6.4 Stojaté vlny na bezstratových vedeniach

Stojaté vlny na vedeniach sú dôsledkom interferencie postupujúcej a odrazenej vlny a vznikajú vždy, keď sa záťažová impedancia vedenia nerovná jeho vlnovej impedancii. Tvar a poloha stojatej vlny na vedení tesne súvisí s koeficientmi odrazu. Koeficient odrazu na bezstratovom vedení sa na základe výrazu (11.92) dá napísať v tvare

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-j2\beta z} = |\rho_0| e^{j\Phi(z)} \quad (11.110)$$

kde

$$\rho_0 = |\rho_0| e^{j\Phi_0} \quad (11.111)$$

je koeficient odrazu v referenčnej rovine ($z = 0$) s referenčnou fázou Φ_0 . Fáza koeficientu odrazu je daná výrazom

$$\Phi(z) = 2\beta z + \Phi_0 \quad (11.112)$$

Na bezstratovom vedení je modul koeficientu odrazu $|\rho|$ konštantný a môže nadobúdať hodnoty v rozsahu od 0 po 1. Pri $|\rho| = 0$, t. j. vtedy, keď $Z_{výst} = Z_v$, odrazy na vedení nenastávajú. Ak je naopak, $|\rho| = 1$, odraz je totálny a nastáva vtedy, keď je výstupná impedancia nulová $Z_{výst} = 0$ (t. j. vedenie je skratované) alebo nekonečná $Z_{výst} = \infty$ (t. j. vedenie je otvorené). Z výrazov (11.110) až (11.112) vidíme, že na bezstratovom vedení sa hodnoty koeficientov odrazu periodicky opakujú vo vzdialenostiach

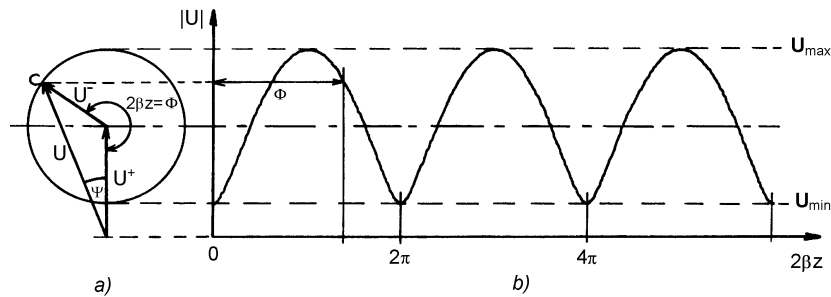
$$\Delta z = \frac{2\pi}{2\beta} = \frac{\lambda}{2} \quad (11.113)$$

Koeficient odrazu možno využiť na opis vlnového poľa postupujúcej a odrazenej vlny. Ak napríklad vo vzťahu (11.86a) dosadíme za $U^-(z)$ podľa (11.89), dostaneme pre amplitúdu výsledného napätia na vedení výraz

$$\begin{aligned} U(z) &= U^+(z) + U^-(z) = U^+(z) + \rho(z)U^+(z) = U^+(z)[1 + \rho(z)] = \\ &= U^+(z) \left[1 + |\rho_0| e^{j(2\beta z + \Phi_0)} \right] \end{aligned} \quad (11.114)$$

Pravá strana tohto výrazu je súčtom dvoch "komplexných vektorov" (fázorov) $U^+(z)$ a $\rho(z)U^+(z)$, pričom veľkosť vektora $U^+(z)$ zostáva pozdĺž bezstratového vedenia konštantná. Ak vektor U^+ vezmeme za vzťažný a bez ujmy na všeobecnosti položíme $\Phi_0 = 0$, možno súčet (11.114) znázorniť graficky podľa obr. 11.12a. Vidíme, že pri zmene polohy z na vedení o vzdialenosť Δz sa otočí vektor $\rho(z)U^+(z)$ okolo špičky vektora $U^+(z)$ o uhol $2\beta\Delta z$. Veľkosť vektora $U^+(z)$ plynie z kosínusovej vety a je daná výrazom

$$|U(z)| = |U^+| \sqrt{1 + |\rho|^2 - 2|\rho| \cos 2\beta z} \quad (11.115)$$

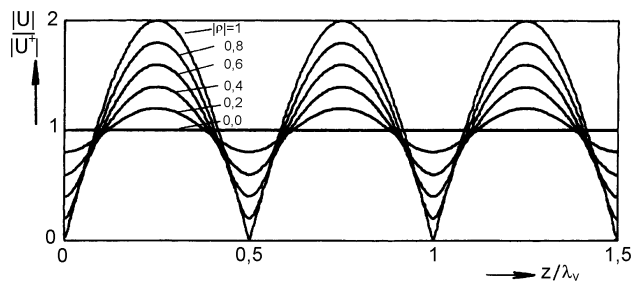


Obr. 11.12

Závislosť amplitúdy napätia od vzdialenosti pozdĺž vedenia (11.115) je graficky znázornená na obr. 11.12b. Podobnú závislosť, len posunutú vo fáze o uhol $\Delta\Phi = \pm\pi$ alebo o vzdialenosť $\Delta z = \pm\lambda/4$ možno nakresliť pre amplitúdu prúdu. Takéto závislosti opisujú stojatú vlnu na vedení. Pre niekoľko hodnôt $|\rho|$ je priebeh stojatej vlny graficky znázornený na obr. 11.13. Vidíme, že stojatá vlna je úplne určená koeficientom odrazu, je to však parameter, ktorý sa nedá bezprostredne merať. Na tieto účely sa zavádza reálna, ľahko merateľná veličina, ktorá sa nazýva **pomer stojatej vlny** (PSV) r (angl. SWR – Standing Wave Ratio). Táto veličina je definovaná výrazom

$$r = \frac{U_{max}}{U_{min}} \quad (11.116)$$

kde U_{max} a U_{min} sú absolútne amplitúdy napätia v maxime a v minime stojatej vlny dané výrazmi (pozri obr. 11.12)



Obr. 11.13

$$U_{max} = |U^+| + |U^-|$$

a

$$U_{min} = |U^+| - |U^-|$$

Po dosadení týchto výrazov do (11.116) dostaneme výraz pre PSV v tvare

$$r = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad (11.117)$$

a z toho veľkosť koeficientu odrazu

$$|\rho| = \frac{r - 1}{r + 1} \quad (11.118)$$

PSV môže nadobúdať reálne hodnoty od 1, pre ktorú je $|\rho| = 0$, až po $+\infty$, pri ktorom je $|\rho| = 1$. PSV na vedeniach možno merať zariadením, ktoré sa nazýva **meracie vedenie**. Je to v podstate úsek vedenia, na ktorom sa pomocou sondy dá veľmi presne zmerať pomer napätia v maxime a minime stojatej vlny a tiež poloha sondy. PSV je konštrukčný parameter zariadení, ktoré pracujú na veľmi vysokých frekvenciách.

Fáza Φ koeficientu odrazu sa volí vhodným výberom referenčnej hodnoty Φ_0 tak, že v maxime stojatej vlny má hodnotu 0 a v príslušných minimách hodnoty $\pm\pi$. Týmto požiadavkám vyhovuje závislosť

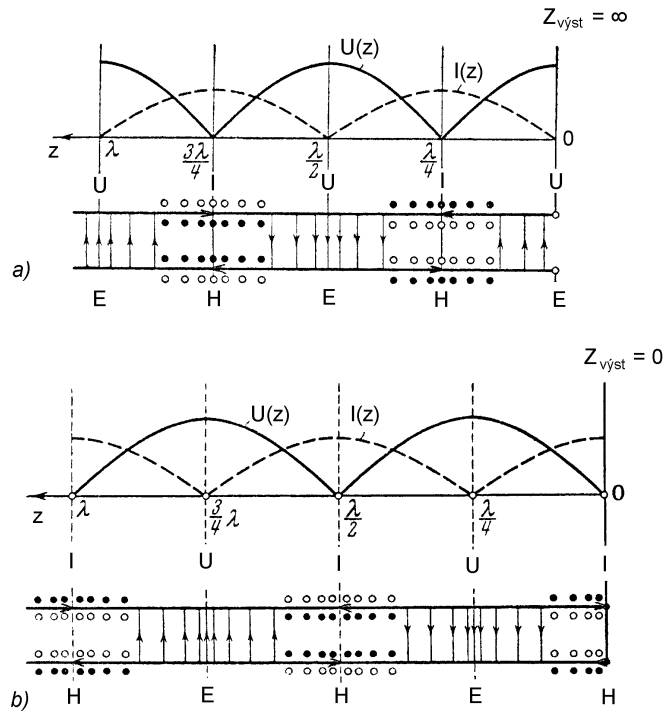
$$\Phi = -\pi + 2\beta(z - z_{min}) \quad (11.119)$$

kde z_{min} je poloha minima stojatej vlny.

Najväčšia stojatá vlna vzniká na otvorenom vedení alebo vedení zakončenom skratom, keď $|\rho| = 1$, teda pri totálnom odraze. Zo vzťahu (11.115) vidieť, že v minime takejto napät'ovej stojatej vlny je uzol ($U = 0$), a v maxime je kmitňa ($|U| = 2|U^+|$). Na konci skratovaného vedenia je napät'ový uzol a na otvorenom vedení napät'ová kmitňa. Obe prípady sú graficky znázornené na obr. 11.14 a, b.

Záverom našej analýzy vlastností dvojvodičových prenosových vedení sa naskytá otázka: aká je šírka frekvenčného pásma, v ktorom sa dvojvodičové vedenia dajú použiť na efektívny prenos elektromagnetických signálov? Dolná hranica frekvencie neexistuje, teda vedenia možno použiť od jednosmerných prúdov resp. napätí. Horná hranica frekvencie

súvisí s únosnými stratami, ktoré sú ešte prípustné pri spoľahlivom prenose informácie. Straty sú dvojakého druhu – tie, ktoré vznikajú vo vodičoch a dielektrikách, z ktorých je vedenie vyrobené, a straty vyžarovaním. Straty vyžarovaním sa dajú vylúčiť tým, že sa na prenos používajú vedenia uzavretého typu, ako je koaxiálny kábel, v ktorom je elektromagnetické pole uzavreté vonkajším dutým valcovým vodičom. Tepelné (ohmické) a dielektrické straty možno obmedziť výberom kvalitných dielektrík a vodičov a zväčšovaním pričných rozmerov koaxiálneho kábla, čo však nie je ekonomické, a má tiež svoje hranice. Dnes sa však vyrábajú také kvalitné dielektriká, že moderné koaxiálne káble sú použiteľné až do frekvencií 100 GHz. Ešte donedávna sa na prenos signálov nad 10 GHz používali výlučne duté kovové trubice, ktoré sa nazývajú trubicové vlnovody a ktoré možno použiť až po optické frekvencie. Ich teória však siaha za hranice základného kurzu elektromagnetizmu.



Obr. 11.14

11.7 MERANIE RÝCHLOSTI SVETLA

E io rispondo: Io credo in uno Dio
solo ed eterno, che tutto 'l ciel move,
non moto, con amore e con disio;

e a tal creder non ho io pur prove
fisice e metafisice, ma dalmi
anche la verità che quinci piove ...¹

Dante Alighieri: La Divina Commedia,
Paradiso: Canto XXIV, 130-135

Meranie rýchlosti svetla patrí medzi základné úlohy experimentálnej fyziky, pretože je skúšobným kameňom platnosti Maxwellovej elektromagnetickej teórie a Einsteinovej teórie relativity, odhliadnuc od praktických potrieb poznania rýchlosti svetla.

Správnejšie by mal tento odsek niesť názov "meranie rýchlosti šírenie elektromagnetických vln", pretože to, čo nazývame "rýchlosťou svetla vo vákuu", je v skutočnosti univerzálna prírodná rýchlostná konštanta, ktorá udáva rýchlosť šírenia signálov v celom frekvenčnom pásme elektromagnetického spektra. Táto rýchlosť je nezávislá od frekvencie a má rovnakú hodnotu v každej vzťažnej sústave, nie je teda v pravom zmysle kinematickou veličinou. Ak ju nazývame "rýchlosťou svetla", robíme tak z historických dôvodov, pretože jej prvé merania boli urobené v tom pásme spektra, ktoré vníma ľudské oko.

Dávno pred Maxwellom a Einsteinom si otázku o rýchlosti svetla položil taliansky učenec Galileo Galilei, ktorý sa okolo roku 1600 pokúsil rýchlosť svetla aj zmerať ako pomer svetlom prejdenej dráhy s a na to potrebného času t . Pri Galileových technických možnostiach je len samozrejmé, že takýto pokus skončil neúspechom. Aj Galileovi bolo jasné, že na meranie takýchto nevídaných rýchlostí treba spoľahlivo merať veľmi veľké vzdialenosti a veľmi krátke časové intervaly. Bolo teda len logické očakávať od astronómie, že bude tou vedou, ktorá poskytne vhodné metódy na meranie rýchlosti svetla. V roku 1675 dánsky astronóm Olaf Römer na základe pozorovania zatmení Jupiterových mesiacov stanovil rýchlosť svetla na hodnotu $2 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$. O päťdesiat rokov neskôr anglický astronóm James Bradley ju stanovil úplne inou metódou na $3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

V roku 1849 francúzsky fyzik Armand Hipolyte Louis Fizeau (1819 – 1896) zmeral rýchlosť svetla nie astronomickou metódou. Fizeauova aparatura na meranie rýchlosti svetla je znázornená na obr. 11.15. Svetlo zo zdroja po odraze na polopriepustnom zrkadle prechádza prvou šošovkou. Za šošovkou v jej ohniskovej rovine 0 rotuje ozubený kotúč s počtom zubov N , ktorého kruhovú frekvenciu $\omega = 2\pi f$ možno meniť. Kotúč "rozseká" svetelný zväzok na sled svetelných zábleskov, ktoré rýchlosťou c prekonávajú dráhu l (vo Fizeauových pokusoch 8630 m) k zrkadlu a späť ku kotúču. Ak sa zvolí kruhová frekvencia otáčok kotúča tak, že za čas potrebný na prelet záblesku k zrkadlu a späť sa

¹ Nuž vravím: Verím v jediného Boha
a večného, čo hýbe nebo celé,
sám nehnutý – tak plá v ňom láska mnohá!

K tej miere nielen Fyzika mi stielie
s Metafyzikou dôkazy; ich dal mi
i pravdy jas, čo prší v božskom diele ...

Preklad: Viliam Turčány, 1986

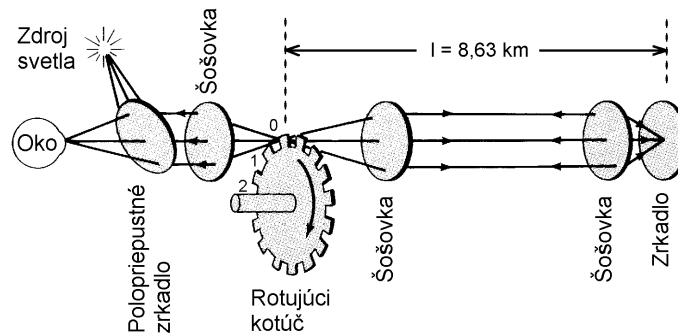
koleso pootočí tak, že nasledujúci zub záblesk zatieni, pozorovateľ neuvidí žiadne odrazené svetlo a obraz zdroja zmizne z jeho zorného poľa. Je zrejmé, že zatemnenie zorného poľa nastane vtedy, ak sa za uvedený čas kotúč pootočí o uhol $\Theta = \pi/N$. Z podmienky rovnakého času potrebného na prelet svetla po dráhe $2l$ a pootočenia kotúča o uhol Θ plynie, že musí platiť

$$\frac{\Theta}{\omega} = \frac{2l}{c}$$

z čoho rýchlosť svetla

$$c = \frac{2\omega l}{\Theta} = 4lfN \quad (11.120)$$

Kotúč vo Fizeauovom experimente mal $N = 720$ zubov a otáčal sa s frekvenciou $f = 12,6$ Hz. Zo vzťahu (11.120) plynie pre rýchlosť svetla hodnota $3,13 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$, čo je hodnota asi o 5 % väčšia ako poskytujú súčasné merania. Chyba merania je spôsobená hlavne nepresnosťou stanovenia okamihu zatemnenia zorného poľa.



Obr. 11.15

Fizeauov experiment zdokonalil v roku 1862 francúzsky fyzik Jean Bernard Léon Foucault (1819 – 1868) tým, že rotujúci kotúč nahradil rotujúcim zrkadlom. Metódou rotujúceho zrkadla vykonal v rokoch 1878 až 1930 mnoho meraní rýchlosti svetla známy americký fyzik Albert Abraham Michelson (1852 – 1931), ktorý v roku 1926 stanovil rýchlosť svetla na hodnotu $299\,796 \text{ km.s}^{-1}$ s neistotou $\pm 4 \text{ km.s}^{-1}$. Nie je nezaujímavé uviesť, že Michelsonovi sa metódou rotujúceho zrkadla podarilo zmerať 35 kilometrovú vzdialenosť vrcholov kalifornských hôr Mount Wilson a Mount San Antonio s presnosťou lepšou ako $\pm 2,54 \text{ cm}$ (± 1 inch).

Michelsonovu metódu modifikoval v roku 1950 švédsky fyzik Bergstrand, ktorý nahradil rotujúce zrkadlo elektronickým zariadením pozostávajúcím z pulzného zdroja a detektora. Zmenou frekvencie pulzov možno dosiahnuť maximum údajov detektora. Zariadenie má komerčný názov geodimeter a pomocou neho bola určená hodnota rýchlosti svetla ($299\,792,7 \pm 0,25$) km.s^{-1} . Geodimeter sa dnes používa na rutinné merania veľkých vzdialeností na základe známej rýchlosti svetla.

Všetky doteraz uvedené metódy sa zakladajú na meraní dĺžok a času a sú použiteľné skutočne iba na meranie rýchlosti svetla. Oveľa presnejšie výsledky merania poskytujú metódy založené na pozorovaní stojatých vln, pri ktorých sa experimentálne určuje vlnová

dĺžka λ a frekvencia f elektromagnetickej vlny. Rýchlosť svetla sa potom vypočíta zo známeho vzťahu

$$c = \lambda f$$

Vlnové dĺžky a frekvencie sa dnes merajú s vysokou presnosťou v celom elektromagnetickom pásme a presnosť stúpa s frekvenciou. Na určenie dĺžky vlny ako dvojnásobnej vzdialenosti medzi minimami stojatej vlny sa používajú rôzne druhy interferometrov resp. rezonátorov, ktoré majú rôzne konštrukcie podľa použitej frekvencie.

Prvé merania rýchlosti c na rádiových frekvenciách vykonal J. Mercier¹ v roku 1924 meraním stojatých vln na dvojvodičových vedeniach opísaných v predchádzajúcich odsekoch. V mikrovlnovom pásme prvýkrát merali rýchlosť c roku 1950 Essen² a dvojica výskumníkov Bol a Hansen. Essen meral rezonančnú vlnovú dĺžku v cylindrickom dutinovom rezonátore na frekvencii

$$f = 9,498\,300.10^9 \text{ Hz}$$

Pre polomer rezonátora $R = 3,258\,76 \text{ cm}$ a jeho dĺžku $l = 15,645\,74 \text{ cm}$ zistil v rezonátore $n = 8$ pozdĺžnych polvln, z čoho stanovil dĺžku vlny v rezonátore na hodnotu

$$\lambda_v = \frac{2l}{n} \approx 3,911\,44 \text{ cm}$$

Dĺžka vlny λ_v v rezonátore súvisí s dĺžkou vlny λ v neohraničenom vákuu podľa vzťahu³

$$\lambda_v = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kr}}\right)^2}} \quad (11.121)$$

kde

$$\lambda_{kr} = 1,639\,662 R = 5,343\,27 \text{ cm}$$

je kritická vlnová dĺžka vo vlnovode s daným polomerom. Po dosadení za λ_v a λ_{kr} do výrazu (11.121) dostal pre vlnovú dĺžku v neohraničenom vákuu hodnotu

$$\lambda = 3,156\,159 \text{ cm}$$

Nakoniec pre rýchlosť svetla dospel k hodnote

$$c = \lambda f = 2,997\,814\,5.10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Essen vykonal množstvo experimentov za rôznych podmienok a po starostlivom výbere výsledkov uviedol ako najpravdepodobnejšiu hodnotu s udaním neistoty

$$c = (2,997\,925 \pm 0,000\,030).10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

¹ Mercier, J., J. Phys. Radium **5**, 168 (1924)

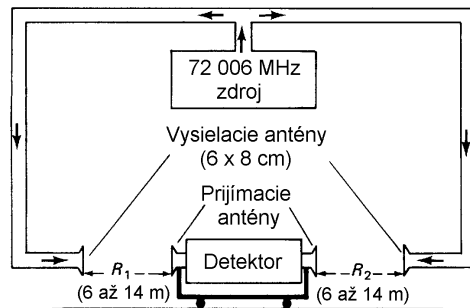
² Essen, L., Proc. R. Soc. **A204**, 260 (1950)

³ Pozri napr.: Tirpák, A.: Elektronika veľmi vysokých frekvencií, Vydavateľstvo UK Bratislava 2001; Tysl, V., Růžička, V.: Teoretické základy mikrovlnnej techniky, SNTL Praha 1989

Mikrovlnový interferometer so štyrmi lievikovými anténami použil v rokoch 1952 až 1958 na určenie c Angličan K. D. Froome najprv na frekvencii $f = 25\,000$ MHz s vlnovou dĺžkou $\lambda = 1,2$ cm a neskôr na frekvencii $f = 72\,006$ MHz s vlnovou dĺžkou $\lambda = 4,16$ mm.¹ Frekvencia bola meraná s mimoriadnou presnosťou metódami mikrovlnovej techniky. Schéma zariadenia na meranie je znázornená na obr. 11.16. Výkon mikrovlnového zdroja je rozvetvený do dvoch zväzkov, pomocou vlnovodov a lievikových antén vyžiarený z dvoch strán proti detektoru namontovanému na pohyblivom vozíku. Pri pohybe vozíka detektor registruje interferenčné minimá a maximá (vzdialenosť susedných miním je $\lambda/2$), pričom na 8-metrovej dĺžke sa registruje veľký počet vlnových dĺžok, čo značne zvyšuje presnosť merania λ . Výsledky Froomových meraní viedli k hodnote

$$c = \lambda f = (299\,792,5 \pm 0,10) \text{ km.s}^{-1}$$

čím sa zlepšila presnosť a precíznosť Bergstrandových meraní.



Obr. 11.16

Najpresnejšie merania rýchlosti svetla boli vykonané v 70-tých rokoch minulého storočia v americkom Národnom úrade štandardov (National Bureau of Standards, Gaithersburg, Maryland) a vo Veľkej Británii v národnom fyzikálnom laboratóriu (National Physical Laboratory). Po Froomových experimentoch bolo fyzikom jasné, že efektívnym spôsobom zvýšenia presnosti merania rýchlosti c je rozšírenie Froomej metodiky z mikrovlnovej do infračervenej a viditeľnej oblasti elektromagnetického spektra. Presnosť merania c v tom období posunuli výrazne dopredu dva objavy: vysokofrekvenčná spektroskopia a vynález laseru. Tieto vynálezy poskytli frekvenčne veľmi stabilné koherentné zdroje signálov v infračervenej a viditeľnej oblasti a metódy veľmi presného stanovenia frekvencie. Meranie frekvencie sa stalo mimoriadne presným vďaka vývoju céziového (Cs) frekvenčného štandardu s relatívnou presnosťou 10^{-13} . Meranie frekvencie a času vo fyzike patria dnes k najpresnejším meraniam. V roku 1967 stanovila XIII. Generálna konferencia pre miery a váhy novú definíciu sekundy, podľa ktorej:

Jedna sekunda (1 s) je časový interval, ktorý sa rovná 9 192 631 770 periódam elektromagnetického žiarenia emitovaného pri prechode medzi obidvomi hyperjemnými hladinami základného stavu atómu cézia 133 v nulovom magnetickom poli.

¹ Froome, K. D., Proc. R. Soc. A247, 109 (1958)

V novembri roku 1983 prijala XVII. Generálna konferencia pre miery a váhy aj novú definíciu jednotky dĺžky – metra, podľa ktorej:

Jeden meter (1 m) je vzdialenosť, ktorú prejde svetlo vo vákuu za 1/299 792 458 sekundy.

Vysoká presnosť merania frekvencie a vlnovej dĺžky umožnili v sedemdesiatych rokoch 20. storočia spresniť meranie rýchlosti svetla asi stokrát. Céziový štandard umožnil presne merať frekvenciu stabilizovaných klystrónov, generovaných harmoník hrotových diód a Josephsonovských mostíkov a sérií spektrálnych čiar laserov, ako sú

HCN	$f =$	890 GHz	$\lambda =$	337,0 μm
H ₂ O	$f =$	10 700 GHz	$\lambda =$	28,0 μm
CO ₂	$f =$	32 176 GHz	$\lambda =$	9,3 μm

Najpresnejšie autorovi známe merania rýchlosti svetla s využitím stabilizovaných laserov vykonali v roku 1972 Evenson a i.¹ s nameranou hodnotou rýchlosti svetla

$$c = (299\,792,456\,2 \pm 0,001\,1) \text{ km.s}^{-1}$$

a v roku 1974 Blaney a i.² s hodnotou

$$c = (299\,792,459\,0 \pm 0,000\,8) \text{ km.s}^{-1}$$

Presnosť merania rýchlosti svetla c s odchýlkou iba $\pm 80 \text{ cm.s}^{-1}$, ktorú dosiahol Blaney predstavuje percentuálnu odchýlku iba $\pm 0,000\,000\,267 \%$ od najpravdepodobnejšej hodnoty, čím sa rýchlosť svetla radí skutočne medzi prírodné konštanty, ktoré sú známe s najvyššou presnosťou.

V roku 1975 na XV. Generálnej konferencii pre miery a váhy bola na základe starostlivého a kritického posúdenia všetkých známych výsledkov merania stanovená rýchlosť svetla vo vákuu na hodnotu

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \quad (11.122)$$

Táto hodnota dnes slúži za základ definície metra, a je tiež základom na určenie ďalších číselných konštánt v SI-sústave, ako sú elektrická konštanta (permitivita vákuua) $\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$, charakteristická impedancia vákuua $Z_0 = \mu_0 c$, pokojové energie elementárnych častíc mc^2 a i. Hodnota c podľa (11.122) nie je samozrejme definitívna. Ak sa zvýši presnosť merania rýchlosti svetla bude aj táto numerická hodnota podrobená revízii.

V tabuľke 21 sú uvedené vybrané merania rýchlosti svetla vykonané od Galileových dní. Tabuľka je dôkazom veľkosti, vytrvalosti a dômyslu ľudského ducha. Vidieť z nej, ako sa s rokmi zvyšovala presnosť merania, aká široká paleta meracích metód bola pritom využívaná a medzinárodné zastúpenie vedcov na meraní rýchlosti svetla.

¹ Evenson, K. M., Wells, J. S., Petersen, F. R., Danielson, B. L., Day, G. W., Berger, R. L., Hall, J. L. Phys. Rev. Lett. **29**, 1346 (1972)

² Blaney, T. G., Bradley, C. C., Edwards, G. J., Jolliffe, B. W., Knight, D. J. E., Rowley, W. R. C., Shotton, K. C., and Woods, P. T., Nature, Lond. **251**, 46 (1974)

Tabuľka 21

Rýchlosť svetla vo vákuu

Rok	Autor	Krajina	Metóda	Rýchlosť svetla vo vákuu km/s	Nepresnosť merania ±km/s
1600(?)	Galileo Galilei	Taliansko	Lampáše a svetelné zátklopky	"Nie je nekonečná, ale veľmi vysoká"	
1675	Römer	Francúzsko	Astronomická	200 000	
1792	Bradley	Anglicko	Astronomická	304 000	
1849	Fizeau	Francúzsko	Rotujúci kotúč	313 300	
1862	Foucault	Francúzsko	Rotujúce zrkadlo	298 000	500
1876	Cornu	Francúzsko	Rotujúci kotúč	299 990	200
1880	Michelson	USA	Rotujúce zrkadlo	299 910	50
1883	Newcomb	Anglicko	Rotujúce zrkadlo	299 860	30
1883	Michelson	USA	Rotujúce zrkadlo	299 853	60
1923	Mercier	Francúzsko	Stojaté vlny na vedeniach	299 782	15
1926	Michelson	USA	Rotujúce zrkadlo	299 796	4
1928	Karolus a Mittelstädt	Nemecko	Kerrova cela	299 778	10
1940	Hüttel	Nemecko	Kerrova cela	299 768	10
1941	Anderson	USA	Kerrova cela	299 776	14
1950	Bergstrand	Švédsko	Geodimeter	299 792,7	0,25
1950	Essen	Anglicko	Mikrovlňový rezonátor	299 792,5	3
1950	Houston	Škótsko	Kmity kryšt. mriežky	299 775	9
1950	Bol, Hansen	USA	Mikrovlňový rezonátor	299 789,3	0,4
1950	Rank, Ruth, Van der Sluis	USA	Molekulárne spektrá	299 776	7
1954	Florman	USA	Rádio-interferometer	299 795,1	3,1
1954	Rank, Shearer, Wiggins	USA	Molekulárne spektrá	299 789,8	3,0
1956	Edge	Švédsko	Geodimeter	299 792,9	0,2
1958	Froome	USA	Mikrovlňový interferometer	299 792,5	0,1
1972	Bay, Luther, White	USA	λ a f -merania 0,633- μ m čiary He-Ne lasera	299 792,462	0,018
1973	Evenson a i.	USA	λ a f -merania 3,39- μ m čiary He-Ne lasera	299 792,457 4	0,001 1
1974	Blaney a i.	Anglicko	λ a f -merania 9,32- μ m čiary CO ₂ lasera	299 792,459 0	0,000 8

Úlohy 293 – 326

293. Dokážte, že každá funkcia tvaru $f(x, t) = f(x \pm ct)$ vyhovuje vlnovej rovnici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

294. Dokážte, že monochromatické vlny $f(x, t) = Ce^{j(\omega t \pm \beta x)}$ (C je konštanta) sú riešeniami vlnovej rovnice pri hodnote $\beta = \omega/c$.

295. Dokážte, že elektromagnetické pole dané výrazmi

$$E_x = E_0 \cos(z - ct) \quad B_y = \frac{E_0}{c} \cos(z - ct) \quad E_y = E_z = B_x = B_z = 0$$

vyhovuje Maxwellovým rovniciam.

296. Súčin kapacity na jednotku dĺžky a indukčnosti na jednotku dĺžky prenosových vedení je veličina konštantná a rovná sa prevrátenej hodnote štvorca rýchlosti šírenia elektromagnetického poľa v danom prostredí. Dokážte to na príklade koaxiálneho kábla a dvojlinky.

297. Valcovým vodičom s polomerom R a mernou vodivosťou σ tečie konštantný prúd I . Vypočítajte veľkosť Poyntingovho vektora na povrchu vodiča a určite jeho smer. Dokážte, že energia elektromagnetického poľa tečie do vodiča s výkonom

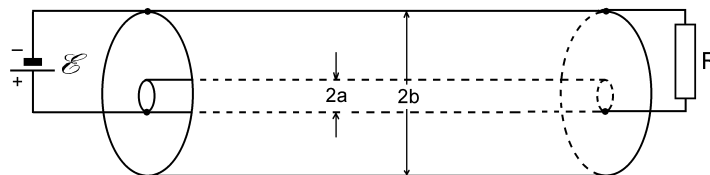
$$P = \frac{I^2}{\pi \sigma R^2}$$

na jednotku dĺžky, t. j. s tým výkonom, s ktorým sa v ňom mení na teplo.

298. Koaxiálny kábel pozostáva z dvoch dutých, ideálne vodivých valcov s polermi a a b ($a < b$). Na jednom konci je zakončený odporom R (obr. 298). Na vstup kábla je pripojený zdroj elektromotorického napätia \mathcal{E} s nulovým vnútorným odporom. Vypočítajte Poyntingov vektor vo vnútri kábla. Pomocou Poyntingovho vektora dokážte, že energia postupuje káblom s výkonom

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$$

pozdĺž jeho osi, t. j. s tým výkonom, s ktorým sa mení na teplo v odpore R .



Obr. 298

299. Vypočítajte rýchlosť prenosu energie pozdĺž koaxiálneho kábla podľa predchádzajúcej úlohy. V akom vzťahu je rýchlosť prenosu k rýchlosti svetla?

Poznámka: Rýchlosť prenosu energie vedením je zavedená podobne ako rýchlosť prúdenia kvapaliny v hydrodynamike a je definovaná vzťahom

$$v_p = \frac{S}{w}$$

kde S je tok energie jednotkou plochy za jednotku času (Poyntingov vektor) a w je objemová hustota energie.

300. Rovinná elektromagnetická vlna sa šíri vo vákuu v kladnom smere osi z a jej elektrická zložka je daná výrazom

$$E_x(z, t) = E_{x0} j(\omega t \pm \frac{\omega}{c} z)$$

kde E_{x0} je amplitúda x -ovej zložky poľa. $E_y = E_z = 0$.

- Vypočítajte rýchlosť šírenia fázy vlny (fázovú rýchlosť).
- Pomocou Maxwellových rovníc nájdite magnetickú zložku vlny.
- Vypočítajte pomer amplitúd elektrickej a magnetickej zložky vlny vo vákuu.
- Vypočítajte strednú hodnotu hustoty toku energie v elektromagnetickej vlně ako reálnu časť komplexného Poyntingovho vektora

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2}$$

kde \mathbf{H}^* je vektor komplexne združený k vektoru \mathbf{H} .

301. Charakteristická impedancia Z prenosového vedenia je definovaná ako pomer priečnej zložky elektrického poľa k priečnej zložke magnetického poľa, pričom sa ukazuje, že

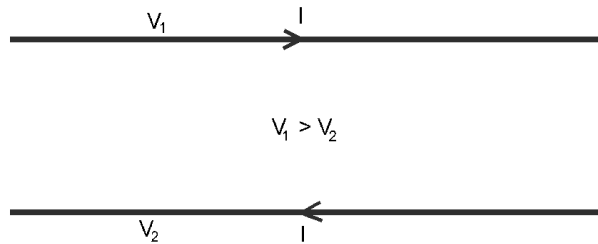
$$Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

kde L' , C' sú indukčnosť a kapacita na jednotku dĺžky vedenia. Vypočítajte Z pre páskové vedenie vo vákuu z úlohy 206.

302. Svetelná vlna má frekvenciu $f = 4 \cdot 10^{14}$ Hz a dĺžku vlny $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m. Aká je rýchlosť šírenia tejto vlny? Aká je permitivita prostredia, v ktorom sa vlna šíri a jeho index lomu? Permeabilita prostredia je $\mu = \mu_0$. Aká je dĺžka danej vlny vo vákuu?

303. Vzduch sa začína ionizovať pri intenzite elektrického poľa $E \approx 3 \cdot 10^6$ V/m (pozri tabuľku 5). Pri akej strednej hustote toku výkonu elektromagnetických vln dostatočne nízkej frekvencie môže vo vzduchu nastať ionizácia?

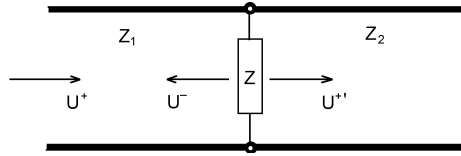
304. Rovinná elektromagnetická vlna s frekvenciou $\omega = 10^6$ rad/s dopadá na vodivý rámček tak, že vektor \mathbf{H} je kolmý na rovinu rámčeka. Rozmery rámčeka sú malé v porovnaní s dĺžkou vlny. Plocha rámčeka $S = 100$ cm², stredný výkon v elektromagnetickej vlně $P = 1$ W/m². Nájdite amplitúdu indukovaného EMN v rámčeku.



Obr. 305

305. Na obr. 305 je znázornený úsek dvojvodičového vedenia s udanými smermi prúdov vo vodičoch a potenciálmi V_1 a V_2 ($V_1 > V_2$) v tej istej priečnej rovine. Podľa smeru Poyntingovho vektora rozhodnite, kde sa nachádza zdroj – vpravo, či vľavo?.

306. Nekonečne dlhé dvojvodičové vedenie je v istej rovine premostené impedanciou Z (obr. 306). Vlnová impedancia vedenia naľavo od Z je Z_1 a napravo Z_2 . Z ľavej strany sa po vedení šíri napät'ová vlna s amplitúdou U^+ . Nájdite amplitúdu U^- odrazenej a amplitúdu U^{++} postupujúcej vlny v rovine premostenia a amplitúdy prúdov v impedancii Z a vo vedení s vlnovou impedanciou Z_2 .



Obr. 306

307. Úlohu 306 riešte pre $Z_1 = Z_2 = Z = R$ (R je činný odpor). Aká časť výkonu napät'ovej vlny U^+ sa spotrebuje v impedancii $Z = R$? Aká časť výkonu postupuje vedením s impedanciou $Z_2 = R$ a aká časť výkonu sa odrazí?

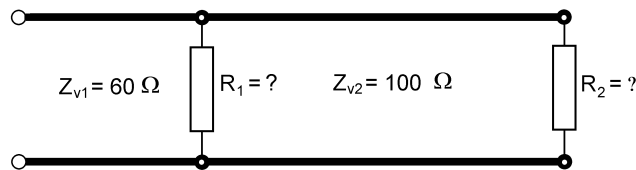
308. Riešte úlohu 307 pre $Z_1 = R, Z_2 = Z = 2R$.

309. Dvojvodičové vedenie s vlnovým odporom Z_0 je v prvom prípade zakončené impedanciou $Z = 0$ (skratom) a v druhom prípade $Z = \infty$ (otvorené vedenie). Po vedení postupuje napät'ová vlna s amplitúdou U^+ . Nájdite amplitúdu odrazenej vlny U^- v koncovej rovine vedenia. Čím sa budú líšiť vzniknuté stojaté vlny na vedení v prvom a v druhom prípade?

310. Dvojvodičový symetrický kábel má pri frekvencii $f = 1000$ Hz takéto parametre: $R = 6,55 \cdot 10^{-3} \Omega/m, L = 1,36 \cdot 10^{-6} H/m, C = 8,84 \cdot 10^{-12} F/m, G$ zanedbateľné. Na frekvencii $f = 100$ MHz je: $R = 0,606 \Omega/m, L = 1,26 \cdot 10^{-6} H/m, C = 8,84 \cdot 10^{-12} F/m, G$ zanedbateľné. Vypočítajte pre obe frekvencie vlnovú impedanciu kábla, útlm v dB/m, straty na vlnovú dĺžku a fázovú rýchlosť vlny v kábli. Porovnajte výsledky pre obidve frekvencie.

311. Koaxiálny kábel pre televízny rozvod podľa údajov výrobcu má polomer vnútorného vodiča $a = 0,575$ mm a vnútorný polomer plášťa $b = 3,625$ mm. Kábel je vyplnený polyetylénom s relatívnou permitivitou $\epsilon_r = 2,25$. Kapacita kábla $C = 67$ pF/m. Vypočítajte:

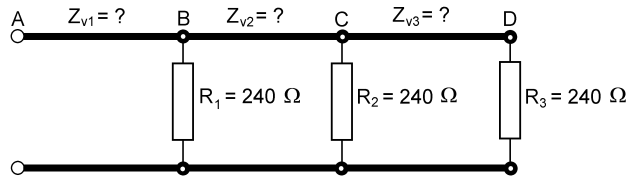
- vlnovú impedanciu kábla,
- indukčnosť na jednotku dĺžky kábla,
- fázovú rýchlosť vlny na kábli.



Obr. 312

312. Aké musia byť hodnoty odporov R_1 a R_2 , aby na vedení podľa obr. 312 nevznikla stojatá vlna?

313. Aké musia byť vlnové impedancie vedení AB, BC a CD na obr. 313, aby pozdĺž celého vedenia nevznikali odrazy?



Obr. 313

314. Vedenie dlhé l má vlnovú impedanciu Z_v a konštantu šírenia γ . Na vstupe vedenia je napätie s amplitúdou U_{vst} a prúd s amplitúdou I_{vst} . Vypočítajte amplitúdu výstupného napätia, prúdu a výstupnú impedanciu.

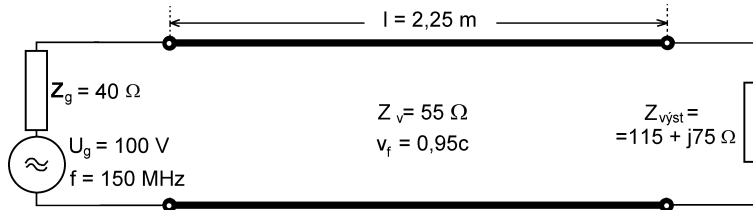
315. K vedeniu dlhému $l = 20$ m je na vstupe pripojený generátor pracujúci na frekvencii $f = 3$ MHz. Vedenie je na výstupe otvorené. Nájdite amplitúdu výstupného napätia, ak amplitúda vstupného napätia $U_{vst} = 20$ V.

316. Amplitúda napätia na konci otvoreného vedenia s vlnovou impedanciou $Z_v = 300 \Omega$ je $U_{vyst} = 600$ V. Nájdite amplitúdu napätia a prúdu vo vzdialenosti $l = 40$ m od konca vedenia. Dĺžka vlny na vedení $\lambda = 300$ m.

317. Na konci otvoreného vedenia pracujúceho na vlnovej dĺžke $\lambda = 20$ m bola nameraná amplitúda napätia $U_{vyst} = 200$ V a vo vzdialenosti $l = 2$ m od konca vedenia amplitúda prúdu $I_m = 0,5$ A. Nájdite vlnovú impedanciu vedenia. Aká je amplitúda prúdu v maxime prúdovej stojatej vlny?

318. Vedenie so vzduchovou izoláciou má vlnovú impedanciu $Z_v = 400 \Omega$ a je dlhé 75 cm. Na výstup vedenia je pripojená reaktancia $Z_r = -j400 \Omega$. Vedenie pracuje na frekvencii $f = 150$ MHz a amplitúda napätia na jeho vstupe je $U_{vst} = 50$ V.

- Vypočítajte vstupnú impedanciu vedenia,
- načrtnite napäťovú a prúdovú stojatú vlnu,
- vypočítajte amplitúdy napätia a prúdu na výstupe a v maximách stojatých vln.



Obr. 319

319. Na vedení zobrazenom na obr. 319 treba nájsť amplitúdu vstupného a výstupného napätia, prúdu, vstupný a výstupný výkon, ďalej činiteľ stojatej vlny, koeficient odrazu na vstupe a výstupe vedenia, amplitúdy napätia a prúdu v minimách a v maximách stojatých vln a polohy miním a maxím stojatých vln. Načrtnite napäťovú a prúdovú stojatú vlnu.

320. Vedenie dlhé $l = 120$ km je určené na prenos jednosmerného výkonu. Jeho parametre sú: $R = 53,45 \Omega/\text{km}$, $G = 1,55 \cdot 10^{-6} \text{ S}/\text{km}$. Napätie na vstupe vedenia $U_{vst} = 24$ V, na výstupe vedenia je skrat. Vypočítajte vstupný a výstupný prúd a vstupný odpor vedenia.

321. Dvojvodičové telefónne vedenie má pri frekvencii $f = 1$ kHz vlnovú impedanciu $Z_v = 615 - j78 \Omega$ a konštantu šírenia $\gamma = 3,05 + j2,18 \cdot 10^{-2} \text{ km}^{-1}$. Vedenie je dlhé $l = 240$ km a je zakončené záťažou rovnou vlnovej impedancii vedenia. Na vstup je pripojený generátor pracujúci na frekvencii $f = 1$ kHz, ktorý zabezpečuje vstupné napätie s amplitúdou $U_{vst} = 5$ V. Vypočítajte:

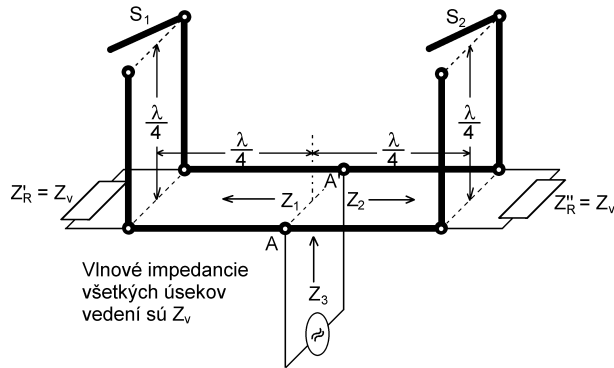
- fázovú rýchlosť na vedení a vlnovú dĺžku,
- amplitúdu vstupného prúdu, výstupného napätia vstupný a výstupný výkon.

322. Nájdite vlnovú impedanciu vedenia, ktoré pozostáva z dvoch paralelných vodičov priemeru $D = 4$ mm uložených vo vzduchu v osovej vzdialenosti $l = 13,54$ cm. Vypočítajte vstupnú impedanciu takého vedenia, ak je dlhé $d = 35$ m (16 m) a na konci skratované (otvorené). Pracovná vlnová dĺžka $\lambda = 50$ m. Akú indukčnosť, resp. kapacitu predstavuje vedenie z hľadiska jeho vstupných svoriek?

323. Vedenie s vlnovou impedanciou $Z_v = 70 \Omega$ je na jednom konci skratované a na druhom konci premostené kapacitou $C = 10$ pF. Systém má predstavovať rezonátor na frekvencii $f = 100$ MHz. Aká musí byť dĺžka vedenia?

324. Paralelný LC obvod s indukčnosťou $L = 125 \mu\text{H}$ kmitá na frekvencii $f = 2$ MHz. Pre účely merania je k nemu pripojený paralelne jeden koniec koaxiálneho vedenia, ktorého druhý koniec je pripojený k meraciemu prístroju s nekonečnou vnútornou impedanciou. Podľa údajov výrobcu má kábel vlnovú impedanciu $Z_v = 52 \Omega$ a kapacitu $C = 93,5$ pF/m. Kábel má dĺžku $d = 76$ cm. Ako sa zmení rezonančná frekvencia obvodu po pripojení kábla?

325. 70-ohmový dipól treba prispôsobiť k 300-ohmovému symetrickému zvodu úsekom štvrtvlnového vedenia pri vlnovej dĺžke $\lambda = 4,84$ m ($f = 62$ MHz) Nájdite vlnovú impedanciu a dĺžku tohoto vedenia.



Obr. 326

326. Na obr. 326 je znázornený prenosový systém s dvoma záťažami a generátorom.

- Určite Z_1 , Z_2 a Z_3 , ak je spínač S_1 zopnutý a S_2 rozopnutý. Kam postupuje výkon?
- Odpovedzte na otázky bodu a) ak je spínač S_1 rozopnutý a S_2 je zopnutý.
- Kam postupuje výkon, ak sú obidva spínače rozopnuté (zopnuté)?