

10 POHYB NABITÝCH ČASTÍC V ELEKTRICKÝCH A MAGNETICKÝCH POLIACH

Riadenie pohybu častíc elektrickým a magnetickým poľom je predmetom štúdia vedeckých disciplín známych pod menami "fyzikálna elektronika" a "elektrónová a iónová optika" a využíva sa v mnohých zariadeniach spotrebnej a priemyselnej elektroniky. Okrem toho je známe, že veľa principiálnych experimentov fyziky súvisí s pohybom elektrických nábojov v elektromagnetických poliach. Je to napr. známa Thomsonova metóda merania merného náboja elektrónu e/m ,¹ Franckov-Hertzov experiment² a Sternov-Gerlachov experiment,³ ktoré potvrdzujú platnosť niektorých zákonov kvantovej mechaniky, Rabiho metóda molekulárnych zväzkov⁴ na určenie magnetického momentu elementárnych častíc a mnohé iné. Aj Rutherfordov rozptylový vzorec odráža pohyb elektrónu v guľovo symetrickom elektrickom poli.⁵ Obzvlášť dôležitým príkladom je urýchľovanie nabitých častíc v rôznych druhoch urýchľovačov (cyklotrón, betatrón, synchrotrón a. i.) pre potreby fyziky veľmi vysokých energií, ďalej hmotnostné spektrografy na separáciu izotopov, katódová (Braunova) trubica, z ktorej sa vyvinuli dnešné obrazovky s elektrickým a magnetickým vychyľovaním používané napr. V osciloskopoch, v monitoroch počítačov a v TV prijímačoch, vákuové elektrónky, generátory a zosilňovače signálov veľmi vysokých frekvencií (klystróny, magnetróny, karcinotróny, permaktróny a i.). V ďalšom budeme analyzovať niektoré základné črty pohybov nabitých častíc v elektromagnetických poliach.

10.1 VOĽNÁ NABITÁ ČASTICA V ELEKTRICKOM POLI

Ak sa nabitá častica s nábojom q (kladným alebo záporným) ocitne v elektrickom poli intenzity E , bude na ňu pôsobiť sila

$$F_{el} = qE \quad (10.1)$$

V prípade, že častica je voľná, začne sa pod účinkom tejto sily pohybovať, pričom pohyb je daný Newtonovou pohybovou rovnicou

$$\frac{dp}{dt} = F_{el} \quad (10.2)$$

¹ Thomson, J. J., Phil. Mag. **5**, 11, 227 (1881)

² Franck, J., Hertz, G.: Verhandlungen der Deutschen Phys. Gesellschaft, **15**, 1914

³ Stern, O., Gerlach, W., Z. f. Physik **8**, 991 (1921)

⁴ Rabi, I. I. et al., Phys. Rev. **50** (1936): **56** (1939)

⁵ Rutherford, E., Phil. Mag. **21**, 669 (1911)

kde \mathbf{p} je hybnosť častice. Ak je hmotnosť častice m a jej rýchlosť je \mathbf{v} , potom hybnosť

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (10.3)$$

Rýchlosti, ktoré môže nabitá častica v elektromagnetických poliach dosiahnuť, sú nezriedka relativistické, teda blízke rýchlostiam svetla c ($v \approx c$), takže m vo výraze (10.3) je relativistická hmotnosť závislá od okamžitej rýchlosti v podľa známeho vzťahu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (10.4)$$

kde m_0 je pokojová hmotnosť častice. Takýto prípad nastáva napr. v betatróne určenom na urýchľovanie elektrónov.

Ak však $v \ll c$, možno hmotnosť m považovať za relativisticky nezávislú, teda položiť

$$m \approx m_0 \quad (10.5)$$

a pohybovú rovnicu (10.2) s ohľadom na (10.1) a (10.3) napísať v tvare

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} \quad (10.6)$$

Rýchlosť \mathbf{v} možno vyjadriť ako časovú deriváciu polohového vektora \mathbf{r} , teda

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

a rovnica (10.6) prejde na diferenciálnu rovnicu pre polohový vektor v tvare

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = q\mathbf{E} \quad (10.7)$$

V pravouhlom súradnicovom systéme x, y, z je polohový vektor

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

a pomocou neho možno vektorovú pohybovú rovnicu (10.7) prepísať na tri zložkové rovnice

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= qE_x \\ m\ddot{y} &= qE_y \\ m\ddot{z} &= qE_z \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

Bodky nad súradnicami znamenajú ich časové derivácie. Rovnice (10.8) pri daných zložkách intenzity poľa E_x, E_y, E_z a pri udaných začiatočných podmienkach (začiatočná

poloha x_0, y_0, z_0 a začiatočná rýchlosť v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} v čase $t = 0$) umožňujú nájsť polohu častice ako funkciu času t .

Vidíme, že úloha o pohybe nabitých nerelativistickej častice v elektrickom poli je bežný kinematický problém, v ktorom charakter pohybu častice určujú vlastnosti poľa, ktoré môže závisieť nielen od súradníc, ale aj od času.

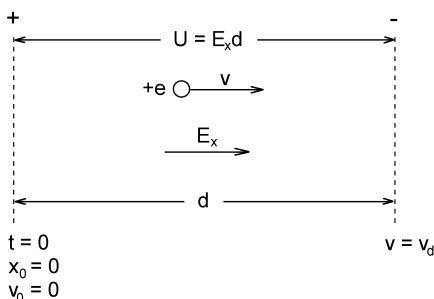
V praxi sú najdôležitejšie pohyby častíc v homogénnych a valcovo symetrických elektrických poliach. Homogénne polia sa využívajú na urýchľovanie častíc alebo na vychýlenie zväzku nabitých častíc, napr. systémom dvoch rovinných planoparalelných elektród v obrazovke osciloskopu. Valcovo symetrické elektrické polia sa používajú na vytvorenie elektrostatických šošoviek, ktoré slúžia na fokusáciu elektrónových a iónových zväzkov.

Najjednoduchší je pohyb častíc v homogénnych elektrických poliach, ktorý svojím charakterom pripomína pohyb hmotného bodu v gravitačnom poli. Predpokladajme, že homogénne elektrické pole má smer osí x a intenzitu E_x ($E_y = E_z = 0$). Sústava rovníc (10.8) prejde na tvar

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= qE_x \\ \ddot{y} &= \ddot{z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

z ktorého vidíme, že v smeroch osí y a z sa častice môže pohybovať konštantnou začiatočnou rýchlosťou (s nulovým zrýchlením) alebo je v pokoji. V smere osí x sa pohybuje s konštantným zrýchlením

$$a_x = \ddot{x} = \frac{q}{m} E_x \quad (10.10)$$



Obr. 10.1

ktoré môže byť kladné alebo záporné, podľa znamienka náboja. V smere osí x sa teda častice pohybuje rovnomerne zrýchlene alebo spomalene v závislosti od znamienka náboja častice. Ak sa častice s nábojom $q = +e$ (napr. protón) v čase $t_0 = 0$ nachádza v začiatočnom bode $x_0 = 0$ s nulovou rýchlosťou $v_0 = 0$, potom za čas t prejde v elektrickom poli intenzity E_x dráhu (pozri obr. 10.1)

$$d = \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{eE_x}{2m} t^2 \quad (10.11)$$

a jej rýchlosť dosiahne hodnotu

$$v_d = a_x t = \frac{eE_x}{m} t \quad (10.12)$$

Vyjadrením času t z výrazu (10.11) a dosadením do (10.12) dostaneme rýchlosť ako funkciu prejdenej vzdialenosti v poli v tvare

$$v_d = \sqrt{\frac{2eE_x d}{m}} \quad (10.13)$$

Ak uvážime, že $E_x d = U$ je rozdiel potenciálov začiatočného a konečného bodu (napätie), možno výraz (10.13) napísať v tvare

$$v_d = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \quad (10.14)$$

V prípade, že urýchľovanou časticou je elektrón, ktorého merný náboj má veľkosť $|e/m_e| = 1,7588 \cdot 10^{11} \text{ C.kg}^{-1}$, jeho rýchlosť je daná výrazom

$$v_d = 5,93 \cdot 10^5 \sqrt{U} \quad [\text{m.s}^{-1}; \text{V}] \quad (10.14a)$$

Vidíme, že ak elektrón zo stavu pokoja prejde potenciálový rozdiel iba 1 V, vzrastie jeho rýchlosť na 593 km/s. Ak prejde potenciálový rozdiel 2,5 kV, dosiahne rýchlosť $2,97 \cdot 10^7 \text{ m/s}$, čo je jedna desatina rýchlosti svetla.

Kinetická energia, ktorú častica na dráhe d dosiahne, je

$$W_k = \frac{1}{2} m v_d^2 = eU \quad (10.15)$$

a ako vidíme, rovná sa zmene potenciálnej energie eU na prejdenej dráhe.

Ak častica vletí do homogénneho elektrického poľa kolmo na jeho smer, jej výsledný pohyb v poli je superpozíciou rovnomerného pohybu v smere začiatočnej rýchlosti a rovnomerne zrýchleného pohybu v smere alebo proti smeru elektrického poľa v závislosti od znamienka náboja. Výsledný pohyb je potom pohybom častice po úsekoch paraboly. V súvislosti s pohybom častíc v elektrickom poli odporúčam čitateľovi riešiť úlohy 279, 280 a 282.

Na záver tohto odseku treba povedať, že naše úvahy o pohybe častice v elektrickom poli platia iba pre osamotenú časticu. V prípade dvoch a viac častíc treba uvážiť aj vzájomné elektrické a magnetické silové pôsobenie častíc. Dva nerelativistické elektróny vo vzdialenosti r pôsobia na seba odpudivou silou podľa Coulombovho zákona

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

a ak sa pohybujú rýchlosťou v kolmo na ich spojnicu jedným smerom a v jednej línii pôsobia na seba dodatočnou magnetickou príťažlivou silou

$$F_{mag} = e v B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^2}{r^2} v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \frac{v^2}{c^2} = F_{el} \frac{v^2}{c^2} \ll F_{el}$$

Tieto sily budú do istej miery ovplyvňovať pohyb elektrónov napr. v elektrónovom zväzku tak, že budú spôsobovať jeho defokuscáciu.

10.2 POHYB NABITÝCH ČASTÍC V STATICKÝCH MAGNETICKÝCH POLIACH

Na rozdiel od elektrického poľa, ktoré nabitú časticu urýchľuje pozdĺž svojich siločiar, pôsobenie magnetického poľa na pohyb častice je oveľa zaujímavejšie. Pohyb častice s nábojom e v magnetickom poli indukcie \mathbf{B} sa deje pod účinkom známej magnetickej zložky Lorentzovej sily

$$\mathbf{F}_{mag} = e \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (10.16)$$

Takáto sila nemôže častici udeľovať dráhové zrýchlenie v smere rýchlosti \mathbf{v} . Pre rýchlosti $v \ll c$ pohybová rovnica častice s hmotnosťou m je tvaru

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (10.17)$$

a z nej predovšetkým vidieť, že ak sa častica ocitne v poli \mathbf{B} v pokoji, pole nemá na ňu žiadny pohybový účinok. Ani v prípade pohybu častice pozdĺž indukčných čiar nemá magnetické pole vplyv na jej pohyb. Ak však rýchlosť $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, potom pole \mathbf{B} núti časticu pohybovať sa so zrýchlením, ktoré je kolmé na obidva vektory \mathbf{v} aj \mathbf{B} . Je to dostredivé zrýchlenie veľkosti v^2/R , ktoré v homogénnom magnetickom poli spôsobí pohyb častice po kružnici polomeru R (pozri obr. 10.2). V takom prípade rovnica (10.17) udáva rovnosť dostredivej sily

$$F = m \frac{v^2}{R}$$

a magnetickej sily veľkosti

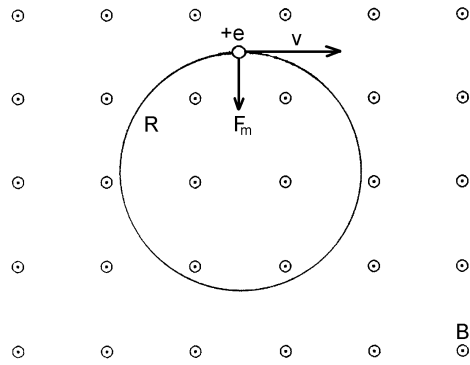
$$F_{mag} = e v B$$

takže platí

$$m \frac{v^2}{R} = e v B \quad (10.18)$$

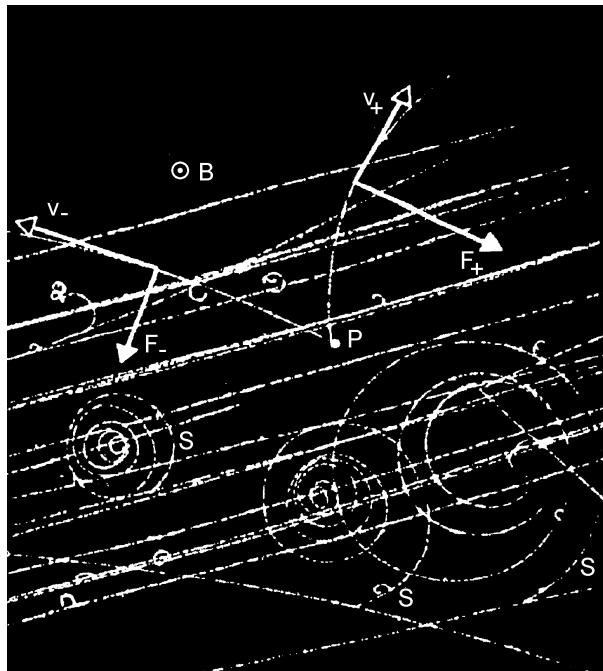
Z rovnice (10.18) plynie polomer R kružnice, po ktorej sa častica v magnetickom poli pohybuje

$$R = \frac{mv}{eB} \quad (10.19)$$



Obr. 10.2

Polomer je, ako vidíme, priamo úmerný hmotnosti a rýchlosti častice a nepriamo úmerný veľkosti magnetickej indukcie. Ťažké častice (napr. protóny, prípadne nabité mezóny) sa budú s danou rýchlosťou a v danom poli pohybovať po kružniciach s väčším polomerom ako napr. rovnako rýchle elektróny. Názorným a poučným príkladom pohybu nabitých urýchlených častíc v magnetickom poli je fotografický záber z bublinovej komory na obr. 10.3.



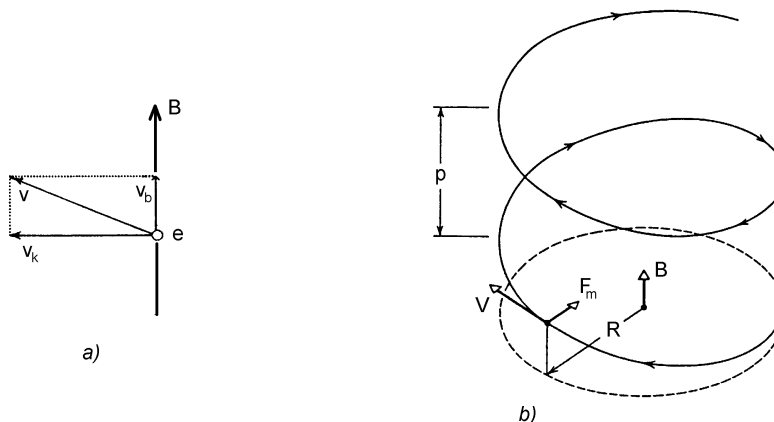
Magnetické pole B smeruje pred rovinu obrázku. V bode P vznikol pár elektrón-pozitrón a vzniklé častice sa pohybujú rýchlosťami $v-$ a $v+$ pod účinkom magnetických síl $F-$ a $F+$. Špirály S sú stopy troch nízkoenergetických elektrónov. (E. O. Lawrence Radiation Laboratory, University of California)

Obr. 10.3

Frekvencia obehov častice po kružnici je daná výrazom

$$\omega_c = \frac{v}{R} = \frac{e}{m} B \quad (10.20)$$

a závisí iba od druhu častice (od jej merného náboja e/m) a od hodnoty magnetickej indukcie. Táto skutočnosť sa využíva v urýchľovači častíc nazývanom cyklotrón, ktorého činnosť bude opísaná ďalej. Frekvencia ω_c sa nazýva **cyklotrónová frekvencia**.



Obr. 10.4

Ak má častica v magnetickom poli začiatočnú rýchlosť \mathbf{v} , ktorá nie je kolmá na vektor magnetickej indukcie, možno ju rozložiť na zložku \mathbf{v}_b pozdĺž indukčnej čiary a zložku \mathbf{v}_k na ňu kolmú (pozri obr. 10.4a). V smere indukčnej čiary sa častica bude pohybovať rovnomerne a v priečnej rovine po kružnici. Výsledný pohyb je pohybom po skrutkovici s polomerom

$$R = \frac{mv_k}{eB} \quad (10.21)$$

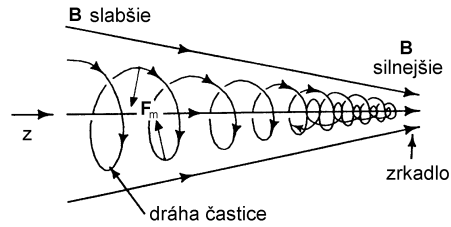
a s konštantným stúpaním

$$p = v_b T = 2\pi \frac{v_b}{\omega_c} = 2\pi \frac{mv_b}{eB} \quad (10.22)$$

podľa obr. 10.4b. Čím vyššia je magnetická indukcia, tým menší je polomer skrutkovice. Magnetické pole má na mrak pohybujúcich sa častíc "kompresný účinok" okolo indukčných čiar. Podobný princíp zvaný "pinch efekt"¹ sa používa na udržiavanie horúcich častíc vysokoteplotnej plazmy v strede dutiny toroidu slúžiaceho na experimenty s riadenou termonukleárnou reakciou. Takéto zariadenie vyvinuté v bývalom ZSSR sa nazýva **tokamak**².

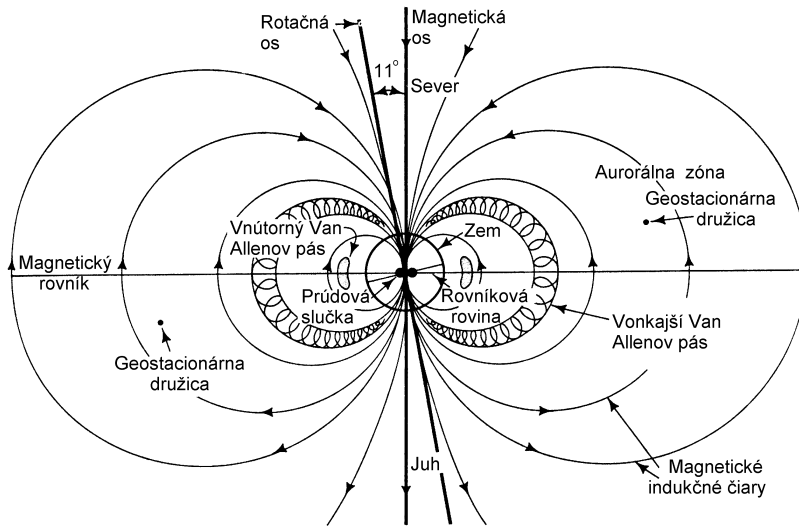
¹ Kolb, A.: Magnetic compression of plasma, Rev. Mod. Phys. **32**, 748 (1960)

² Skratka ruského názvu **toroidal'naja kamera s magnitnymi katuškami** (toroidálna komora s magnetickými cievkami).



Obr. 10.5

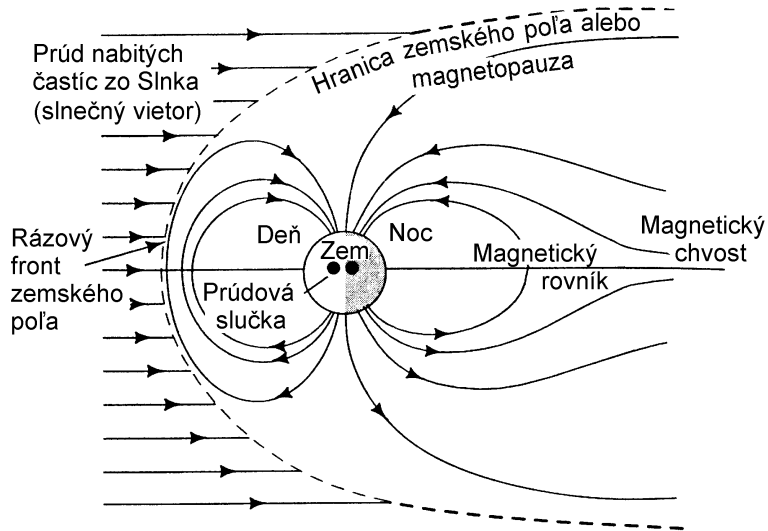
Zvláštny účinok na časticu má magnetické pole, ktorého veľkosť pozdĺž vybranej indukčnej čiary narastá ako na obr. 10.5. Skrutkovica, po ktorej sa častica pohybuje v smere osi z , má stále menší polomer, pretože magnetická indukcia narastá a obežná rýchlosť častice na skrutkovici rastie. Sila F_m má zložku proti smeru osi z , takže rýchlosť častice v smere indukčnej čiary (v smere osi z) klesá až na nulu a nakoniec zmení smer. Častica sa "odrazí" a miesto odrazu sa nazýva magnetické zrkadlo. Ak sú na opačnom konci magnetické indukčné čiary rovnako zhustené, častica sa znovu odrazí a bude vykonávať kmity medzi dvoma magnetickými zrkadlami. Takto sa pohybujú elektróny a protóny zo Slnka zachytené v magnetickom poli Zeme v dvoch oblastiach magnetosféry. Tieto oblasti veľkej koncentrácie častíc a silnej radiácie sa nazývajú **Van Allenove pásy**¹ (obr. 10.6). Elektróny a protóny veľkou rýchlosťou prelietavajú zo severnej do južnej oblasti magnetosféry a majú nepriaznivý vplyv na činnosť slnečných batérií, ako aj na posádky umelých družíc Zeme.



Obr. 10.6

¹ James Alfred van Allen, nar. 1914, americký fyzik a raketový odborník, objavil v roku 1958 na základe údajov z družice Explorer 1 vnútorný radiačný pás elektrónov a protónov vo výške 1 000 až 6 000 km v ekvatoriálnej oblasti. Vonkajší radiačný pás zložený takmer výlučne z elektrónov vo výške 15 000 až 25 000 km objavil ruský fyzik S. N. Vernov v roku 1962.

Magnetické pole Zeme zobrazené na obr. 10.6 má dipólový charakter, avšak také je iba v relatívne malých vzdialenostiach od Zeme. Vo veľkých vzdialenostiach je deformované magnetickým poľom slnečného vetra – tokom elektrónov a protónov zo Slnka. Výsledné magnetické pole Zeme vo veľkých dimenziách je znázornené na obr. 10.7 (pozri tiež ilustračný obr. 6.1). Vidíme, že zo slnečnej strany je "stláčané" slnečným vetrom a na opačnej strane vytvára charakteristický chvost. Pôvod magnetického poľa Zeme a niektorých iných planét slnečnej sústavy dodnes nie je presne známy. Existuje mnoho hypotéz o pôvode zemského magnetizmu, pozri napr. úlohu 167. Nepochybne je dôsledkom nejakých elektrických prúdov, ktoré majú pravdepodobne pôvod v magnetohydrodynamických procesoch v jadre Zeme. Na obr. 10.6 a 10.7 je zdroj magnetického poľa Zeme modelovaný prúdovou slučkou vo vnútri zemegule.



Obr. 10.7

10.3 POHYB ČASTÍC POD SÚČASNÝM ÚČINKOM ELEKTRICKÝCH A MAGNETICKÝCH POLÍ

V prípade, ak sa častica s nábojom e pohybuje pod účinkom elektrického aj magnetického poľa, výslednou pôsobiacou silou je Lorentzova sila

$$\mathbf{F}_{elmag} = \mathbf{F}_{el} + \mathbf{F}_{mag} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

a pohybová rovnica má tvar

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Kombináciou elektrických a magnetických polí možno veľmi efektívne riadiť pohyb častíc, čo sa využíva v mnohých zariadeniach vysokofrekvenčnej a jadrovej, ale aj spotrebnej elektroniky. Uvedieme niekoľko príkladov:

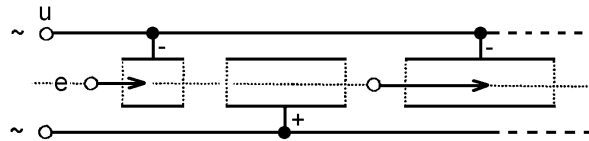
Ak sa nabitá častica so skríženým homogénnym elektrickým E a magnetickým B poľom preteká kolmo na obidve polia prúd nabitých častíc, potom v priamom smere prejdú iba častice s rýchlosťou

$$v = \frac{E}{B} \quad (10.23)$$

Ostatné budú vychýlené elektrickým alebo magnetickým poľom. Na tomto princípe pracuje **rýchlostný selektor** v Bainbridgeovom hmotnostnom spektrografe (pozri odsek 10.3.2 a úlohu 285).

Ak sa nabitá častica ocitne v skríženom elektrickom a magnetickom poli s nulovou rýchlosťou, začne sa pohybovať "skackavým" cykloidálnym pohybom v rovine kolmej na smer magnetického poľa (pozri úlohu 288). Tento princíp sa využíva na budenie kmitov vo výkonnom generátore kmitov veľmi vysokých frekvencií (rádovo GHz) nazývanom **magnetron**, ktorý je základnou súčasťou radaru a mikrovlnových pecí.

V skríženom statickom magnetickom poli a vysokofrekvenčnom elektrickom poli sa nabitá častica môže za istých okolností pohybovať v rovine kolmej na smer magnetického poľa po zväčšujúcej sa špirále, pričom sa zväčšuje aj jej rýchlosť, resp. energia. Tento spôsob sa využíva na urýchlenie častíc v cyklotróne (pozri úlohu 292). Činnosť tohto zariadenia je opísaná v nasledujúcom odstavci.



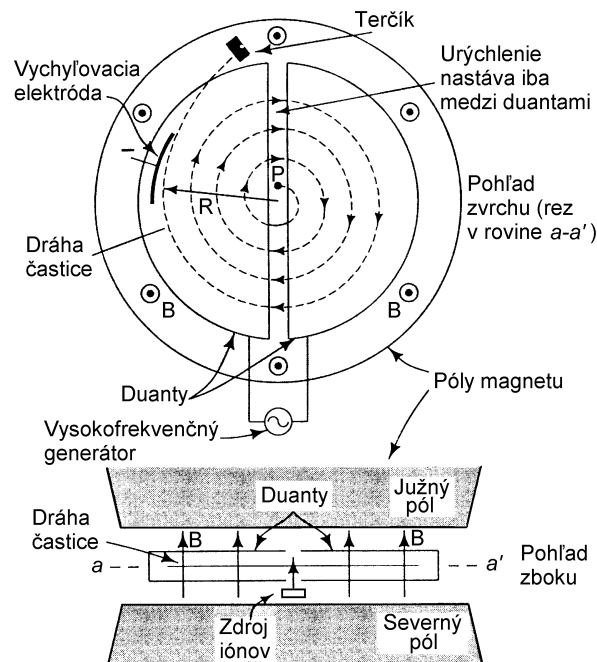
Obr. 10.8

10.3.1 Urýchľovanie nabitých častíc. Cyklotrón

Urýchľovanie nabitých elementárnych častíc a iónov je jeden zo základných technických problémov fyziky elementárnych častíc a fyziky vysokých energií. V odseku 10.1 sme videli, že priamym spôsobom urýchlenia častice je jej prechod elektrickým poľom, čím častica získa energiu eU , kde e je náboj častice a U je potenciálový rozdiel (napätie) na úseku, ktorý častica prešla. Vidíme, že čím väčšia je požadovaná energia, tým vyššie musí byť urýchľujúce napätie. Súčasné experimenty s elementárnymi časticami vyžadujú častice s energiami rádovo $\text{MeV} = 10^6 \text{ eV}$ až $\text{TeV} = 10^{12} \text{ eV}$. Lineárne urýchlenie častíc napätím na také vysoké energie nie je možné, pretože by to vyžadovalo urýchľujúce napätia rádovo 10^6 až 10^{12} V . Potrebu vysokého napätia možno obísť v sekcionom **lineárnom urýchľovači**,¹ v ktorom sa častica urýchľuje striedavým vysokofrekvenčným napätím u nižšej amplitúdy, ktoré je pripojené na rad valcových dutých elektród podľa

¹ Lawrence, E. O., Sloan, O. H., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. **17**, 64 (1931)

obr. 10.8. Častica sa urýchľuje napätím jednej polarity a počas opačnej polarity prechádza vnútrajškom valcovej elektródy, v ktorej je elektrické pole nulové. Takéto urýchlenie je spojené s veľkými priestorovými problémami a ťažkosťami synchronizácie rýchlosti a poľa, a neumožňuje získať častice s energiami viac než 1 MeV. V roku 1930 americkí fyzici Lawrence a Livingstone¹ vytvorili prvý cyklický urýchľovač iónov, v ktorom v podstate využili princíp sekciovaneho lineárneho urýchľovača s tým rozdielom, že urýchľovanú časticu počas nevhodnej polperiódy napätia vysokofrekvenčného generátora "ukryli" v elektricky tienenej oblasti a tam magnetickým poľom zmenili smer jej pohybu na opačný. Tento urýchľovač nazvali **cyklotrón**. Schematicky je cyklotrón znázornený na obr. 10.9. Jeho základným prvkom je dvojica dutých nízkych medených polvalcov v tvare písmen "D". Tieto polvalce sa nazývajú "duanty" a sú umiestnené v homogénnom magnetickom poli indukcie B veľkého elektromagnetu. V strede kruhovej symetrie sa nachádza zdroj urýchľovaných častíc, ktorými môžu byť protóny, deuteróny, α -častice, prípadne iné ióny. Celé zariadenie medzi pólmi elektromagnetu je vákuovotesne uzavreté a vyčerpané na vysoké vákuum, k duantom je pripojený generátor vysokofrekvenčného napätia.



Obr. 10.9

Predpokladajme, že v istom okamihu sa v strede cyklotrónu v bode P ocitne kladný ión. Ak je pravý duant v tom okamihu záporný, bude ión elektrickým poľom medzi duantami urýchľovaný doprava, do dutiny duantu, kde má istú konštantnú rýchlosť. V dutine na neho pôsobí iba magnetické pole, ktoré ho núti pohybovať sa po kružnici s malým polomerom r podľa vzťahu (10.19) a po prebehnutí polkružnice sa vráti znovu do štrbiny

¹ Lawrence, E. O., Livingstone, M. S., Phys. Rev. **37**, 1707 (1931)

medzi duantami. Ak sa medzitým zmení polarita napätia medzi duantami, ión bude v štrbine elektrickým poľom znovu urýchlený a vletí do dutiny ľavého duantu s väčšou rýchlosťou, tam prejde po polkružnici s väčším polomerom, atď. Ak kruhová frekvencia ω vysokofrekvenčného zdroja sa rovná cyklotrónovej frekvencii ω_c iónu v danom magnetickom poli podľa vzťahu (10.20), bude ión pri každom obehu synchronne urýchľovaný, a bude sa pohybovať po špirále so stále väčšou rýchlosťou. Na polomere R , ktorý predstavuje efektívny polomer cyklotrónu, je rýchlosť a energia iónu maximálna. Tam je ión vychýlený vysokým záporným potenciálom vychýľovacej elektródy a otvorom v duante nasmerovaný na terčik.

Činnosť cyklotrónu je podmienená splnením dvoch podmienok. Prvou podmienkou je vzťah (10.20), teda frekvencia f generátora pre daný ión s merným nábojom q/m a v danom poli B musí mať hodnotu

$$f = \frac{q}{2\pi m} B \quad (10.24)$$

Cyklotrón sa teda musí "naladiť". Obyčajne je frekvencia generátora pevná a nastavuje sa hodnota magnetickej indukcie podľa vzťahu (10.24). Druhou podmienkou je zachovanie nerelativistických pomerov v cyklotróne, t. j. rýchlosť častice nesmie narásť na také hodnoty, pri ktorých sa už prejavuje závislosť jej hmotnosti od rýchlosti, ináč povedané, hmotnosť m vo výraze (10.24) musí zostať konštantná pre všetky častice v cyklotróne. V opačnom prípade sa poruší synchronizácia, častice nebudú v štrbine urýchľované, ale môžu byť prípadne brzdené. Z toho vyplýva, že cyklotrón sa nehodí na urýchľovanie ľahkých častíc, ako sú napr. elektróny, ale na protóny, prípadne ťažšie častice.

Konečná kinetická energia častice je daná efektívnym polomerom cyklotrónu R a magneticou indukciou B . Podľa vzťahu (10.19) je rýchlosť urýchlenej častice na konci jej pohybu

$$v = \frac{q}{m} RB$$

a kinetická energia

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{(qRB)^2}{2m} \quad (10.25)$$

Bude zaujímavé vypočítať číselne energiu častice urýchlenej cyklotrónom s bežnými parametrami. Predpokladajme, že efektívny polomer cyklotrónu je $R = 0,5$ m a magnetická indukcia $B = 1,5$ T. Nech urýchľovanými iónmi sú jadrá deutéria s hmotnosťou $m \approx 2m_p \approx 3,34 \cdot 10^{-27}$ kg a s nábojom $q = e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ C. Dosadením týchto hodnôt do výrazu (10.25) dostaneme

$$W_k = 2,16 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

Ak uvážime, že $1 \text{ J} = 6,24 \cdot 10^{18} \text{ eV}$, dostaneme energiu deuterónu v elektrónvoltoch

$$W_k = 13,5 \text{ MeV}$$

Vidíme, že pri lineárnom urýchľovaní by na získanie tejto kinetickej energie musel deuterón prejsť potenciálny rozdiel 13,5 miliónov voltov! Frekvencia kmitov vysokofrekvenčného generátora pritom je

$$f = \frac{q}{2\pi m} B \approx 11,44 \text{ MHz}$$

Amplitúda urýchľujúceho vysokofrekvenčného napätia U generátora teoreticky nemá vplyv na konečnú energiu častice, pretože ona určuje iba veľkosť energetických prírastkov qU častice v štrbine medzi duantami. Pri každom obehu získa častica energiu $2qU$. Ak označíme počet obehov častice v cyklotróne n , potom konečná kinetická energia častice je

$$W_k = 2nqU \quad (10.26)$$

a v cyklotróne častica vykoná

$$n = \frac{W_k}{2qU} \quad (10.27)$$

obehov. Vidíme, že n je nepriamo úmerné U . Počet obehov sa však nemá voliť príliš veľký, pretože to zvyšuje disperziu urýchľovaného zväzku častíc.

Cyklotrón je iba jeden z mnohých cyklických urýchľovačov častíc, v ktorých je častica elektrickým poľom urýchlená a magnetickým poľom vychyľovaná.

K urýchleniu ľahkých častíc, ako sú elektróny, slúži urýchľovač, ktorý v roku 1940 skonštruoval a jeho činnosť publikoval D. W. Kerst.¹ Nazval ho **betatrón**. Je to tiež cyklický urýchľovač, ale urýchlenie elektrónu nastáva na princípe elektromagnetickej indukcie zvyšovaním indukčného toku na kruhu, po obvode ktorého elektrón obieha. Zvláštnym tvarovaním pólových nástavcov elektromagnetu sa dosiahne konštantný polomer dráhy elektrónu.

Cyklotrónom možno urýchľovať aj relativistické častice, ak sa pri zvyšovaní ich hmotnosti podľa vzťahu (10.4) bude súčasne znižovať frekvencia f , aby pri konštantnom B zostal vzťah (10.24) v platnosti. Takýto synchronizovaný cyklotrón sa nazýva **synchrociklotrón**.

Ak sa so zmenou frekvencie bude súčasne meniť aj magnetická indukcia, možno dosiahnuť to, že polomer dráhy urýchľovanej častice R zostane konštantný, takže bude splnená rovnica (10.24), pri platnosti rovnice

$$v = 2\pi f R_0 \quad (10.28)$$

Rýchlosť častice sa bude zvyšovať na jednej kruhovej dráhe polomeru R_0 , čo si žiada magnetické pole iba na prstenci s polomerom R_0 . Je to dôležité u veľkých urýchľovačov s polomerom dráhy až niekoľko sto metrov, na ktorej sa magnetické pole vytvára prstencovou sústavou magnetov, pretože jediný magnet s polomerom R_0 by sa nedal realizovať. Zariadenie pracujúce na tomto princípe bolo opísané Mc Millanom a Vekslerom² v štyridsiatych rokoch tohto storočia a nazýva sa **synchrotrón**. Elektróny urýchlené cyklickými urýchľovačmi na rýchlosti blízke rýchlosti svetla vyžarujú zvláštny druh žiarenia, ktoré sa nazýva **synchrotrónové žiarenie**.

¹ Kerst, D. W., Phys. Rev. **58** (1940); **60** (1941)

² Mc Millan, E. M., Phys. Rev. **69**, 534 (1946); **80**, 493 (1950)

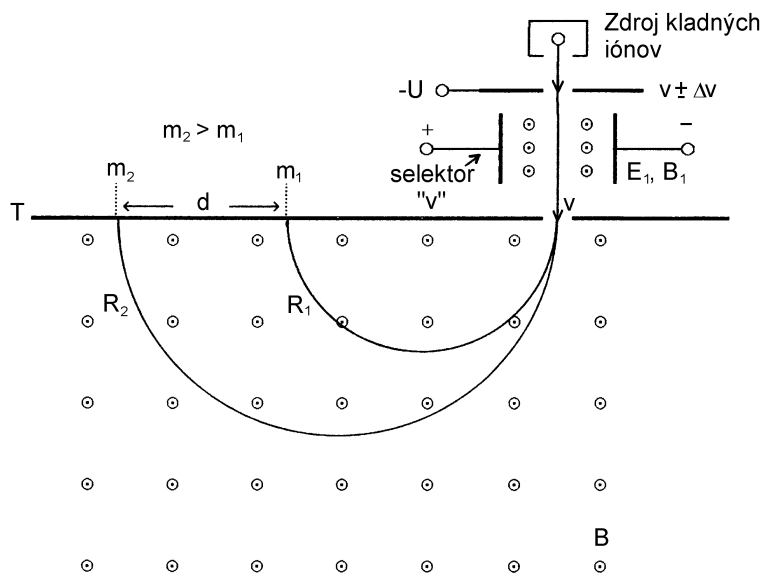
Veksler, V., Journ. Phys. (SSSR) **9**, 153 (1945)

Veksler, V., Phys. Rev. **69**, 244 (1946)

10.3.2 Hmotnostný spektrograf alebo separátor izotopov

Ako je známe, izotopy vybraného prvku sa nedajú separovať žiadnou z chemických metód. Takúto metódu ponúka fyzika preskúmaním pohybu iónov izotopov prvku v elektrických a magnetických poliach. Zariadenie slúžiace na takýto výskum sa nazýva **hmotnostný spektrograf**. Schéma jedného z existujúcich typov hmotnostných spektrografov (Bainbridgeov hmotnostný spektrograf) je znázornená na *obr. 10.10*. Zdroj kladných jednomocných iónov s nábojom $q = +e$ produkuje zmes izotopov skúmaného prvku. Ióny sú urýchlené elektródou s napätím $-U$ oproti zdroju a na výstupe zo štrbiny je zväzok iónov s rýchlosťami v intervale $v \pm \Delta v$. Tento zväzok prechádza rýchlostným selektorom, ktorý prepustí v priamom smere iba ióny, ktorých rýchlosť spĺňa podmienku

$$\frac{E_1}{B_1} = v \quad (10.29)$$



Obr. 10.10

kde E_1 a B_1 sú intenzita elektrického poľa a magnetická indukcia v rýchlostnom selektore. Ostatné ióny budú selektorom vychýlené, a neprejdú druhou štrbinou do priestoru magnetického poľa \mathbf{B} . V tomto priestore sa budú ióny pohybovať po kružniciach s polomerom R daným výrazom (10.19). V konštantnom poli \mathbf{B} bude polomer dráhy jednomocných iónov závisieť iba od hmotnosti iónu. Na obrázku sú znázornené dráhy dvoch izotopov prvku s hmotnosťami m_1 a m_2 ($m_2 > m_1$). Tieto dráhy sú polkruhové a končia na tienidle T , kde vytvoria stopu. Hmotnosť iónov plynie zo vzťahu

$$m = \frac{eRB}{v} \quad (10.30)$$

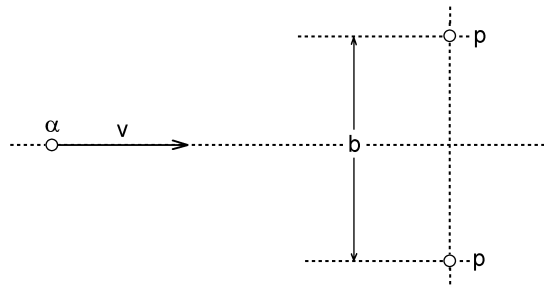
Rozdiel hmotností dvoch izotopov, ktorých stopy sú znázornené na obr. 10.10, je potom daný výrazom

$$m_2 - m_1 = \frac{eBd}{2v} \quad (10.31)$$

kde $d/2 = R_2 - R_1$.

Úlohy 277 – 292

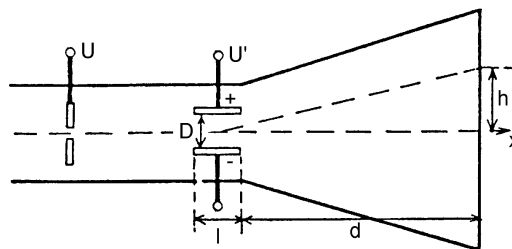
277. α -častica prechádza veľkou rýchlosťou cez geometrický stred molekuly vodíka H_2 a pohybuje sa po priamke kolmej k osi molekuly (obr. 277). Vzdialenosť protónov v molekule je b . Určite bod na dráhe α -častice, kde sila pôsobiaca na ňu je maximálna. Predpokladá sa, že vzdialenosť protónov sa pri prechode α -častice molekulou nemení. Tento predpoklad je prípustný, pretože rýchlosť α -častice je veľká. Pri výpočte sa zanedbáva tiež vplyv elektrónov v molekule, čo je hrubé priblíženie, pretože v centrálnej časti molekuly H_2 je značná koncentrácia záporného náboja.



Obr. 277

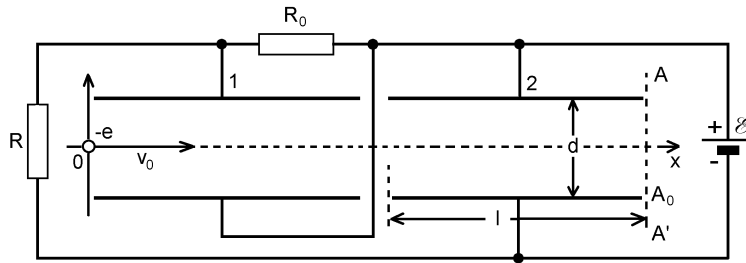
278. Jednomocný ión cézia je urýchľovaný pozdĺž dráhy dlhšej $d = 3,3$ mm elektrickým poľom o intenzite $E = 3 \cdot 10^4$ V/m zo stavu pokoja. Vo vákuu bez prítomnosti poľa prejde potom urýchlený ión dráhu o dĺžke $s = 1$ mm za čas $t = 8,7 \cdot 10^{-8}$ s. Z uvedených údajov určite hmotnosť iónu Cs^+ .

279. V katódovej trubici na obr. 279 sú elektróny urýchľované napätím U a po urýchlení prechádzajú medzi vychyľovacími doskami v tvare doskového kondenzátora. Po prechode vychyľovacím priestorom dopadajú elektróny na fluorescenčné tienidlo, kde vytvárajú svetelnú stopu. Odvodte výraz pre odchýlku h elektrónového lúča na tienidle, ak napätie na vychyľovacích doskách je U' . Riešte numericky pre: $U = 500$ V, $U' = 100$ V, $l = 2$ cm, $D = 0,5$ cm, $d = 8$ cm.



Obr. 279

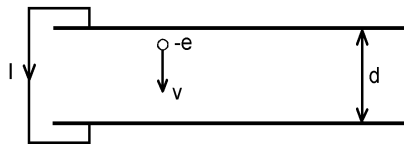
280. Dva rovnaké doskové kondenzátory 1 a 2 (dĺžka dosiek l , vzdialenosť dosiek d) sú zapojené ku zdroju EMN \mathcal{E} podľa obr. 280, pričom kondenzátory sú tesne vedľa seba. Do oblasti kondenzátora 1 (v bode 0 na osi $0x$) vletí elektrón rýchlosťou v_0 v smere osi x .



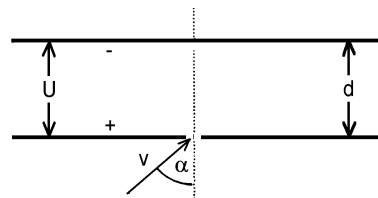
Obr. 280

- Vypočítajte veľkosť a smer rýchlosti, s ktorou elektrón opustí kondenzátor 2 (v rovine AA') pri všeobecne zadaných hodnotách l , d , \mathcal{E} a odporov R a R_0 . Predpokladá sa, že všetky parametre sú zvolené tak, že elektrón pri pohybe medzi doskami kondenzátora nenarazí na dosky.
- V akej vzdialenosti od osi $0x$ v rovine AA' opustí elektrón kondenzátor 2?
- Ako musí byť zvolený odpor R (pri konštantnej hodnote odporu R_0), aby elektrón opustil kondenzátor 2 rýchlosťou paralelnou s osou $0x$? Aká veľká je táto rýchlosť? V akej vzdialenosti od osi $0x$ vystúpi elektrón z kondenzátora 2?
- Aká musí byť hodnota EMN zdroja, aby elektrón vyletel z kondenzátora 2 tesne popri pravej hrane jeho dolnej dosky (bodom A_0) rýchlosťou paralelnou s osou $0x$? Tento prípad riešte numericky pre: Energia elektrónu na vstupe kondenzátora 1 je $W_k = 10$ keV a jeho rýchlosť je paralelná s osou $0x$, $l = 10$ cm, $d = 2$ cm.
- Kde je v prípade d) energia elektrónu medzi doskami kondenzátorov maximálna? Aká je jej hodnota?

281. Dve veľmi veľké paralelné vodivé roviny uložené vo vzdialenosti $d = 2$ mm sú spojené vodivým skratom podľa obr. 281. V istom okamihu je z jednej roviny uvoľnený elektrón, ktorý sa konštantnou rýchlosťou $v = 10^6$ m/s pohybuje kolmo k druhej rovine a dopadne na ňu. Nájdite veľkosť prúdu, ktorý potečie skratom v čase pohybu elektrónu medzi rovinami. Ako dlho trvá tento prúdový impulz? Jednoduchý výraz, ktorý dostanete pre prúd je špeciálnym prípadom vety o indukovaných prúdoch (Shockleyho-Ramova veta) často používané v teórii generátorov kmitov veľmi vysokých frekvencií. Pri riešení využite výsledok riešenia úlohy 43.



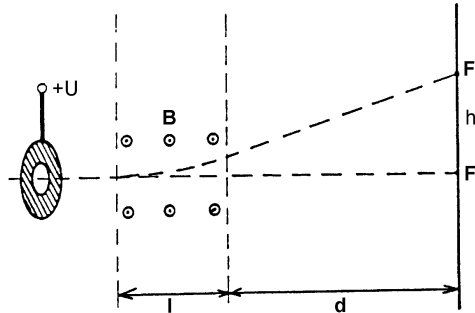
Obr. 281



Obr. 282

282. Elektrón s rýchlosťou $v = 10^7$ m/s vlieta do priestoru doskového kondenzátora so vzdialenosťou dosiek $d = 1$ cm, ktorý je pod napätím $U = 425$ V (obr. 282). Uhol dopadu elektrónu vzhľadom na kolmicu k doske kondenzátora $\alpha = 30^\circ$. Vypočítajte hĺbku preniku elektrónu do kondenzátora, ak horná doska kondenzátora je záporná. Nájdite vzdialenosť miesta dopadu elektrónu od kolmice na hornej doske, ak polarita napätia na doskách je opačná.

283. Zväzok elektrónov urýchlených napätím $U = 300\text{V}$ prechádza priestorom s homogénnym magnetickým poľom s indukciou $B = 1,46 \cdot 10^{-2}\text{ T}$, ktoré smeruje na obr. 283 pred nákresňu. Magnetické pole pôsobí na dĺžke $l = 2,5\text{ cm}$. Bez prítomnosti magnetického poľa zväzok dopadá do bodu F na fluorescenčnom tienidle, ktoré sa nachádza vo vzdialenosti $d = 5\text{ cm}$ od pravej hranice magnetického poľa. Za prítomnosti magnetického poľa zväzok dopadá do bodu F' na tienidle. Vypočítajte odchýlku $h = FF'$ elektrónového zväzku.

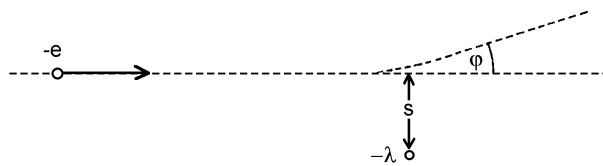


Obr. 283

284. α -častica vletí do homogénneho magnetického poľa s indukciou $B = 2,5 \cdot 10^{-2}\text{ T}$, pričom jej rýchlosť je kolmá na smer magnetického poľa. Moment hybnosti častice v danom poli je $L = 1,33 \cdot 10^{-22}\text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Vypočítajte kinetickú energiu častice a jej cyklotrónovú frekvenciu. Hmotnosť protónu, príp. neutrónu je $m = 1,67 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$.

285. Nabitá častica sa pohybuje rýchlosťou v_x v smere osi x v navzájom kolmých elektrických a magnetických poliach E_y a B_z . V akom vzťahu musí byť rýchlosť častice v_x k poliam E_x a B_x , aby polia neovplyvnili smer pohybu častice? Na princípe dvoch kolmých polí, ktoré sú kolmé na rýchlosť častice sa zakladá činnosť rýchlostného selektora v Bainbridgeovom hmotnostnom spektrografe.

286. V elektrónovom mikroskope prechádza zväzok elektrónov s veľkou energiou vedľa tenkého priameho drôtu, ktorý je uložený kolmo k začiatočnému smeru elektrónov vo vzdialenosti s od tohoto smeru podľa obr. 286. Drôt je nabitý záporným nábojom λ na jednotku dĺžky. Elektrické pole drôtu je slabé, takže málo ovplyvní dráhu elektrónov. Ukážte, že v takomto prípade uhol odchýlky elektrónového zväzku v nezávisí od vzdialenosti s , t. j. rovnobežný zväzok zostáva rovnobežným aj po odklone od prvotného smeru! Nabitý drôt pôsobí v tomto prípade na elektrónový zväzok podobne ako Fresnelov dvojhranol na svetelný zväzok.



Obr. 286

287. Vákuová dióda má cylindrickú anódu s polomerom R a katódou veľmi malého polomeru r na osi anódy. Anóda je udržiavaná na potenciále V oproti katóde. V smere osi cylindra je naložené homogénne magnetické pole B . Bez prítomnosti magnetického poľa by sa elektróny emitované katódou pohybovali radiálne k anóde. V dôsledku pôsobenia magnetického poľa sa elektróny pohybujú po zakrivených dráhach s polomerami zakrivenia závislými od veľkosti magnetickej indukcie. Pri

istej hodnote magnetickej indukcie B elektróny vôbec nedosiahnu anódu a vracajú sa na katódu. Vypočítajte túto najmenšiu kritickú hodnotu magnetickej indukcie, pri ktorej prúd diódou prestáva tečť! Pri výpočte predpokladajte, že rýchlosť elektrónov je konštantná a daná výrazom

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

čo je skutočne dobre splnené, ak $r \ll R$ (prečo?). Na opísanom princípe pracuje generátor veľmi vysokých frekvencií nazývaný magnetrón.

288. Elektrón sa pohybuje v elektrickom a magnetickom poli, ktoré má v pravouhlom súradnicovom systéme zložky

$$(0, -E_y, 0)$$

$$(0, 0, -B_z)$$

V čase $t = 0$ sa elektrón nachádza v začiatku súradníc, kde je jeho rýchlosť nulová. Vypočítajte:

- tvar dráhy elektrónu,
- zložky rýchlosti elektrónu ako funkcie času,
- unášavú (driftovú) rýchlosť elektrónu.

289. Frekvencia elektrického poľa na urýchlenie protónov v cyklotróne s magneticou indukciou B je $\omega = 10^7$ rad/s. Aká frekvencia je potrebná na urýchlenie

- deuterónov,
- iónov He^+ ,
- α -častíc?

290. V cyklotróne s polomerom $R = 0,35$ m je na duantoch naložené vysokofrekvenčné elektrické pole s frekvenciou $f = 13,8$ MHz. Vypočítajte:

- magneticú indukciu B potrebnú pre synchronnú činnosť cyklotrónu pri urýchľovaní protónov,
- maximálnu energiu urýchlených protónov.

291. Elektrón a protón sú urýchľované zo stavu pokoja po dráhe $d = 10$ cm elektrickým poľom intenzity $E = 3 \cdot 10^4$ V/m a potom vniknú do magnetickeho poľa s indukciou $B = 1$ T, ktoré smeruje kolmo na rýchlosť častíc. Vypočítajte cyklotrónové frekvencie a polomery kruhových dráh častíc v magneticom poli.

292. Elektrické a magnetické pole v cyklotróne má zložky

$$E_x = E \cos \omega t \quad E_y = -E \sin \omega t \quad E_z = 0 \quad B_x = B_y = 0 \quad B_z = B$$

kde

$$\omega_c = \frac{qB}{m}$$

Os z je totožná s osou cyklotrónu. Vypočítajte zložky dráhy ako funkcie času pre nabitú časticu s nábojom q a hmotnosťou m za predpokladu, že v čase $t = 0$ je častica v začiatku súradníc (v strede cyklotrónu) v pokoji. Nakreslite tvar dráhy častice.



Heinrich HERTZ
(1857 Hamburg – 1894 Bonn)