

## 9 STRIEDAVÉ ELEKTRICKÉ PRÚDY

### 9.1 CHARAKTERISTIKY STRIEDAVÝCH ELEKTRICKÝCH PRIEBEHOV

V tejto kapitole sa budeme zaoberať vlastnosťami elektrických napätí a prúdov, ktoré sa menia v čase. Trieda takýchto elektrických priebehov je veľmi široká, budeme sa preto zaoberať iba niektorými vybranými prúdovými a napätovými priebehmi, ktoré majú najväčší technický význam. S niektorými časovopremennými priebehmi sme sa zoznámili už v predchádzajúcich častiach nášho pojednania. Boli to napríklad prechodové javy v obvode, v ktorom sa nabíja, prípadne vybíja kondenzátor (prechodový jav v  $RC$  obvode – pozri odsek 5.8) alebo prechodové javy v  $RL$ , prípadne  $RLC$  obvode (pozri odseky 7.8 a 7.9). Spoločným znakom týchto časových priebehov bola ich nestacionárnosť – prúdy a napätia sa exponenciálne blížili k nejakej stacionárnej hodnote.

Dôležitou triedou časovopremenných napätí a prúdov sú periodické napätové a prúdové priebehy, ktoré sú z matematického hľadiska periodické funkcie času  $y(t)$ . Periodickou je taká funkcia času, ktorej hodnoty sa v časových intervaloch  $T$  pravidelne opakujú. Pre takúto funkciu teda platí

$$y(t) = y(t + nT) \quad (9.1)$$

kde  $n$  je celé číslo. Časový interval  $T$  sa nazýva perióda funkcie. Periodické prúdy a napätia majú veľký technický význam, pretože s periodickými striedavými prúdmi pracuje napríklad elektrická energetika. Rovnako dôležité sú periodické elektrické procesy v obvodevej elektronike, ktorá sa zase využíva v telekomunikácii, regulačnej technike, v počítačových obvodoch a inde. Základná frekvencia (kmitočet) takých prúdov začína pri nule (konštantné prúdy a napätia) a končí v infračervenej oblasti, pri frekvenciách  $\sim 10^{12}$  Hz. Pri vyšších frekvenciách stráca pojem elektrického prúdu fyzikálny zmysel. Príklady periodických funkcií sú znázornené na *obr. 9.1*.

Dôležitou matematickou vlastnosťou periodických časových priebehov je možnosť ich rozloženia do nekonečného radu trigonometrických funkcií, ktorý sa nazýva **Fourierov rad** a pre funkciu  $y(t)$  má tvar

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t] \quad (9.2)$$

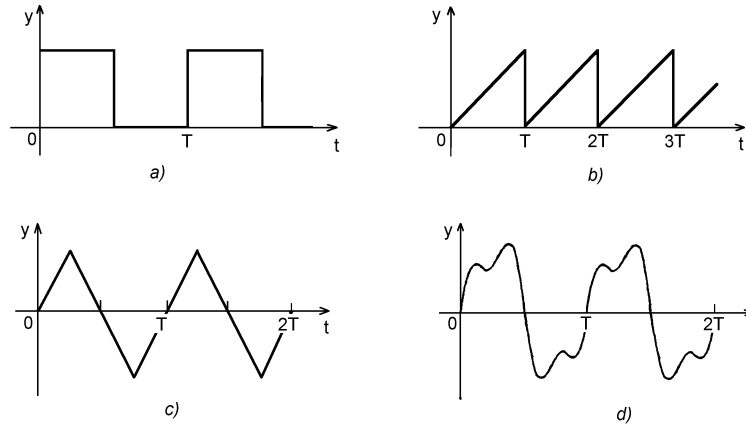
kde  $a_n, b_n$  sú Fourierove koeficienty, dané výrazmi

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos n\omega t dt \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.3a)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin n\omega t dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.3b)$$

a

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad [\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}] \quad (9.4)$$



Obr. 9.1

Periodický časový priebeh (v elektronike ho nazývame tiež napäťový alebo prúdový signál) sa teda pre účely jeho analýzy dá rozložiť na nekonečný rad sínusových a kosínusových funkcií uhlového argumentu

$$\Phi_n = n\omega t = 2\pi n \frac{t}{T} \quad [\text{rad}] \quad (9.5)$$

Veličina  $\Phi_n$  sa nazýva **fáza** a  $\omega$  daná výrazom (9.4) je **uhlová frekvencia** základnej sínusovej alebo kosínusovej zložky,  $n\omega$  sú kruhové frekvencie vyšších harmonických zložiek. Okrem kruhovej frekvencie sa pri opise používa lineárna **frekvencia**  $f$ , ktorá s kruhovou frekvenciou  $\omega$  a s periódou  $T$  súvisí vzťahom

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad [\text{Hz} = \text{s}^{-1}] \quad (9.6)$$

Frekvencia  $f$  v hertzoch (Hz) udáva počet kmitov harmonického priebehu za sekundu.

Rozklad periodického priebehu na jeho frekvenčné zložky sa nazýva harmonická (Fourierova) analýza. Opačný proces – skladanie jednotlivých harmonických zložiek so zodpovedajúcimi amplitúdami podľa výrazov (9.2) a (9.3), ktorý vedie k vytvoreniu

periodickej funkcie  $y(t)$ , nazýva sa Fourierova harmonická syntéza. Koeficienty  $a_n, b_n$  predstavujú amplitúdy jednotlivých zložiek signálu, ktoré s rastúcim  $n$  klesajú. Existujú aj iné možnosti rozvinutia periodickej funkcie do nekonečného radu, avšak je zaujímavé, že zo všetkých možných rozložení signálu Fourierove koeficienty klesajú najrýchlejšie, čo znamená, že matematický rad (9.2) – Fourierov rad – konverguje najrýchlejšie.

Prvý člen radu  $a_0/2$  je konštantný, nezávislý od času, predstavuje konštantné napätie alebo prúd. V mnohých prípadoch je tento člen nulový ( $a_0 = 0$ ). V takom prípade hovoríme, že priebeh  $y(t)$  nemá jednosmernú zložku, a práve takýto priebeh nazývame striedavý. Má dôležitú vlastnosť, že jeho **stredná hodnota**

$$\overline{y(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (9.7)$$

sa rovná nule. Skutočne, ak do výrazu (9.7) dosadíme výraz (9.2) pri  $a_0 = 0$ , dostaneme

$$\overline{y(t)} = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_0^T \cos n\omega t dt + b_n \int_0^T \sin n\omega t dt \right] = 0 \quad (9.8)$$

pretože pre všetky celé  $n$

$$\int_0^T \sin n\omega t dt = \int_0^T \cos n\omega t dt = 0$$

Priebehy na *obr. 9.1a, b* majú nenulovú jednosmernú zložku, priebehy na *obr. 9.1c, d* jednosmernú zložku nemajú – sú to striedavé priebehy.

Inou dôležitou hodnotou periodickej funkcie je **odmocnina jej strednej kvadratickej hodnoty** alebo **efektívna hodnota** (angl. root mean square value – RMS value)

$$y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)} > 0 \quad (9.9)$$

ktorá je vždy nenulová a kladná. Stredná kvadratická hodnota má význam najmä pri výpočte strednej hodnoty výkonu striedavého prúdu.

Nemienime sa tu podrobne zaoberať harmonickou analýzou alebo syntézou elektrických signálov, pre nás je dôležitá skutočnosť, že reálne periodické elektrické signály, napr. v elektronike, alebo prúdy a napätia v elektrickej energetike, sa dajú vyjadriť ako superpozícia jednoduchých harmonických priebehov  $\sim \sin n\omega t$  alebo  $\sim \cos n\omega t$ . Vlastnosti akéhokoľvek periodického priebehu sú teda dané vlastnosťami jednoduchých harmonických elektrických priebehov. Treba zdôrazniť, že Fourierova analýza, prípadne syntéza, nie je iba matematický formalizmus, ale je to aj fyzikálny proces, ktorý možno pomocou elektrických filtrov (spektrálnych analyzátorov), prípadne rôznych elektrických

syntezátorov aj prakticky realizovať. Naša analýza striedavých prúdov (a napätí) bude teda založená na analýze vlastností harmonických priebehov.<sup>1</sup>

## 9.2 HARMONICKÉ NAPÄTIA A PRÚDY

### 9.2.1 Harmonické napätia na prvkoch *RLC* obvodu

S harmonickými napätiami a prúdmi sme sa v našom pojednaní stretli už dvakrát. Boli to napätia a prúdy, ktoré vznikajú v cievke rotujúcej v statickom magnetickom poli v dôsledku pôsobenia zákona elektromagnetickej indukcie (odsek 7.4), a prúdy tečúce v *RLC* obvode v dôsledku periodického vybíjania a nabíjania kondenzátora pre kritický prípad nulového odporu obvodu  $R \rightarrow 0$  (odsek 7.9). Bude preto určite dôležité hlbšie analyzovať javy spojené so striedavými prúdmi.

Harmonické napätia a prúdy sa vyjadrujú časovými závislosťami

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t \pm \varphi_u) \quad (9.10a)$$

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t \pm \varphi_i) \quad (9.10b)$$

kde  $u$  a  $i$  sú okamžité hodnoty napätia a prúdu,  $U_0$  a  $I_0$  sú ich amplitúdy,  $\varphi_u$  a  $\varphi_i$  sú fázové posuny napätia a prúdu voči referenčným napäťovým alebo prúdovým priebehom s tou istou frekvenciou a s nulovým fázovým posunom. Ak je takýmto referenčným priebehom napríklad napätie

$$u_0(t) = U_0 \cos \omega t$$

potom napätie  $u$  fázovo predbieha napätie  $u_0$ , ak jeho fázový posun je  $+\varphi_u$  a fázovo zaostáva za  $u_0$ , ak jeho fázový posun je  $-\varphi_u$ . To isté možno povedať o prúde  $i$  a jeho fázovom vzťahu k  $u_0$ . K vyjadreniu harmonických priebehov možno rovnako využiť aj funkciu sínus, čím sa do vyjadrení (9.10) zavedie iba konštantný fázový posun  $\pm \pi/2$ , pretože napr.

$$\sin(\omega t + \varphi \pm \frac{\pi}{2}) = \pm \cos(\omega t + \varphi) \quad (9.11a)$$

a naopak

$$\cos(\omega t + \varphi \mp \frac{\pi}{2}) = \pm \sin(\omega t + \varphi) \quad (9.11b)$$

Striedavé harmonické prúdy tečú v obvodoch, ktoré pozostávajú z odporov  $R$ , kapacít  $C$ , indukčností  $L$  a tie môžu byť viazané vzájomnými indukčnosťami  $M$  do zložitých striedavých elektrických sietí. Na jednotlivých prvkoch siete vznikajú striedavé napätia

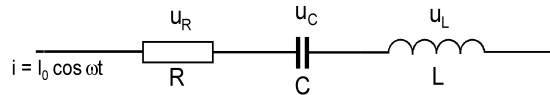
<sup>1</sup> V prípade neperiodických časových priebehov možno funkciu  $y(t)$  namiesto Fourierovým radom vyjadriť Fourierovým integrálom. Diskrétné amplitúdy Fourierovho rozvoja sa v ňom nahradia spojitou funkciou frekvencie  $J(\omega)$ , ktorá sa nazýva spektrálna hustota. Takýmto neperiodickými priebehmi sa nebudeme zaoberať.

s istými amplitúdami a fázovými vzťahmi k iným napätiam alebo prúdom siete. Ako jednoduchý príklad určíme napätia na prvkoch  $R$ ,  $L$  a  $C$ , ktoré sú zapojené sériovo v jednej vetve, ktorou tečie harmonický prúd

$$i = I_0 \cos \omega t \quad (9.12)$$

(pozri obr. 9.2). Na odpore  $R$  podľa Ohmovho zákona vznikne napätie

$$u_R = Ri = RI_0 \cos \omega t = U_{0R} \cos \omega t \quad (9.13)$$



Obr. 9.2

Vidíme, že harmonický prúd a napätie na odpore nie sú fázovo posunuté, inak povedané, napätie a prúd v odpore  $R$  sú vo fáze ( $\varphi_R = 0$ ) a amplitúda napätia  $U_{0R} = RI_0$ .

V úplne inom fázovom vzťahu sú prúdy a napätia na kondenzátore a cievke. Ak sa striedavým prúdom (9.12) nabíja kondenzátor  $C$  (pôvodne nenabitý), potom napätie na ňom je dané výrazom

$$u_C = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{I_0}{\omega C} \sin \omega t = U_{0C} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (9.14)$$

t. j. **napätie na kondenzátore zaostáva za prúdom vo fáze o  $\varphi_C = -\pi/2$**  a amplitúda napätia  $U_{0C} = I_0/\omega C$ . Vo výraze (9.14) bol využitý vzťah (9.11b). Veličina

$$X_C = \frac{U_{0C}}{I_0} = \frac{1}{\omega C} \quad [\Omega] \quad (9.15)$$

daná pomerom amplitúd napätia a prúdu, ktorá má rozmer odporu sa nazýva **kapacitná reaktancia**.

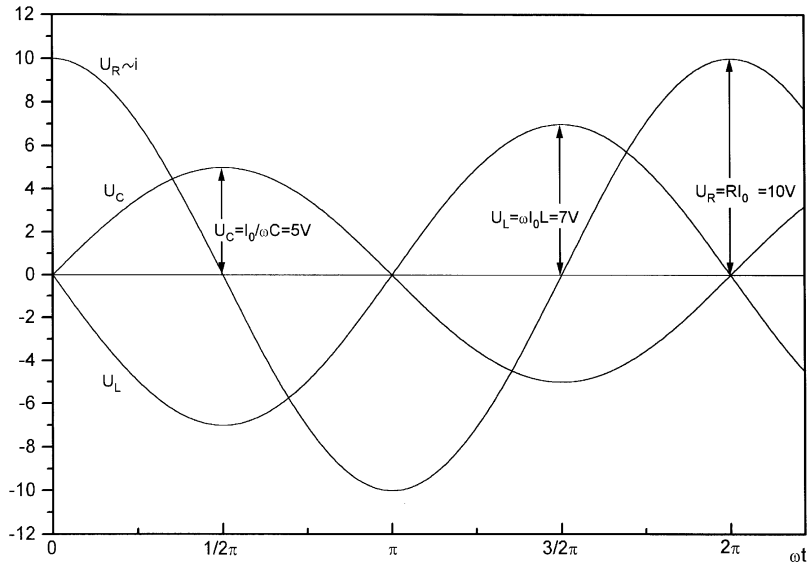
Nakoniec, ak prúd (9.12) tečie indukčnosťou  $L$ , samoindukciou na nej vznikne napätie

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\omega LI_0 \sin \omega t = U_{0L} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

teda **napätie na indukčnosti predbieha prúd vo fáze o  $\varphi_L = \pi/2$**  a amplitúda napätia  $U_L = \omega LI_0$ . Veličina

$$X_L = \frac{U_{0L}}{I_0} = \omega L \quad [\Omega] \quad (9.16)$$

sa nazýva **induktívna reaktancia** a má rozmer odporu. Na obr. 9.3 sú zobrazené časové priebehy všetkých napätí  $u_R$ ,  $u_C$  a  $u_L$  vo svojom vzájomnom fázovom vzťahu pre konkrétne numerické hodnoty  $R$ - $L$ - $C$  prvkov, frekvencie a amplitúdy prúdu.

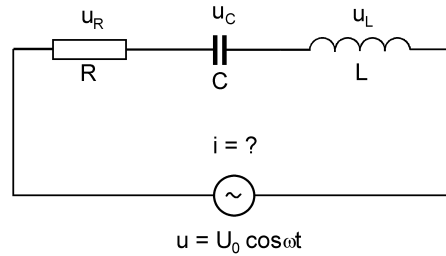


Obr. 9.3

### 9.2.2 Harmonický prúd v obvode RLC

Pozrime sa teraz na problém z inej strany. Na obr. 9.4 je jednoduchý sériový obvod RLC, ktorý je uzavretý zdrojom striedavého napätia

$$u = U_0 \cos \omega t \tag{9.17}$$



Obr. 9.4

Položme si otázku – aký prúd tečie týmto obvodom? Pre obvod musí platiť obvodová rovnica, podľa ktorej súčet všetkých napätí, teda napätí zdrojov  $u$ , indukovaných napätí na indukčnostiach  $L di/dt$ , odporových ohmických spádov  $Ri$  a napätí nabitých kondenzátorov  $Q/C$  v uzavretom obvode sa musí rovnať nule (samozrejme s ohľadom na znamienka). Musí teda platiť

$$u - L \frac{di}{dt} = Ri + \frac{Q}{C} \tag{9.18}$$

Po úprave rovnice a jej derivácii, s uvažovaním, že

$$\frac{dQ}{dt} = i$$

dostaneme diferenciálnu rovnicu pre prúd  $i$  v tvare

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -\omega U_0 \sin \omega t \quad (9.19)$$

Z matematického hľadiska je to obyčajná nehomogénna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientmi, a ako je známe, má riešenie pozostávajúce z dvoch častí – je to superpozícia všeobecného riešenia homogénnej rovnice a jedného partikulárneho riešenia nehomogénnej rovnice. Takáto strohá je reč matematiky. Fyzikálny pohľad na problém je oveľa zaujímavejší. Predovšetkým - homogénnu rovnicu sme už riešili v odseku 7.9 [pozri rovnicu (7.71)]. Riešením je nestacionárny prechodový prúd, ktorý s časom (a pomerne rýchle) vymizne. Potom zostane nenulová iba druhá, kvázistacionárna časť riešenia, ktorá je obyčajne predmetom záujmu. Fyzik, na rozdiel od matematika, vie charakter tohto riešenia posúdiť a vie navrhnúť aj jeho tvar bez toho, aby diferenciálnu rovnicu riešil. Možno očakávať, že riešenie, teda prúd, bude tiež harmonickou funkciou, napríklad tvaru

$$i = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (9.20)$$

Takto navrhnuté riešenie sa dosadí do rovnice (9.19) a z tej sa určia neznáma amplitúda prúdu  $I_0$  a fázový posun  $\varphi$  prúdu oproti napätiu. Po dosadení riešenia (9.20) do rovnice (9.19) dostaneme

$$-\omega^2 L I_0 \cos(\omega t - \varphi) - \omega R I_0 \sin(\omega t - \varphi) + \frac{I_0}{C} \cos(\omega t - \varphi) = -\omega U_0 \sin \omega t$$

Ďalší postup je nasledovný: kosínusové a sínusové funkcie rozdielového uhla  $\omega t - \varphi$  na ľavej strane rovnice sa vyjadria pomocou príslušných trigonometrických vzťahov. Rovnosť sa upraví na tvar

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t = 0$$

Rovnica bude platiť pre všetky  $t$  vtedy, ak

$$A = 0 \quad B = 0$$

Po vykonaní uvedenej procedúry dostaneme dve podmienky

$$A = \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \varphi - R \sin \varphi = 0$$

$$B = \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_0 \sin \varphi - R I_0 \cos \varphi - U_0 = 0$$

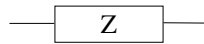
Riešením týchto rovníc dostaneme amplitúdu prúdu v obvode  $I_0$  a jeho fázový posun  $\varphi$  v tvare

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{Z} \quad \text{tg } \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (9.21)$$

Výrazy (9.21) sú odpoveďou na našu otázku o prúde v sériovom  $RLC$  obvode na obr. 9.4. Vidíme, že ako amplitúda prúdu, tak aj jeho fázový posun oproti napätiu sú funkciami frekvencie a vykazujú od frekvencie dost' zvláštnu závislosť. Prúd môže podľa hodnoty frekvencie napätie vo fáze predbiehať alebo za ním zaostávať. Pri istej frekvencii je amplitúda prúdu maximálna a súčasne je pri tejto frekvencii fázový posun nulový. Je to stav rezonancie v obvode, budeme sa mu však venovať v osobitnom odseku. Veličina

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad [\Omega] \quad (9.22)$$

sa nazýva **impedancia** (zdanlivý odpor) sériového  $RLC$  obvodu a je daná pomerom amplitúd napätia a prúdu v obvode. Pojem impedancie je kľúčovým pojmom teórie striedavých elektrických obvodov a sietí a má podobný, ale všeobecnejší význam ako pojem odporu v jednosmerných elektrických sieťach. Spolu s fázovým posunom  $\varphi$  úplne určuje elektrické vlastnosti danej vetvy obvodu. Neskôr bude jeho význam ešte rozšírený tak, že bude zahŕňať aj fázové vlastnosti obvodu. V elektrotechnických zapojeniach predstavuje impedancia dvojpol a zakresľuje sa symbolom



### 9.2.3 Harmonický prúd v obvodoch $RC$ a $RL$

Pozrime sa teraz na uvažovaný obvod v dvoch špeciálnych prípadoch:

a) Indukčnosť v obvode nie je, teda  $L = 0$ . Obvod tvorí sériová dvojica  $RC$ . V takom prípade výrazy (9.21) pre amplitúdu a fázový posun prejdú na tvar

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{Z} \quad \text{tg } \varphi_{RC} = -\frac{1}{\omega CR} \quad (9.23)$$

a impedancia obvodu je

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X_C^2} \quad [\Omega] \quad (9.24)$$



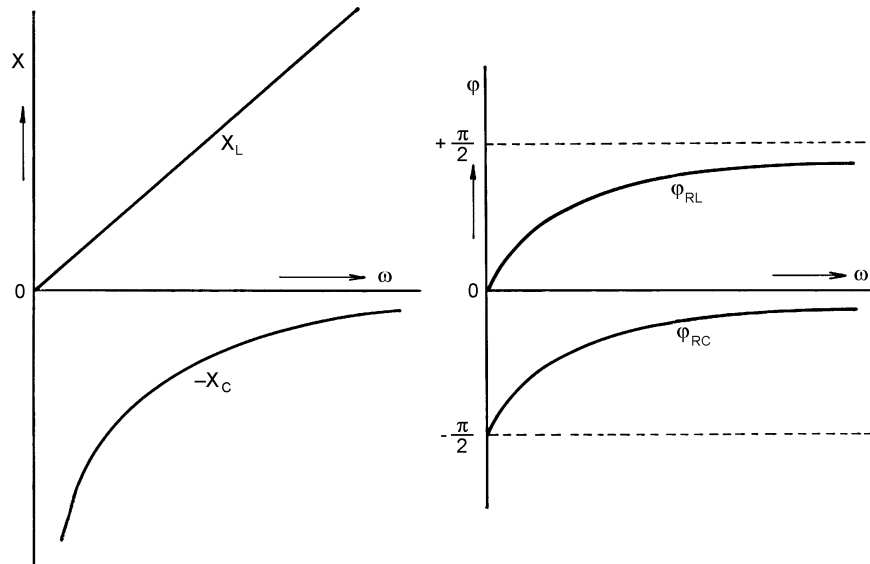
b) Kapacita v obvode nie je, teda  $C \rightarrow \infty$  a na mieste kondenzátora je skrat. Obvod tvorí sériová dvojica  $RL$  a na základe výrazov (9.21) amplitúda prúdu a fázový posun sú dané výrazmi

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{U_0}{Z} \quad \text{tg } \varphi_{RL} = \frac{\omega L}{R} \quad (9.25)$$

a impedancia

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad [\Omega] \quad (9.26)$$

Vidíme, že v prípade a), obvodu  $RC$ , prúd predbieha napätie [pozri tiež výraz (9.20)] vo fáze o uhol  $\varphi_{RC} = \arctg(-1/\omega RC) > -\pi/2$  v celom pásme možných frekvencií  $\omega$  od 0 až po  $\infty$ . V prípade b), obvodu  $RL$ , prúd naopak zaostáva za napätím vo fáze o uhol  $\varphi_{RL} = \arctg(\omega L/R) < \pi/2$  takisto v celom frekvenčnom pásme. Impedancia (teda aj pomer  $U_0/I_0$ ) v prípade a) klesá z nekonečnej hodnoty pri  $\omega = 0$  na hodnotu  $R$  pri teoreticky nekonečnej frekvencii. V prípade b) rastie z hodnoty  $R$  pri nulovej frekvencii na nekonečnú hodnotu pri nekonečnej frekvencii. Frekvenčné závislosti reaktancií  $X_L(\omega)$  a  $-X_C(\omega)$  a fázové posuvy  $\varphi_{RC}(\omega)$ ,  $\varphi_{RL}(\omega)$  pre obvody  $RC$  a  $RL$  sú graficky znázornené na obr. 9.5.



Obr. 9.5

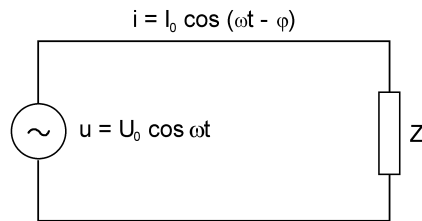
### 9.3 VÝKON STRIEDAVÉHO PRÚDU

Ak striedavý prúd tečie v obvode, ktorý pozostáva z prvkov  $R$ ,  $C$  a  $L$ , dochádza k zložitejšej výmene energie medzi obvodom a zdrojom, než v prípade stáleho prúdu a odporového spotrebiča. V striedavom obvode sa istá časť energie zdroja nevratne spotrebuje na teplo v odpore  $R$ . Prvky  $L$  a  $C$  naproti tomu pôsobia ako zásobníky energie, ktorá vo forme elektrického a magnetického poľa putuje do týchto zásobníkov a z nich naspäť do zdroja, pričom sa energia vymieňa aj medzi týmito zásobníkmi. Z toho vidieť, že nie všetka energia, ktorú by bol zdroj schopný do odporu  $R$  odovzdať, sa do neho aj dostane. Presvedčíme sa o tom jednoduchou úvahou. Predpokladajme, že zdroj s napätím

$$u = U_0 \cos \omega t$$

odáva striedavý prúd do obvodu s impedanciou  $Z$  na obr. 9.6. Prúd tečúci v obvode je daný výrazom (9.20). Amplitúda  $I_0$  a fázový posuv  $\varphi$  sú dané výrazmi (9.21). Obvodu sa bude odovzdávať elektrická energia  $W$  s okamžitým výkonom (pozri odsek 5.5)

$$p(t) = \frac{dW}{dt} = ui = U_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) \quad (9.27)$$



Obr. 9.6

Výraz s využitím trigonometrického vzťahu pre kosínus rozdielového uhla a vzťahu

$$\sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} \sin 2 \omega t$$

možno upraviť na tvar

$$\begin{aligned} p(t) &= U_0 I_0 [\cos^2 \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \omega t \sin \varphi] = \\ &= U_0 I_0 \cos \varphi \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} U_0 I_0 \sin \varphi \sin 2 \omega t = \\ &= p_{akt}(t) + p_{reakt}(t) \end{aligned} \quad (9.28)$$

Vidíme, že okamžitý výkon je periodická funkcia času s dvojnásobnou frekvenciou  $2\omega$  a pozostáva z dvoch častí:

### Z aktívneho (činného) výkonu

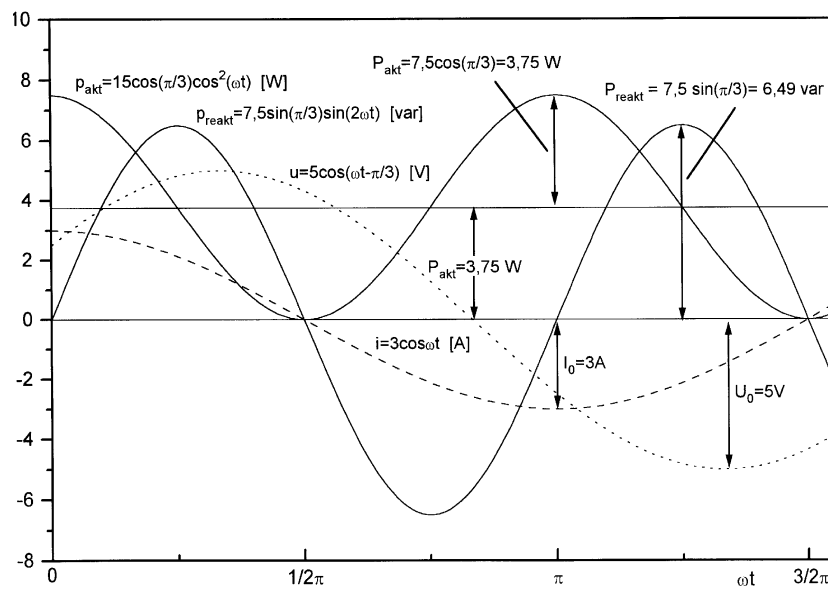
$$p_{akt}(t) = U_0 I_0 \cos \varphi \cos^2 \omega t \quad (9.29a)$$

### a z reaktívneho (jalového) výkonu

$$p_{reakt}(t) = \frac{1}{2} U_0 I_0 \sin \varphi \sin 2\omega t \quad (9.29b)$$

Časové priebehy týchto výkonov sú znázornené spolu s priebehmi napätia  $u$  a prúdu  $i$  na obr. 9.7. Časová stredná hodnota aktívneho okamžitého výkonu je nenulová, daná výrazom

$$P_{akt} = \frac{1}{T} \int_0^T p_{akt} dt = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi \quad [\text{W}] \quad (9.30)$$



Obr. 9.7

Hodnota stredného aktívneho výkonu sa dá tiež získať ako grafická stredná hodnota závislosti  $p_{akt}$  na obr. 9.7. Výpočet aktívneho výkonu súvisí s výpočtom odmocniny strednej kvadratickej (efektívnej) hodnoty funkcie  $\sim \cos\omega t$  alebo  $\sim \sin\omega t$  s výsledkom  $1/\sqrt{2}$  [pozri výraz (9.9)]. Na základe toho možno výkon (9.30) napísať tiež v tvare

$$P_{akt} = U_{ef} I_{ef} \cos \varphi \quad (9.31)$$

kde

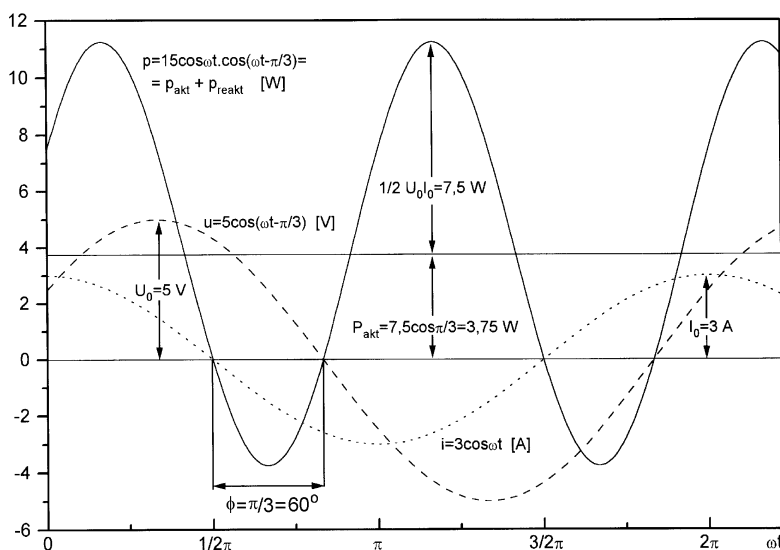
$$U_{ef} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

sú efektívne hodnoty napätia a prúdu. V energetickej spotrebiteľskej sieti efektívna hodnota napätia jednej fáze je  $U_{ef} = 220 \text{ V}$ , amplitúda tohto napätia je  $U_0 = \sqrt{2}U_{ef} \approx 311,1 \text{ V}$ .

Veličina

$$\cos \varphi = \frac{P_{akt}}{U_{ef} I_{ef}} \quad (9.32)$$

sa nazýva **výkonový faktor** alebo **účinník**. Môže nadobúdať hodnoty od 1 (pre  $\varphi = 0$ ) až po 0 (pre  $\varphi = \pi/2$ ) a je mu úmerný stredný aktívny výkon. Ak obvod pozostáva iba z aktívneho odporu, účinník sa rovná 1 (fázový posuv na odpore je nula,  $\cos 0 = 1$ ) a výkon pri daných  $U_{ef}$  a  $I_{ef}$  je maximálny. Ak naopak, obvod je reaktívny (výlučne kapacitný alebo induktívny), odovzdávaný výkon sa rovná nule, pretože  $\varphi = \pm\pi/2$  a  $\cos(\pm\pi/2) = 0$ .



Obr. 9.8

Druhá, reaktívna časť okamžitého výkonu (9.28)

$$p_{reakt}(t) = \frac{1}{2} U_0 I_0 \sin \varphi \sin 2\omega t \quad (9.33)$$

je striedavá veličina a má strednú hodnotu rovnú nule, čo vidieť aj z grafu na obr. 9.7. Jej amplitúda

$$P_{reakt} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \sin \varphi \quad [\text{var}]$$

sa udáva v reaktívnych voltampéroch (var) a môže nadobúdať hodnoty od 0 pre  $\varphi = 0$  po hodnotu  $\pm U_{ef} I_{ef}$ , ak  $\varphi = \pm\pi/2$ . Fyzikálne je to výkon, s ktorým energia osciluje bez akéhokoľvek úžitku medzi zdrojom a reaktívnymi prvkami obvodu. Tento

výkon zaujíma predovšetkým energetikov, ktorý sa ho snažia redukovať na najmenšiu možnú mieru.

Veličina

$$P_s = U_{ef} I_{ef} \quad [\text{VA}]$$

sa nazýva **zdanlivý výkon**, ktorý by zdroj dodal do výlučne odporovej záťaže pri rovnakom efektívnom napätí a prúde. Udáva sa vo voltampéroch (VA). Tento výkon sa obyčajne udáva na spotrebičoch pre obchodnú sieť, pretože tie sú dimenzované na istú hodnotu napätia a prúdu. Je zrejmé, že aktívny výkon je vždy menší, najvyšší rovný zdanlivému výkonu. Na obr. 9.8 je grafom znázornená časová závislosť celkového okamžitého výkonu  $p(t)$  podľa vzťahu (9.28) spolu s priebehom prúdu a napätia.

Ak uvážime, že impedancia  $Z$  sa dá vyjadriť podielom

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_{ef}}{I_{ef}}$$

potom stredný aktívny výkon (9.29) v impedancii  $Z$  sa dá vyjadriť nasledovnými užitočnými výrazmi

$$P_{akt} = Z I_{ef}^2 \cos \varphi = \frac{U_{ef}^2}{Z} \cos \varphi$$

Okrem toho z výrazov (9.21) a (9.22) plynie, že

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

takže aktívny výkon možno vyjadriť aj výrazmi

$$P_{akt} = R I_{ef}^2 = \frac{U_{ef}^2}{Z^2} R$$

## 9.4 SYMBOLICKO-KOMPLEXNÁ METÓDA ANALÝZY OBVODOV S HARMONICKÝMI STRIEDAVÝMI PRÚDMI<sup>1</sup>

Analýza obvodov striedavých prúdov s využitím trigonometrických funkcií je pri zložitých obvodoch veľmi nepraktická a ťažkopádna, pretože vedie k veľmi komplikovaným a neprehľadným výrazom. Tieto nedostatky odstraňuje elegantná symbolicko-komplexná metóda, ktorej prednosť je aj v tom, že všetky výpočty redukuje na algebraické operácie s komplexnými číslami.

---

<sup>1</sup> Pred čítaním tohto odseku čitateľovi odporúčam zopakovať si poznatky o komplexných číslach. Ich najdôležitejšie vlastnosti sú zhrnuté v tabuľke 16.

Symbolická-komplexná metóda spočíva na jednoduchých myšlienkach, ktoré možno sformulovať takto:

**Striedavý prúd**

$i = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{alebo} \quad i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$

*možno pre účely analýzy nahradit' komplexným číslom (obrazom)*

$i = I_0 \cos(\omega t + \varphi) + jI_0 \sin(\omega t + \varphi) = I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = (I_0 e^{j\varphi}) e^{j\omega t} = I_0 e^{j\omega t}$

*t. j. číslom, ktorého reálna časť je*

$I_0 \cos(\omega t + \varphi)$

*a imaginárna časť*

$I_0 \sin(\omega t + \varphi)$

*Naopak, ak komplexné číslo*

$i = I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = I_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} = I_0 e^{j\omega t} = (I_{0re} + jI_{0im}) e^{j\omega t}$

*predstavuje komplexný prúd, potom skutočný prúd je jeho reálnou*

*alebo imaginárnou časťou*

V ďalšom sa pokúsime zdôvodniť oprávnenie takéhoto postupu.

Čitateľ, ktorý pozná komplexné čísla a operácie s nimi, si určite všimol, že impedancia sériového *RLC* obvodu daná výrazom (9.22) a jej fázový uhol podľa (9.21) má charakter amplitúdy a fázy komplexného čísla. Takéto komplexné číslo možno napísať v tvare

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(X_L - X_C) \quad (9.34)$$

alebo

$$Z = |Z| e^{j\varphi} \quad (9.35)$$

kde skutočne

$$|Z| = Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (9.36)$$

je absolútna hodnota komplexného čísla, teda impedancia a

$$\varphi = \arctg \frac{\text{Im}\{Z\}}{\text{Re}\{Z\}} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (9.37)$$

je jeho fáza, teda fázový posuv.

## Tabuľka 16

### Najdôležitejšie vlastnosti komplexných čísel

Komplexným číslom nazývame výraz tvaru

$$z = a + jb = \operatorname{Re}\{z\} + j \operatorname{Im}\{z\}, \quad \times)$$

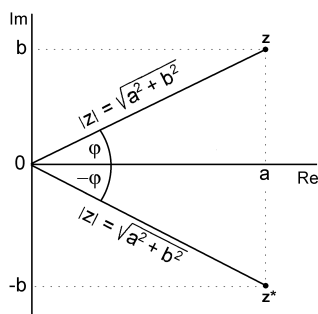
(**algebraický tvar komplexného čísla**), kde  $a$  a  $b$  sú reálne čísla (kladné alebo záporné) a  $j$  je imaginárna jednotka definovaná ako

$$j = \sqrt{-1}$$

$\operatorname{Re}(z) = a$  je reálna časť komplexného čísla a  $j\operatorname{Im}(z) = jb$  je jeho imaginárna časť. Graficky možno komplexné číslo znázorniť ako bod  $z$  v komplexnej (Gaussovej) rovine podľa obrázka. Pre imaginárnu jednotku platí

$j^2 = -1, \quad j^3 = -j, \quad j^4 = +1$  a ďalej  $j^{4n+k} = j^k$   
kde  $n$  a  $k$  sú celé kladné čísla. Tiež platí

$$\frac{1}{j} = -j$$



### Trigonometrický (polárny) tvar komplexného čísla

$z = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ , kde  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$   
je absolútna hodnota komplexného čísla a  $\varphi$  je jeho fáza alebo argument. Platí (pozri obrázok)

$$a = |z| \cos \varphi \qquad b = |z| \sin \varphi$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\operatorname{Re}\{z\}} = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

### Exponenciálny tvar komplexného čísla

$$z = |z|e^{j\varphi}$$

kde  $e$  je základ prirodzených logaritmov a

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

je Eulerov vzťah, z ktorého plynie

$$e^{j0} = 1 \qquad e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j \qquad e^{\pm j\pi} = -1 \qquad e^{\pm j\frac{3\pi}{2}} = \mp j \qquad e^{\pm j2\pi} = 1$$

a tiež  $e^{jm\varphi} = (\cos \varphi + j \sin \varphi)^m = \cos m\varphi + j \sin m\varphi$

(Moivreov vzorec). Dve komplexné čísla sú komplexne združené, ak sa ich reálne časti rovnajú a imaginárne časti sa líšia znamienkom. K číslu  $z$  je komplexne združené číslo  $z^*$  dané výrazom

$$z^* = a - jb = |z|(\cos \varphi - j \sin \varphi) = |z|e^{-j\varphi}$$

a v obrázku je graficky znázornené bodom  $z^*$ . Platí

$$z \cdot z^* = |z|^2 \qquad \text{a} \qquad \frac{z^*}{|z|} = \frac{|z|}{z}$$

Derivácia a integrál komplexnej funkcie času  $I(t) = I_0 e^{j\omega t}$

$$\frac{dI}{dt} = j\omega I \qquad \int I dt = \frac{1}{j\omega} I$$

$\times$ ) Komplexné čísla sú písané tučnými písmenami podobne ako vektory.

Predpokladajme teraz, že pre nejakú vetvu obvodu sú zadané komplexné napätie a prúd v tvare

$$\mathbf{u} = U_0 e^{j\omega t} \quad \text{a} \quad \mathbf{i} = I_0 e^{j\omega t} \quad (9.38)$$

kde

$$U_0 = |U_0| e^{j\varphi_u} \quad \text{a} \quad I_0 = |I_0| e^{j\varphi_i} \quad (9.39)$$

sú ich komplexné amplitúdy a  $\varphi_u$ ,  $\varphi_i$  sú fázové posuvy od nejakého referenčného priebehu. Absolútne hodnoty komplexných amplitúd sú reálne amplitúdy napätia a prúdu, teda

$$|U_0| = U_0 \quad \text{a} \quad |I_0| = I_0$$

Vydeľme teraz komplexné napätie komplexným prúdom. Dostaneme podiel

$$\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{i}} = \frac{U_0 e^{j\omega t}}{I_0 e^{j\omega t}} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_0 e^{j\varphi_u}}{I_0 e^{j\varphi_i}} = Z e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \mathbf{Z} \quad (9.40)$$

ktorý je komplexným číslom  $\mathbf{Z}$  a jeho absolútna hodnota

$$Z = \frac{U_0}{I_0}$$

udáva práve impedanciu tej časti obvodu, v ktorej pri napätí  $u$  tečie prúd  $i$ . Fáza  $\varphi_u - \varphi_i$  komplexného čísla  $\mathbf{Z}$  je práve fázový posuv prúdu oproti napätiu z výrazov (9.38) a (9.39). **Komplexná veličina  $\mathbf{Z}$  daná všeobecným výrazom (9.40) sa nazýva komplexná impedancia, ktorá úplne charakterizuje vybranú vetvu obvodu.**

Túto vlastnosť komplexných výrazov (9.38) až (9.40) si na konci 19. storočia – v roku 1893 – všimol anglický elektrotechnický inžinier Oliver Heaviside (1850 – 1925), ktorý sa považuje za pôvodcu symbolicko-komplexnej metódy.

Na ilustráciu vypočítame teraz komplexnú impedanciu (9.34)  $RLC$  obvodu na *obr. 9.4*. Rovnicu (9.18) prepíšeme do tvaru

$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt + L \frac{di}{dt} = u$$

Reálne napätie a prúd nahradíme komplexnými výrazmi podľa (9.38), vykonáme integráciu a deriváciu (pozri tabuľku 16) a dostaneme algebraickú rovnicu

$$RI_0 e^{j\omega t} - j \frac{1}{\omega C} I_0 e^{j\omega t} + j \omega L I_0 e^{j\omega t} = U_0 e^{j\omega t}$$

po úprave

$$I_0 \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] = U_0$$

alebo

$$\frac{U_0}{I_0} = \mathbf{Z} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$



## 9.5 KOMPLEXNÝ VÝKON

Pri práci s komplexnými obrazmi napätí a prúdov je výhodné zaviesť komplexnú veličinu, ktorá sa nazýva komplexný výkon. Samotná veličina nemá fyzikálny význam, lebo všetky formy elektrického výkonu (aktívny, reaktívny, zdanlivý) sú matematicky aj fyzikálne reálne veličiny. Komplexný výkon má tú výhodu, že je vyjadrený prostredníctvom komplexných amplitúd prúdu a napätia, pričom jeho reálna časť priamo udáva stredný aktívny výkon.

Nech teda na nejakej impedancii napätie a prúd majú obrazy

$$\mathbf{u} = U_0 e^{j\omega t} = (U_{re} + jU_{im}) e^{j\omega t}$$

$$\mathbf{i} = I_0 e^{j\omega t} = (I_{re} + jI_{im}) e^{j\omega t}$$

kde

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

Na impedancii je reálne napätie

$$u = \operatorname{Re}\{\mathbf{u}\} = U_{re} \cos \omega t - U_{im} \sin \omega t$$

a tečie ňou reálny prúd

$$i = \operatorname{Re}\{\mathbf{i}\} = I_{re} \cos \omega t - I_{im} \sin \omega t$$

Okamžitý výkon v impedancii je daný súčinom posledných dvoch výrazov, teda

$$p = ui = \operatorname{Re}\{\mathbf{u}\} \operatorname{Re}\{\mathbf{i}\} = U_{re} I_{re} \cos^2 \omega t + U_{im} I_{im} \sin^2 \omega t - (U_{re} I_{im} + U_{im} I_{re}) \cos \omega t \sin \omega t$$

Stredovaním okamžitého výkonu za periódu dostaneme stredný aktívny výkon v tvare

$$P_{str} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{2} (U_{re} I_{re} + U_{im} I_{im})$$

pretože stredná hodnota funkcií  $\cos^2 \omega t$  a  $\sin^2 \omega t$  sa rovná 1/2 a stredná hodnota funkcie  $\cos \omega t \sin \omega t$  je nula. Možno sa presvedčiť, že výsledok integrácie je reálnou časťou komplexného výrazu

$$\mathbf{P}_{kompl} = \frac{1}{2} \mathbf{U}_0 \mathbf{I}_0^* = \mathbf{U}_{ef} \mathbf{I}_{ef}^* \quad (9.41)$$

alebo jeho komplexne združeného výrazu

$$\mathbf{P}_{kompl}^* = \frac{1}{2} \mathbf{U}_0^* \mathbf{I}_0 = \mathbf{U}_{ef}^* \mathbf{I}_{ef} \quad (9.42)$$

Stredný výkon teda udáva reálna časť komplexného výkonu daného výrazmi (9.41) alebo (9.42)

$$P_{str} = \operatorname{Re}\{P_{kompl}\} = \operatorname{Re}\{P_{kompl}^*\} \quad (9.43)$$

Z uvedeného postupu a výsledku vidíme, že ak sú prúd a napätie dané ich obrazmi, netreba pri výpočte výkonu počítať najprv reálne veličiny a z nich výkon, ale možno použiť priamo výrazy (9.41) až (9.43).

Ak si uvedomíme, že komplexná impedancia je

$$Z = \frac{U_0}{I_0}$$

tak výrazy pre komplexný výkon môžeme napísať niekoľkými ďalšími spôsobmi, a to

$$P_{kompl} = \frac{1}{2}|I_0|^2 Z = \frac{1}{2} \frac{|U_0|^2}{Z} = |I_{ef}|^2 Z = \frac{|U_{ef}|^2}{Z} \quad (9.44)$$

Na ilustráciu výpočtu výkonu rôznymi spôsobmi vypočítame nasledovný príklad:

*V nejakej impedancii tečie striedavý prúd*

$$i = 0,2 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \quad [\text{A}]$$

*a napätie na nej je*

$$u = 10 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{8}\right) \quad [\text{V}]$$

- Vypočítajte okamžitý výkon v impedancii v čase  $t = 0$ ,
- vypočítajte stredný výkon v impedancii,
- vytvorte komplexné amplitúdy napätia a prúdu<sup>1</sup>, vypočítajte komplexný výkon a stredný výkon.

Riešenie:

a) Okamžitý výkon v čase  $t = 0$  je

$$p = (ui)_{t=0} = \left(10 \cos \frac{\pi}{8}\right) \left(-0,2 \sin \frac{\pi}{6}\right) = -0,924 \text{ W}$$

a vidíme, že práve vtedy *impedancia odovzdáva zdroju energiu* s výkonom 0,924 W.

b) Stredný výkon spotrebovaný v impedancii (v záťaži)

$$P_{str} = \frac{1}{T} \int_0^T uidt = 2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{8}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) dt = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{6}\right) \text{ W} = 0,61 \text{ W}$$

<sup>1</sup> V elektrotechnickej literatúre sa komplexné amplitúdy napätia a prúdu nazývajú aj fázory a zobrazujú sa šípkami podobne ako vektory.

c) Komplexné amplitúdy napätia a prúdu (fázory) sú

$$U_0 = 10 e^{j\frac{\pi}{8}} \text{ V} \qquad I_0 = 0,2 e^{-j\frac{\pi}{6}} \text{ A}$$

a komplexne združený prúd

$$I_0^* = 0,2 e^{j\frac{\pi}{6}} \text{ A}$$

Komplexný výkon

$$P_{\text{komp}} = \frac{1}{2} U_0 I_0^* = e^{j\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{6}\right)} \text{ W}$$

z čoho stredný výkon

$$P_{\text{str}} = \text{Re}\{ P_{\text{komp}} \} = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{6}\right) \text{ W} = 0,61 \text{ W}$$

### 9.5.1 Objemové harmonické prúdy v nedokonalých dielektrikách. Stratový uhol dielektrika. Objemová hustota výkonu

Ak sa v nedokonalom dielektriku (alebo v nedokonalom vodiči) s vodivosťou  $\sigma$  a permitivitou  $\varepsilon$  vytvorí harmonické elektrické pole s intenzitou

$$E = E_0 \cos \omega t$$

bude v ňom pod účinkom tohto poľa tiecť harmonický elektrický prúd, ktorého hustota pozostáva z dvoch častí: z hustoty ohmického prúdu  $\sigma E$  a z hustoty posuvného prúdu  $\partial D / \partial t$ , kde  $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$  je elektrická indukcia (pozri odseky 6.3 a 8.2.3). Celková prúdová hustota je daná súčtom týchto hustôt. Keďže hustota vodivého prúdu je úmerná  $\cos \omega t$  a hustota posuvného prúdu je úmerná  $\sin \omega t$ , sú tieto hustoty posunuté vo fáze o  $\pi/2$ , a preto sa na vyjadrenie ich súčtu výnimočne dobre hodia komplexné veličiny. Nech teda obrazom intenzity elektrického poľa je komplexná veličina

$$E = E_0 e^{j\omega t} \tag{9.45}$$

Ak symbolom  $J_v$  označíme amplitúdu prúdovej hustoty vodivého prúdu, potom možno napísať

$$J_v e^{j\omega t} = \sigma E = \sigma E_0 e^{j\omega t}$$

a podobne, ak  $J_p$  je komplexná amplitúda prúdovej hustoty posuvného prúdu, potom

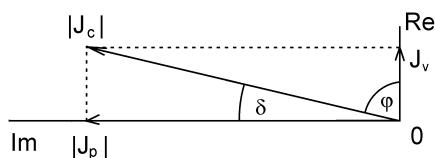
$$J_p e^{j\omega t} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = j \omega \varepsilon E = j \omega \varepsilon E_0 e^{j\omega t}$$

Obidve hustoty sú fázovo posunuté o  $\pi/2$  ( $J_p$  predbieha  $J_v$ ) podľa obr. 9.9 a ich absolútne veľkosti sú

$$J_v = \sigma E_0 \quad \text{a} \quad J_p = \omega \epsilon E_0$$

Komplexná amplitúda celkovej hustoty prúdu  $J_c$  v dielektriku (ktorý napr. vytvára magnetické pole) je daná výrazom

$$J_c = J_v + J_p = \sigma E_0 + j \omega \epsilon E_0 = (\sigma + j \omega \epsilon) E_0 \quad [\text{A.m}^{-2}] \quad (9.46)$$



Obr. 9.9

Komplexný výraz v zátvorke má charakter komplexnej konduktivity materiálu pri frekvencii  $\omega$

$$y = \sigma + j \omega \epsilon \quad (9.47)$$

Je to jedna z dôležitých elektrických charakteristík materiálu. Pre dobre vodivé materiály pri nepríliš vysokých frekvenciách je reálna časť podstatne väčšia ako imaginárna, teda

$$\sigma \gg \omega \epsilon$$

V takých materiáloch (patrí k nim väčšina kovov) je posuvný prúd zanedbateľný. Naopak, v dobrých dielektrikách je konduktivita  $\sigma$  nízka oproti "vodivosti posuvného prúdu"  $\omega \epsilon$ , teda

$$\sigma \ll \omega \epsilon$$

Vodivý prúd je malý, a tým sú malé aj ohmické straty. Sú to vhodné materiály na izolačné účely a ako dielektriká v kondenzátoroch.

Na charakteristiku stratových vlastností látok sa zavádza uhol  $\delta = \pi/2 - \varphi$ , kde  $\varphi$  je fáza komplexného čísla (9.47). Uhol  $\delta$  sa nazýva **stratový uhol dielektrika** (pozri tiež odsek 11.2). Tangens tohto uhla je daný pomerom veľkosti vodivého a posuvného prúdu alebo reálnej konduktivity  $\sigma$  a "konduktivity" posuvného prúdu  $\omega \epsilon$ , teda

$$\text{tg } \delta = \frac{J_v}{|J_p|} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \quad (9.48)$$

(pozri obr. 9.9). Dobré vodiče majú  $\text{tg } \delta$  veľmi veľký, dobré dielektriká ho majú naopak veľmi malý. Pre posúdenie veľkosti  $\text{tg } \delta$  určíme jeho veľkosť pre meď ako vynikajúci vodič a tavený kremeň ako vynikajúci izolant (dielektrikum). Meď má konduktivitu  $\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$  a relatívnu permitivitu blízku 1, takže

$$\text{tg } \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \approx \frac{6,5 \cdot 10^{19}}{\omega}$$

Tento výraz je pre všetky do úvahy prichádzajúce frekvencie striedavých prúdov veľmi veľký. Tavený kremeň má konduktivitu  $\sigma < 10^{-17}$  S/m a relatívnu permitivitu  $\epsilon_r \approx 4$ . Tangens  $\delta$  je teda

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \approx \frac{2,8 \cdot 10^{-7}}{\omega}$$

a je naopak, pre všetky frekvencie určite oveľa menší ako 1, teda kremeň je materiál, ktorý prakticky v celom pásme frekvencií vykazuje iba vodivosť posuvného prúdu. Skutočné straty dielektrík sú však vždy väčšie ako teoretické, pretože vodivosť je ovplyvnená mnohými ďalšími faktormi. Tangens stratového uhla dielektrík je zriedkakedy menší ako cca  $10^{-4}$ . V tabuľke 17 sú uvedené niektoré materiály, ich permitivity a  $\operatorname{tg} \delta$  pre vybrané frekvencie pri teplote blízkej izbovej. Straty dielektrík sa merajú špeciálnym (Scheringovým) mostom, v ktorom jednu z vetiev tvorí kondenzátor naplnený skúmaným stratovým dielektrikom (pozri úlohu 248).

Tabuľka 17<sup>1</sup>

Látka	$\epsilon_r$	$10^4 \cdot \operatorname{tg} \delta$	Frekvencia [Hz]
Voda	78,2	400	$10^6$
Etylalkohol	24,5	900	$10^6$
Jantár	2,65	56	$10^6$
Parafín	2,25	2	$10^6$
Kremeň (tavený)	3,8	1	$10^{10}$
Sľuda	7	2	$10^{10}$
Polyetylén	2,26	2	$10^6$
Polystyrén	2,56	0,7	$10^6$
Teflon*	2,02	3,7	$10^{10}$
PMMA*	2,6	140	$10^{10}$
PVC*	2,75	120	$10^{10}$
Ebonit*	4,0	250	$10^{10}$
BaTiO <sub>3</sub>	2 820	40	$10^6$

Prúd, ktorý tečie vodivým prostredím, toto prostredie ohrieva, teda do neho dodáva energiu s istým výkonom. Stredná komplexná objemová hustota výkonu je daná jednou polovicou súčinu amplitúdy intenzity  $E_0$  [výraz (9.45)] a komplexnej amplitúdy celkovej prúdovej hustoty  $J_c$  [výraz (9.46)], teda

$$p_{\text{kompl}} = \frac{E_0 J_c}{2} = E_{ef} J_{ef} \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-3}] \quad (9.49a)$$

alebo komplexná veličina

<sup>1</sup> Dáta použité v tabuľke boli prevzaté z knihy Hippel, A. R. von: Dielectric Materials and Applications, Cambridge, Mass. 1954. Dáta označené hviezdíčkou pochádzajú z autorových meraní (Tirpák, A. – nepublikované, Katedra rádiofyziky MFF UK Bratislava).

$$\mathbf{p}_{kopl}^* = \frac{E_0 \mathbf{J}_c^*}{2} = E_{ef} \mathbf{J}_{ef} \quad (9.49b)$$

Predpokladáme pritom, že materiál je izotropný, že vektory prúdovej hustoty a intenzity elektrického poľa sú kolineárne, pretože v opačnom prípade by súčiny boli skalárne. Ak vezmeme do úvahy rovnicu (9.46), t.j. že

$$\mathbf{J}_c = \mathbf{y} E_0 = (\sigma + j\omega\epsilon) E_0$$

potom výrazy (9.49) možno prepísať tvormi

$$\mathbf{p}_{kopl} = \frac{E_0^2 \mathbf{y}}{2} = E_{ef}^2 \mathbf{y} = \frac{\mathbf{J}_c^2}{2\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{J}_{ef}^2}{\mathbf{y}} \quad (9.50a)$$

$$\mathbf{p}_{kopl}^* = \frac{E_0^2 \mathbf{y}^*}{2} = E_{ef}^2 \mathbf{y}^* = \frac{\mathbf{J}_c^{*2}}{2\mathbf{y}^*} = \frac{\mathbf{J}_{ef}^{*2}}{\mathbf{y}^*} \quad (9.50b)$$

Alebo po dosadení  $\mathbf{y} = \sigma + j\omega\epsilon$

$$\mathbf{p}_{kopl} = \frac{E_0^2}{2} (\sigma + j\omega\epsilon) \quad \mathbf{p}_{kopl}^* = \frac{E_0^2}{2} (\sigma - j\omega\epsilon)$$

Reálna objemová hustota výkonu je daná reálnymi časťami posledných dvoch výrazov, teda

$$p = \frac{E_0^2 \sigma}{2} = E_{ef}^2 \sigma \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-3}] \quad (9.51)$$

Ak je posuvný prúd zanedbateľný, t. j. materiál je dobrý vodič a  $\omega\epsilon \ll \sigma$ , potom  $\mathbf{y} \approx \sigma$ ,  $\mathbf{J}_c \approx J_v \approx \sigma E_0$ , a objemová hustota výkonu je reálna, daná tiež výrazom (9.51).

## 9.6 STRIEDAVÉ ELEKTRICKÉ SIETE. POJEM ADMITANCIE A SUSCEPTANCIE

Z prvkov  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $M$  a zdrojov harmonických alebo periodických napätí a prúdov možno pre účely elektronickej a elektrotechnickej praxe zostavovať elektrické siete, ktoré majú podobné topologické vlastnosti ako jednosmerné siete zostavené z odporov a jednosmerných zdrojov EMN. Analýza jednosmerných a analýza striedavých elektrických sietí majú mnoho spoločných znakov. Pre účely analýzy možno uvedené prvky formálne spájať do dvojpólov (vetiev), ktorých obrazmi sú ich komplexné impedancie  $\mathbf{Z}$ . V rámci dvojpólu môžu byť prvky zapojené sériovo, paralelne alebo sériovo-paralelne, prípadne aj zložitejšie (mostíky). Impedancia  $\mathbf{Z}$  v striedavej sieti zodpovedá odporu  $R$  v jednosmernej. Ako už bolo skôr zavedené, komplexná impedancia  $\mathbf{Z}$  udáva pomer

komplexných amplitúd napätia a prúdu a plne opisuje vlastnosti vetvy, ktorú reprezentuje. Vo všeobecnosti pozostáva z dvoch častí

$$\mathbf{Z} = R \pm jX \quad (9.52)$$

pričom prvá, reálna časť, je **odpor (rezistancia)**  $R$ , ktorý je v lineárnej teórii vždy kladný. Druhá, imaginárna časť, sa nazýva **reaktancia**  $\pm jX$ . Ak je kladná ( $+jX$ ), vtedy fáza impedancie je kladná, t. j.

$$\mathbf{Z} = \frac{U_0}{I_0} = \mathbf{Z}e^{j\varphi} \quad (9.53)$$

čo znamená, že *napätie predbieha prúd* (alebo *prúd zaostáva za napätím*) vo fáze o uhol  $\varphi$  na danej impedancii. Tá musí pozostávať z odporu a zo sériovej induktívnej reaktancie. Môže ňou byť napríklad cievka s indukčnosťou  $L$  a jej imaginárnou induktívnou reaktanciou  $X_L = j\omega L = jX_L$ , ale aj napríklad sériová kombinácia cievky a kondenzátora s kapacitou  $C$  a celkovou induktívnou reaktanciou sériového spojenia

$$X_{ind} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = j(X_L - X_C)$$

ak  $X_C = 1/\omega C < X_L$ .

V prípade, ak je reaktancia záporná ( $-jX$ ), je fáza impedancie záporná, t. j.

$$\mathbf{Z} = \frac{U_0}{I_0} = \mathbf{Z}e^{-j\varphi} \quad (9.54)$$

a *napätie na impedancii zaostáva za prúdom* (alebo *prúd predbieha napätie*) vo fáze o uhol  $\varphi$ . Obvod pozostáva z odporu a zo sériovej kapacitnej reaktancie, napríklad sériového kondenzátora s kapacitou  $C$  a jeho reaktanciou  $X_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C$ . Môže to však byť aj spomínaná sériová kombinácia  $L$ - $C$  s reaktanciou

$$X_{kap} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = -j(X_C - X_L)$$

ak  $X_C > X_L$ .

Impedancie možno spájať podobne ako rezistory. Pri sériovom spojení  $n$  impedancií  $Z_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) je výsledná impedancia  $Z$  daná súčtom všetkých impedancií, teda

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \dots + \mathbf{Z}_n \quad (9.55)$$

Pri paralelnom spájaní impedancií sa sčítavajú ich prevrátané hodnoty. Prevrátenou hodnotou impedancie  $Z$  je komplexná veličina

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{I_0}{U_0} \quad [\text{S}] \quad (9.56)$$

ktorá sa nazýva **admitancia**. Paralelné spojenie  $n$  impedancií (admitancií) predstavuje výslednú admitanciu

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \quad (9.57)$$

Podobne ako impedancia, aj admitancia pozostáva z dvoch častí, a možno ju vyjadriť ako súčet

$$Y = G \mp jB \quad (9.58)$$

kde  $G$  je reálna **vodivosť** alebo **konduktancia** a  $\mp jB$  je imaginárna **susceptancia**. Susceptancia so záporným znamienkom má induktívny charakter a s kladným znamienkom má kapacitný charakter.<sup>1</sup> Reálna vodivosť a imaginárna susceptancia sa chápu zapojené paralelne. Kondenzátor s kapacitou  $C$  má kapacitnú susceptanciu  $B_C = j\omega C = jB_C$ , cievka s indukčnosťou  $L$  má induktívnu susceptanciu  $B_L = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L} = -jB_L$ . Vo všeobecnosti medzi  $Z$  a  $Y$  platí vzťah

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R \pm jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} \mp j \frac{X}{R^2 + X^2} = G \mp jB = Y \quad (9.59)$$

z čoho

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2} \quad (9.60a)$$

a podobne

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2} \quad (9.60b)$$

### 9.6.1 Kirchhoffove zákony pre elektrické siete s harmonickými prúdmi

Analýza striedavých elektrických sietí sa zakladá na použití Ohmovho zákona v symbolickom tvare

$$U = ZI \quad (9.61)$$

a Kirchhoffových zákonov pre komplexné amplitúdy prúdov a napätí. Ich matematické vyjadrenia pre uzly v sieti a slučky sú dané výrazmi

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (9.62)$$

<sup>1</sup> Čitateľa chcem upozorniť, že v obvodovej elektronike sa pojem "induktívny" alebo "kapacitný" charakter reaktancie, či susceptancie nemusí nutne spájať s cievkami a kondenzátormi, ktoré akumulujú magnetickú resp. elektrickú energiu a súčasne posúvajú fázu medzi napätím a prúdom. V elektronike možno realizovať *syntetické indukčnosti*, ktoré posúvajú fázu podobne ako indukčnosť, ale fyzikálne sa v nich nehromadí energia vo forme magnetického poľa. V elektronických zapojeniach sa tak možno vyhnúť cievkam ako technologicky nepríjemným súčiastkam.



## Tabuľka 18

### Terminológia

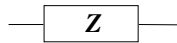
Časť obvodu (prvok alebo vetva zložená z prvkov) medzi dvoma uzlami je plne charakterizovaná komplexnou impedanciou

$$Z = \frac{U}{I} = R \pm jX \quad [\Omega]$$

čiže

$$\text{impedancia } Z = \begin{matrix} \text{odpor} \\ \text{(rezistancia)} \end{matrix} R + \begin{matrix} \text{induktívna reaktancia } X_L \\ \text{kapacitná reaktancia } X_C \end{matrix} j$$

schematická značka pre impedanciu:



Recipročná hodnota komplexnej impedancie sa nazýva komplexná admitancia  $Y$  a platí

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{Z^*}{|Z|^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} \mp j \frac{X}{R^2 + X^2} = G \mp jB$$

teda

$$Y = G \mp jB \quad [S]$$

alebo

$$\text{admitancia } Y = \begin{matrix} \text{vodivosť} \\ \text{(konduktancia)} \end{matrix} G - \begin{matrix} \text{induktívna susceptancia } B_L \\ \text{kapacitná susceptancia } B_C \end{matrix} j$$

Schematická značka pre admitanciu je rovnaká ako pre impedanciu

pre  $n$  prúdov v uzle a

$$\sum_k U_k = \sum_j I_j Z_j \quad (9.63)$$

pre komplexné amplitúdy napätí  $U_k$  zdrojov v slučke a zodpovedajúce amplitúdy prúdov  $I_j$  a impedancie  $Z_j$  v jednotlivých vetvách slučky.

Spôsob použitia Kirchhoffových zákonov na striedavé siete je formálne úplne rovnaký ako v prípade jednosmerných sietí (pozri kapitolu 5.7). Výnimku tvoria siete so vzájomnými indukčnosťami, kde treba použiť zvláštny prístup, ktorý bude opísaný ďalej. Rovnako možno použiť metódy obvodových prúdov a uzlových potenciálov. Treba však upozorniť na dve dôležité odlišnosti striedavých sietí:

1. Veličiny, ktoré vystupujú v rovniciach, sú komplexné čísla. Podľa pravidla, že dve komplexné čísla sa sebe rovnajú vtedy a len vtedy, ak sa rovnajú zvlášť reálne a zvlášť imaginárne časti, plynie, že každá komplexná rovnica predstavuje v skutočnosti dve rovnice, z ktorých sa vypočíta reálna i imaginárna časť veličiny alebo jej amplitúda a fáza.

2. Pri analýze jednosmerných sietí sa na začiatku zadávajú smery prúdov. Ak je numerický výsledok riešenia kladný, prúd má zvolený smer, ak je výsledok záporný, prúd má opačný smer. V striedavých obvodoch sa smer prúdu a pôsobiaceho napätia periodicky mení, a preto ľubovoľná ich smeru súvisí s výberom ich fázy. Zmena vybraného okamžitého smeru prúdu na opačný mení fázu o  $\pm\pi$ , čo zodpovedá zmene znamienka fázy komplexného čísla.<sup>1</sup>

V súvislosti s analýzou striedavých elektrických sietí odporúčam čitateľovi riešiť úlohy 245 až 253 týkajúce sa niektorých striedavých mostíkov a iných zariadení, ktoré možno považovať za jednoduché elektrické siete. V tabuľke 18 je zhrnutá terminológia používaná v teórii striedavých elektrických sietí.

## 9.7 VYNÚTENÉ KMITY V *RLC* OBVODOCH. SÉRIOVÁ A PARALELNÁ REZONANCIA

### 9.7.1 Sériový rezonančný obvod

Ak sa k sériovému spojeniu prvkov  $R$ ,  $L$ ,  $C$  pripojí zdroj harmonického napätia, pri istej frekvencii vznikne v obvode zvláštny napäťový jav, ktorý sa nazýva napäťová alebo sériová rezonancia. Slovo "rezonancia" je latinského pôvodu a znamená "ozvuk" alebo "ozvena". Vo fyzike je ním vo všeobecnosti pomenovaný súbor javov (mechanických, akustických, elektrických, kvantovomechanických a i.), ktoré spočívajú v periodickej výmene kinetickej a potenciálnej energie v nejakom systéme za účinku periodickej sily s istou, pre systém charakteristickou, rezonančnou frekvenciou  $\omega_0$ . Pri tejto frekvencii je výmena energie obzvlášť intenzívna, najmä vo "vysokokvalitných" systémoch. Na druhej strane, systém schopný rezonancie môže vykonávať energetické kmity (tlmené alebo v ideálnom prípade netlmené) aj bez účinku vonkajšej sily so svojou charakteristickou frekvenciou (ako príklad môže slúžiť kyvadlo, závažie na pružine a i.). Takéto vlastné elektrické kmity v *RLC* obvode sme skúmali v odseku 7.9.

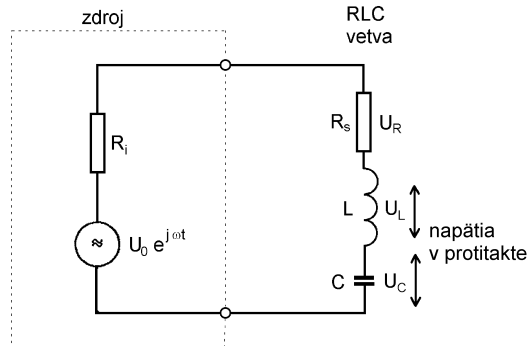
Na obr. 9.10 je znázornený sériový *RLC* obvod so zdrojom striedavého napätia  $u = U_0 \cos \omega t$  alebo s jeho obrazom  $u = U_0 e^{j\omega t}$ . Voľba reálnej amplitúdy napätia znamená, že fázy všetkých veličín budú vzťahované na nulový fázový posuv napätia ( $\varphi_u = 0$ ). Napäťovým zdrojom je najčastejšie laditeľný generátor harmonického napäťového signálu. *RLC* obvod sme už skúmali v odsekoch 9.2 a 9.4, kde sme vypočítali amplitúdu prúdu a jeho fázový posuv oproti napätiu [výrazy (9.21)]. Prv než pristúpime k analýze frekvenčných vlastností obvodu, treba urobiť poznámku k odporu obvodu a k vlastnostiam zdroja. Odpor  $R_s$  v obvode najčastejšie predstavuje sériový odpor vinutia cievky, zriedkakedy sa do obvodu umelo pridáva. Keďže sa nedá od indukčnosti fyzicky

<sup>1</sup> Takáto zmena znamienka zmenou fázy o  $\pm\pi$  je možná iba u prísne harmonických priebehov, u ktorých časový posuv o  $T/2$  nevedie k zmene absolútnej hodnoty veličiny. Zámena sa nedá urobiť napríklad u tlmených periodických (prechodových) priebehov.

oddeliť, nemožno oddelene merať napätie na odpore a indukčnosti. Hodnota odporu je zvyčajne veľmi malá v porovnaní s indukčnou reaktanciou pri rezonancii  $\omega_0 L$ , alebo kapacitnou reaktanciou  $1/\omega_0 C$ . V odseku 7.9.1 sme ako charakteristiku kmitavých vlastností  $RLC$  obvodu zaviedli kvalitu obvodu danú výrazom (7.99). Táto veličina hrá dôležitú úlohu aj pri vynútených kmitoch v obvode, je daná výrazom

$$Q_0 = \omega_0 \frac{L}{R_s} \quad (9.64)$$

a pri urobených predpokladoch je oveľa väčšia ako 1.



Obr. 9.10

Druhú poznámku treba urobiť k vlastnostiam použitého zdroja napätia. Popri jeho amplitúde napätia a frekvencii určuje jeho vlastnosti aj vnútorný odpor, presnejšie vnútorná impedancia. Ak má obvod vykazovať dobré rezonančné vlastnosti, musí byť táto impedancia v absolútnej hodnote oveľa menšia ako  $R_s$ . Budeme predpokladať, že vnútornú impedanciu zdroja reprezentuje odpor  $R_i \ll R_s$ , ktorý v našej analýze možno zanedbať. V opačnom prípade analýza vlastností obvodu sa stáva neprehľadná, a pritom neposkytuje primeraný praktický ošoh.

Impedancia  $RLC$  vetvy obvodu je

$$Z = R_s + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

a pre dané komplexné napätie generátora je komplexná amplitúda prúdu v obvode daná výrazom

$$I = \frac{U_0}{R_s + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \quad (9.65)$$

Z tohoto výrazu alebo z jemu zodpovedajúcich reálnych veličín vidíme, že v prípade konštantnej amplitúdy  $U_0$  a premennej frekvencie  $\omega$  sa bude s frekvenciou meniť amplitúda prúdu a aj jeho fázový posuv oproti napätiu. Mimoriadne výrazná je táto zmena v okolí

frekvencie  $\omega_0$ , pri ktorej má amplitúda prúdu maximálnu hodnotu. Je to vtedy, keď imaginárna časť menovateľa posledného výrazu sa rovná nule, t. j. pri frekvencii  $\omega_0$ , pre ktorú platí

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

Zodpovedajúca frekvencia

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9.66)$$

je známa Thomsonova frekvencia vlastných kmitov vysokokvalitného *RLC* obvodu. Pomocou tejto frekvencie možno impedanciu vyjadriť výrazom

$$\mathbf{Z} = R_s + j\omega_0 L \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = R_s \left[ 1 + jQ_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \quad (9.67)$$

Vidíme, že pre  $\omega = \omega_0$  je  $\mathbf{Z} = R_s$ . Ak frekvencia  $\omega$  rastie alebo klesá z hodnoty  $\omega_0$ , absolútna hodnota imaginárnej časti impedancie rapídne rastie, ak je kvalita  $Q_0$  veľká, čo sme predpokladali. Amplitúda prúdu naopak, bude dosahovať veľké hodnoty iba pri rezonančnej frekvencii a v jej tesnom okolí a so zväčšovaním frekvenčnej odchýlky  $\delta\omega = \omega - \omega_0$  na obidve strany bude rapídne klesať (pozri obr 9.11). Za takýchto predpokladov možno impedanciu (9.67) pre blízke okolie  $\omega_0$  vyjadriť výrazom

$$\mathbf{Z} = R_s \left( 1 + j2Q_0 \frac{\delta\omega}{\omega_0} \right) = R_s + j2\delta\omega L \quad (9.68)$$

Táto impedancia určuje vlastnosti sériového *RLC* obvodu v okolí frekvencie  $\omega_0$ , a na základe jej vyššie uvedených vlastností môžeme konštatovať, že:

- a) Pri frekvencii  $\omega = \omega_0$  ( $\delta\omega = 0$ ) impedancia  $\mathbf{Z}$  je minimálna a reálna. Má veľkosť

$$\mathbf{Z} = R_s$$

a fázu  $\varphi = 0$ . Amplitúda prúdu je maximálna, má veľkosť

$$I_0 = \frac{U_0}{R_s}$$

a fázový posuv napätia a prúdu sa rovná nule, t. j. prúd a napätie sú vo fáze. To je stav **sériovej rezonancie** v obvode. Ak by odpor  $R_s$  klesal k nule, rástla by za rezonancie amplitúda prúdu nad všetky medze.

b) Pre frekvencie  $\omega < \omega_0$  ( $\delta\omega < 0$ ) má impedancia obvodu kapacitný charakter s fázou  $\varphi < 0$ . S klesajúcou frekvenciou pre  $\omega \rightarrow 0$  rastie impedancia  $\mathbf{Z}$  nad všetky medze a jej fáza  $\varphi \rightarrow -\pi/2$ . Amplitúda prúdu klesá k nule a prúd fázovo predbieha napätie.

c) Pre frekvencie  $\omega > \omega_0$  ( $\delta\omega > 0$ ) má impedancia obvodu induktívny charakter a fáza  $\varphi > 0$ . S rastúcou frekvenciou pre  $\omega \rightarrow \infty$  impedancia  $\mathbf{Z}$  rastie nad všetky medze a fáza  $\varphi \rightarrow +\pi/2$ . Amplitúda prúdu klesá k nule a prúd fázovo zaostáva za napätím.

Všetky uvedené vlastnosti  $RLC$  obvodu v okolí rezonancie sú graficky ilustrované na obr. 9.11.

Za rezonancie vznikajú na prvkoch obvodu zaujímavé napäťové javy. Na odpore je amplitúda napätia

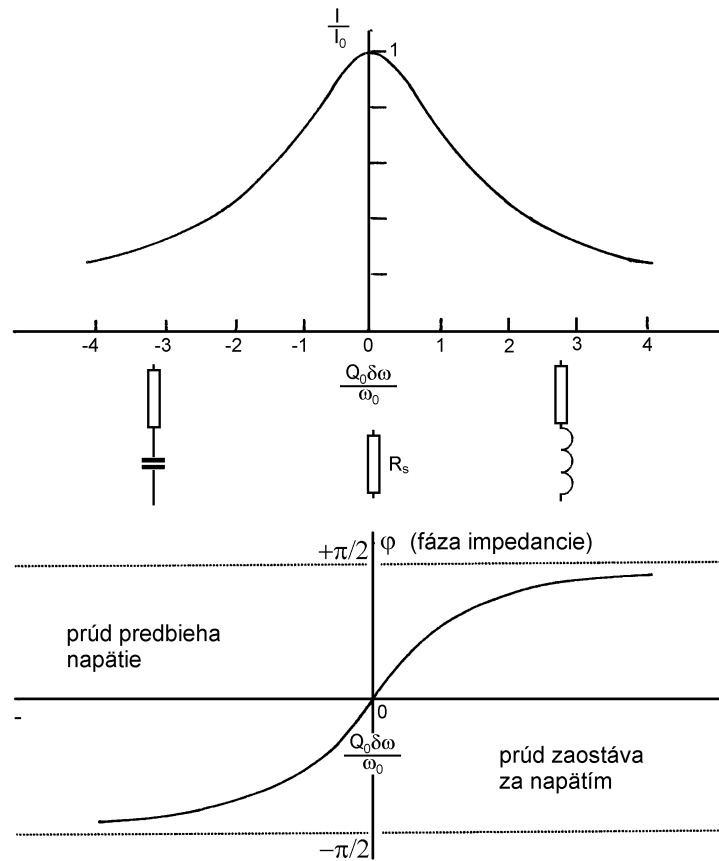
$$U_R = R_s I_0 = U_0$$

na kapacite je komplexná amplitúda napätia

$$U_C = -jX_C I_0 = -j \frac{1}{\omega_0 C} I_0 = -j \frac{U_0}{\omega_0 C R_s} = -jQ_0 U_0 \quad (9.69)$$

a na indukčnosti

$$U_L = jX_L I_0 = j\omega_0 L I_0 = j \frac{\omega_0 L}{R_s} U_0 = jQ_0 U_0 \quad (9.70)$$



Obr. 9.11

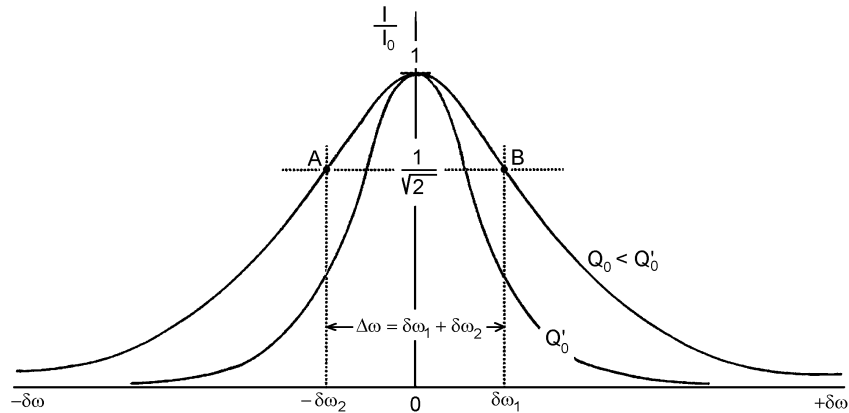
Vidíme, že za rezonancie napätie na kapacite  $U_C$  fázovo zaostáva o  $\varphi_C = -\pi/2$  za napätím generátora  $U_0$  a napätie na indukčnosti  $U_L$  ho fázovo predbieha o  $\varphi_L = +\pi/2$ ,

takže vzájomný fázový posuv oboch napätí je  $\pi$ . Hovorí sa, že napätia sú v protifáze, kmitajú na obidvoch prvkoch v protitakte, takže výsledné napätie na  $L$ - $C$  dvojici je za rezonancie nulové. Každá z amplitúd napätí je pritom  $Q_0$ -krát väčšia ako amplitúdy napätí generátora  $U_0$  a napät'ového spádu na odpore  $R_s$ . Tieto napät'ové efekty sú hlavnými znakmi sériovej rezonancie, ktorá sa preto nazýva aj **napät'ová rezonancia** (pozri obr. 9.10).

Frekvenčná závislosť relatívnej (normovanej) amplitúdy prúdu  $I/I_0$ , zobrazená na obr. 9.11 sa nazýva **rezonančná krivka** Lorentzovho typu<sup>1</sup>. Jej frekvenčný priebeh je daný výrazom

$$\frac{I}{I_0} = \frac{R_s}{Z} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q_0^2 \frac{\delta\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad (9.71)$$

a ako vidíme, jej tvar závisí nielen od rezonančnej frekvencie, ale aj od kvality obvodu  $Q_0$ . Pre malé hodnoty  $Q_0$  je krivka plochá, pre vysoké hodnoty naopak, veľmi ostrá a pre kvality idúce do nekonečna (pre  $R_s \rightarrow 0$ ) nadobúda tvar "normovanej" Diracovej  $\delta$ -funkcie.<sup>2</sup> Tvar normovanej rezonančnej krivky pre dve hodnoty kvality je znovu znázornený na obr. 9.12.



Obr. 9.12

Na rezonančnej krivke možno definovať jej šírku frekvenčného pásma  $\Delta\omega = \delta\omega_1 - \delta\omega_2$ , v ktorom normovaná amplitúda prúdu neklesne pod hodnotu  $1/\sqrt{2}$ . Body A a B na obr. 9.12 sa nazývajú "body polovičného výkonu", pretože v nich obvod absorbuje polovicu rezonančného výkonu. Vidíme, že výraz (9.71) bude mať hodnotu  $1/\sqrt{2}$  vtedy, ak pod odmocninou je hodnota

<sup>1</sup> Lorentz, H. A., Proc. Amst. Akad. Sc. **8**, 591, 1906

<sup>2</sup> Diracova  $\delta$ -funkcia je definovaná ako funkcia  $\delta(x)$ , ktorá má hodnotu 0 pre všetky hodnoty  $x$  s výnimkou  $x = 0$ , kde nadobúda nekonečne veľkú hodnotu  $+\infty$ , pričom je normovaná tak, že  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$ .

$$2Q_0 \frac{\delta\omega}{\omega_0} = Q_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 1 \quad (9.72)$$

Z posledného výrazu vidíme, že **kvalita rezonančného obvodu je nepriamo úmerná šírke jeho frekvenčného pásma na úrovni polovičného výkonu**, teda

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (9.73)$$

Je to nová definícia kvality rezonančného obvodu, obzvlášť výhodná na určenie kvality meraním. Meranie frekvencie je totiž jedno z najpresnejších meraní v oblasti striedavých prúdov.

Kvalita je veličina úmerná rezonančnej frekvencii. Keďže efektívny odpor drôtového vodiča z ktorého je vinutá cievka je v dôsledku povrchového javu (skinefektu) – pozri odsek 11.5 – závislý od frekvencie a má hodnotu  $R_s \sim \sqrt{\omega_0}$ , potom v súhlase s výrazom (9.64) kvalita

$$Q_0 \sim \sqrt{\omega_0}$$

t. j. s frekvenciou mierne rastie. Pri akustických frekvenciách sú realizovateľné rezonančné obvody s kvalitou  $\sim 20$ , pri frekvenciách  $\sim 1$  MHz sú bežné kvality  $\sim 100 - 200$ , v pásme frekvencií  $\sim 10^3 - 10^5$  MHz sú rezonančnými systémami ladené úseky prenosových vedení a dutinové rezonátory, ktorých kvality dosahujú hodnôt  $\sim 1000$  až  $\sim 10000$ . V optickej oblasti elektromagnetického spektra slúžia ako rezonančné systémy optické interferometre (napr. známy Fabryho-Perotov interferometer) s kvalitami  $10^5$  až  $10^6$ .

Podľa všeobecnej definície kvality v odseku 7.9.1 je kvalita nepriamo úmerná stratám rezonančného systému, ktoré v našom prípade sú stratami v odpore cievky  $R_s$ , ale isté straty môžu nastávať aj v dielektriku kondenzátora, a nakoniec, pri dost' vysokých frekvenciách nemusia byť zanedbateľné ani straty vyžarovaním elektromagnetickej energie zo systému. Preto namerané kvality môžu byť menšie ako tie, ktoré plynú z výrazu (9.64). Možno ukázať, že s uvažovaním strát v dielektriku kondenzátora celková kvalita  $Q_c$  obvodu  $RLC$  klesne a je daná výrazom

$$\frac{1}{Q_c} = \frac{1}{Q_0} + \text{tg } \delta \quad (9.74)$$

kde  $\delta$  je stratový uhol dielektrika. Ak však uvažujeme, že pre všetky do úvahy prichádzajúce dielektriká kondenzátorov v megahertzovej oblasti je  $\text{tg } \delta < 10^{-3}$  (pozri tabuľku 17), pritom  $1/Q_0 \approx 10^{-2}$  a väčšie, možno straty kondenzátorov zanedbať.

Na záver analýzy sériového rezonančného obvodu uvedieme číselný príklad pre pochopenie kvantitatívnych súvislostí:

Sériový obvod  $RLC$  s prvkami  $C = 2533$  pF,  $L = 10$   $\mu$ H s odporom cievky  $R_s = 1$   $\Omega$  je za rezonancie napájaný z ideálneho napäťového generátora s amplitúdou  $U_0 = 1$  V. Kondenzátor je bezstratový. Treba vypočítať rezonančnú frekvenciu  $f_0$ , kvalitu obvodu  $Q_0$ , amplitúdu prúdu v obvode za rezonancie  $I_0$  a amplitúdy napätí na cievke  $U_L$  a kondenzátore  $U_C$ .

Rezonančná frekvencia

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 10^6 \text{ Hz} = 1 \text{ MHz}$$

kvalita obvodu

$$Q_0 = \omega_0 \frac{L}{R_s} = 2\pi f_0 \frac{L}{R_s} \approx 62,8$$

amplitúda prúdu v obvode za rezonancie

$$I_0 = \frac{U_0}{R_s} = 1 \text{ A}$$

a amplitúdy napätí na cievke a kondenzátore

$$U_L = U_C = \omega_0 L I_0 = \frac{1}{\omega_0 C} I_0 = Q_0 U_0 \approx 62,8 \text{ V}$$

Na odpore je amplitúda napätia  $U_R = U_0 = 1 \text{ V}$  a napätie je vo fáze s napätím generátora. Napätie na cievke ho predbieha vo fáze o  $+\pi/2$ , zatiaľ čo napätie na kondenzátore za ním zaostáva o  $-\pi/2$ . Výsledné napätie na sériovej dvojici  $L$ - $C$  je nulové.

## 9.7.2 Paralelný rezonančný obvod

Paralelný rezonančný obvod vznikne paralelným spojením troch ideálnych prvkov  $L$ ,  $C$ ,  $R$ . Také spojenie sa, žiaľ, v praxi nedá realizovať, pretože odpor a indukčnosť tvoria sériovú dvojicu  $L$  a  $R$ , ktorú nemožno fyzicky rozdeliť. V praxi teda možno spojiť paralelne iba reálnu cievku a viac alebo menej ideálny kondenzátor. Takéto spojenie sa pripojí na prúdový zdroj (generátor), o ktorom budeme predpokladať, že je ideálny, t. j. jeho vnútorná admitancia je nulová ( $Y_i \approx G_i = 0$ ). Zapojenie je schematicky znázornené na obr. 9.13. Prúdový generátor dodáva do obvodu prúd s konštantnou reálnou amplitúdou  $I_0$ , frekvencia  $\omega$  generátora je premenná. Paralelné spojenie  $RLC$  možno na svorkách generátora charakterizovať admitanciou

$$Y = \frac{1}{R_s + j\omega L} + j\omega C = \frac{R_s}{R_s^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R_s^2 + \omega^2 L^2}\right) \quad (9.75)$$

ktorá podobne ako impedancia sériového obvodu určuje frekvenčný priebeh komplexnej amplitúdy napätia na obvode  $U$ , prípadne prúd v  $RLC$  slučke. Tieto veličiny majú rezonančný charakter a rezonancia nastáva pri takej frekvencii  $\omega_r$ , pri ktorej je admitancia reálna. Ak sa teda imaginárna časť výrazu (9.75) rovná nule, t. j. ak

$$\omega_r C - \frac{\omega_r L}{R_s^2 + \omega_r^2 L^2} = 0$$



dostaneme pre rezonančnú frekvenciu výraz

$$R_s^2 + \omega_r^2 L^2 = \frac{L}{C}$$

z čoho

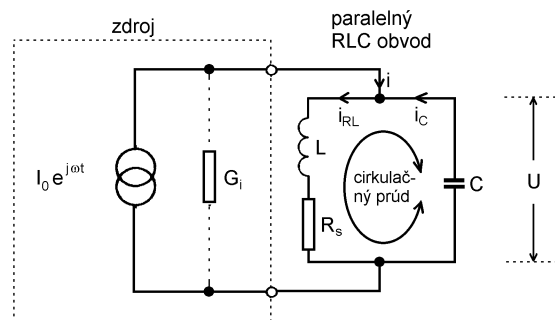
$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_s^2 C}{L}} \quad (9.76)$$

Ak vezmeme do úvahy, že

$$\frac{L}{CR_s^2} = Q_0^2 \quad (9.77)$$

(pozri tiež odsek 7.9.1), možno výraz pre rezonančnú frekvenciu paralelného rezonančného obvodu napísať v tvare

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q_0^2}} \quad (9.78)$$



Obr. 9.13

Vidíme, že zatiaľ čo sériový rezonančný obvod je v rezonancii pri Thomsonovej frekvencii  $\omega_0$  a pri tejto frekvencii má prúd aj maximum (impedancia minimum), paralelný rezonančný obvod sa správa ináč. Rezonancia v zmysle definície (nulová fáza impedancie, resp. admitancie) nastáva u neho pri inej frekvencii, menovite pri frekvencii danej výrazom (9.78) a amplitúda napätia  $U$  nadobúda maximum pri ďalšej frekvencii

$$\omega_m = \omega_0 \sqrt{\sqrt{1 + \frac{2}{Q_0^2}} - \frac{1}{Q_0^2}} \quad (9.79)$$

o čom sa čitateľ môže presvedčiť, ak vypočíta extrém (minimum) funkcie  $|Y(\omega)|$  [amplitúda výrazu (9.75)]. Okrem toho kvalita obvodu je daná frekvenciou  $\omega_r$  a nie  $\omega_0$ , takže má hodnotu

$$Q_r = \omega_r \frac{L}{R_s} = \sqrt{Q_0^2 - 1} \quad (9.80)$$

Vidíme, že sa dostávame do rovnakých ťažkostí s definíciou kvality ako pri voľných kmitoch v  $RLC$  obvode v odseku 7.9.1. Treba teda rozhodnúť, čo považovať za príznak rezonancie paralelného obvodu: či nulovú fázu admitancie (exaktná, jednoduchá definícia, ale zložité meranie) alebo extrém impedancie či admitancie (zložité vyjadrenie  $\omega_m$ , avšak jednoduché a pohodlné "vyladenie" minima či maxima amplitúdy prúdu alebo napätia). Zdá sa, že odpoveď na túto dilemu nie je všeobecne jednoduchá. Našťastie takmer vo všetkých reálnych prípadoch je naporúdzi jednoduchá odpoveď: **Ak je kvalita obvodu veľká (a nemusí byť ani príliš veľká) – je jedno, čo budeme považovať za rezonančnú frekvenciu – či  $\omega_0$ ,  $\omega_r$  alebo  $\omega_m$  – pretože tieto frekvencie sú takmer rovnaké a existujúci frekvenčný rozdiel je prakticky bezvýznamný.** Ak je napríklad  $Q_0$  len 10, potom z výrazu (9.80) plynie, že relatívny rozdiel

$$\frac{Q_0 - Q_r}{Q_0} \approx \frac{1}{2Q_0^2} = 0,005$$

teda  $Q_r = 9,95$ . Ak  $Q_0 = 100$ , potom uvažovaný relatívny rozdiel je iba  $5 \cdot 10^{-5}$  a  $Q_r = 99,995$ . Dôležité však je, že aj relatívny rozdiel frekvencií je rovnako veľmi malý, t. j.

$$\frac{\omega_0 - \omega_r}{\omega_0} \approx \frac{1}{2Q_0^2}$$

a relatívny rozdiel

$$\frac{\omega_0 - \omega_m}{\omega_0} \approx \frac{1}{4Q_0^4}$$

je skutočne zanedbateľný, pretože  $\omega_m$  a  $\omega_0$  prakticky splývajú.

Ak teda prijmeme predpoklad, že kvalita je veľká, že teda

$$Q_0 = \omega_0 \frac{L}{R_s} \gg 1$$

potom sa situácia veľmi zjednoduší. Predovšetkým možno položiť

$$Q_r \approx Q_0$$

tiež platí, že

$$\omega_0 L \gg R_s$$

a

$$\omega_r \approx \omega_m \approx \omega_0$$

Výraz (9.75) pre admitanciu možno napísať v jednoduchšom tvare

$$Y = \frac{R_s}{\omega^2 L^2} + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = \frac{R_s}{\omega^2 L^2} + j \omega_0 C \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Ak je kvalita paralelného rezonančného obvodu veľká, má obvod ešte jednu dôležitú vlastnosť, a to, že jeho admitancia sa rapídne mení iba v blízkej frekvenčnej oblasti okolo frekvencie  $\omega_0$ , a všade inde rýchle rastie v absolútnej hodnote (napätie  $U$  naopak klesá

k nule – pozri *obr. 9.14*). Možno teda podobne ako u sériového rezonančného obvodu zaviesť frekvenčnú odchýlku (rozladenie)  $\delta\omega = \omega - \omega_0$ , pričom  $\delta\omega \ll \omega_0$  a dosadiť v poslednom výraze  $\omega = \omega_0 + \delta\omega$  tak výraz pre admitanciu prejde na tvar

$$Y \approx \frac{R_s C}{L} + j2\delta\omega C = \frac{R_s C}{L} \left( 1 + j2Q_0 \frac{\delta\omega}{\omega_0} \right) = \frac{1}{Q_0^2 R_s} \left( 1 + j2Q_0 \frac{\delta\omega}{\omega_0} \right) \quad (9.81)$$

Za rezonancie ( $\delta\omega = 0$ ) je admitancia na svorkách obvodu minimálna a reálna s hodnotou

$$Y = \frac{1}{Q_0^2 R_s} = \frac{C R_s}{L} = G_p = \frac{1}{R_p}$$

kde  $G_p$  je vodivosť obvodu za rezonancie. Odpor  $R_p = 1/G_p$  obvodu za rezonancie je  $Q_0^2$ -násobkom sériového odporu cievky  $R_s$  (čím menší je odpor  $R_s$ , tým väčší je rezonančný odpor  $R_p$ ).

Ak porovnáme výraz (9.81) s podobným výrazom (9.68) pre impedanciu sériového rezonančného obvodu, vidíme, že v istom zmysle sú sériový a paralelný obvod duálne, vlastnosti jedného možno získať z druhého zámenou  $Z \Leftrightarrow Y$  a  $I \Leftrightarrow U$ . Ich impedancie a admitancie sú vyjadrené formálne rovnakými výrazmi a formálne rovnakými budú aj amplitúda prúdu v sériovom obvode a amplitúda napätia na paralelnom obvode, ktoré má tvar

$$U = \frac{I_0}{Y} = \frac{Q_0^2 R_s I_0}{1 + j2Q_0 \frac{\delta\omega}{\omega_0}} = \frac{U_0}{1 + j2Q_0 \frac{\delta\omega}{\omega_0}} \quad (9.82)$$

kde

$$U_0 = Q_0^2 R_s I_0 \quad (9.83)$$

je maximálna (rezonančná) amplitúda napätia na obvode. Normovaná napät'ová rezonančná krivka obvodu je daná výrazom

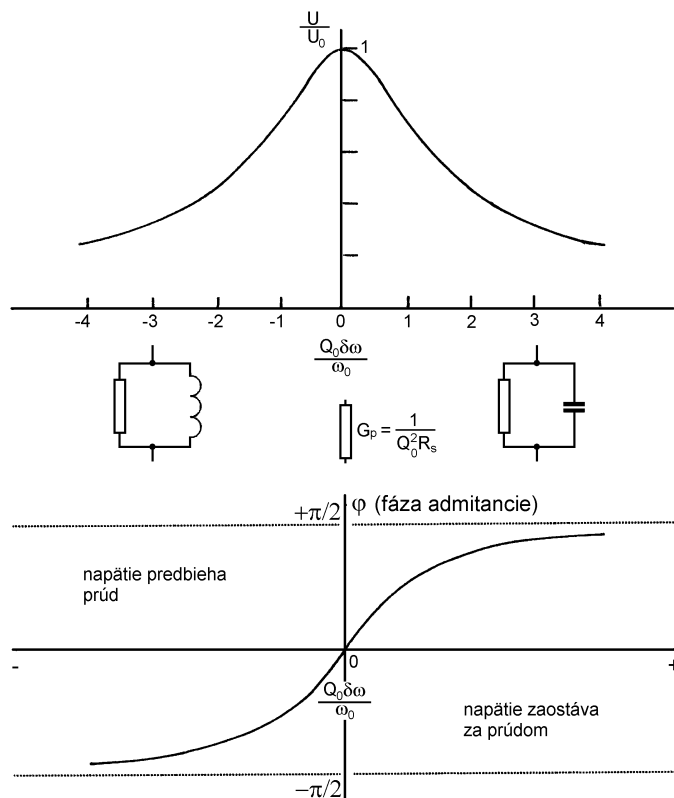
$$\frac{U}{U_0} = \frac{1}{Q_0^2 R_s Y} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q_0^2 \frac{\delta\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad (9.84)$$

a je formálne rovnaká ako prúdová rezonančná krivka (9.71) pre sériový rezonančný obvod. Frekvenčná závislosť normovanej amplitúdy napätia (9.84) je graficky znázornená na *obr. 9.14*. Na obrázku je znázornená aj frekvenčná závislosť fázy admitancie.

Fyzikálne procesy prebiehajúce v paralelnom obvode za rezonancie možno dokonale pochopiť až po preskúmaní prúdu, ktorý tečie v uzavretej slučke  $R_s LC$  v závislosti od frekvencie. Tento prúd je za rezonancie maximálny a v slučke cirkuluje. Ak teda  $\delta\omega = 0$ , na obvode je napätie  $U_0$  a amplitúda prúdu v kondenzátore je

$$I_C = jB_C U_0 = j\omega_0 C Q_0^2 R_s I_0 = jQ_0 I_0$$

kde  $B_C = \omega_0 C$  je susceptancia kapacity za rezonancie. Vidíme, že **prúd v kondenzátore je za rezonancie  $Q_0$ -krát väčší ako prúd generátora a predbieha ho vo fáze o  $+\pi/2$ .**



Obr. 9.14

V cievke je situácia zložitejšia, pretože napätie  $U_0$  nie je na samotnej indukčnosti, ale na  $RL$  sériovej dvojici, ktorú fyzicky nemožno rozdeliť. Ak je však splnená podmienka  $\omega_0 L \gg R_s$ , potom odpor  $R_s$  možno zanedbať a

$$I_L \approx -jB_L U_0 = -j \frac{Q_0^2 R_s}{\omega_0 L} I_0 = -jQ_0 I_0$$

kde  $B_L = 1/\omega_0 L$  je susceptancia indukčnosti za rezonancie. **Prúd v cievke je teda tiež približne  $Q_0$ -krát väčší ako prúd generátora a zaostáva za ním vo fáze o  $-\pi/2$ .** V slučke teda skutočne cirkuluje  $Q_0$ -krát väčší prúd ako dodáva do obvodu generátor, a preto sa paralelná rezonancia nazýva tiež **prúdová rezonancia** (pozri obr. 9.13).<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Veľké rezonančné prúdy a napätia v  $RLC$  obvodoch vyžadujú napr. vo výkonových vysokofrekvenčných obvodoch vysielačov používať kondenzátory s veľmi kvalitnými dielektrikami a vysokou dielektrickou pevnosťou. Sú známe prípady havárie vysielačov práve v dôsledku nedodržania týchto požiadaviek.

Priebeh napäťovej rezonančnej krivky na obr. 9.14 súvisí s kvalitou podobne ako prúdová krivka sériového obvodu – je štipľavá pre obvody s vysokou kvalitou a naopak plochá pre nízke kvality. Možno na nej definovať body polovičného výkonu so šírkou pásma  $\Delta\omega$  a vyjadriť kvalitu výrazom  $Q_0 = \omega_0/\Delta\omega$ .

### 9.7.3 Napájanie rezonančných obvodov a ich použitie

Aj keď sériová a paralelná rezonancia v  $RLC$  obvodoch sú v mnohých ohľadoch analogické, treba si uvedomiť dva dôležité rozdiely: charakter rezonancie a vlastnosti napájacích zdrojov. Zatiaľ čo v **sériovom obvode s napäťovou rezonanciou** na obr. 9.10 sme použili **generátor napätia** s konštantnou amplitúdou  $U_0$  a malým (nulovým) vnútorným odporom  $R_i$ , pre **paralelný obvod s prúdovou rezonanciou** na obr. 9.13 sme bez komentára použili **generátor prúdu** s konštantnou amplitúdou prúdu  $I_0$  a s malou (nulovou) vnútornou vodivosťou  $G_i$ . **Jedine pri takom napájaní možno využiť rezonančné vlastnosti obidvoch obvodov.** Ak by sme totiž napájali paralelný rezonančný obvod napäťovým generátorom (s konštantným  $U_0$ ), napätie na obvode by zostávalo prakticky konštantné a rezonancia by sa prejavila iba minimom prúdu generátora, lebo impedancia paralelného rezonančného obvodu je za rezonancie maximálna. Podobne, ak by sme sériový rezonančný obvod napájali z prúdového generátora (s konštantným  $I_0$ ), prúd v obvode by bol pri všetkých frekvenciách takmer konštantný a pri frekvencii  $\omega_0$  by napätie na svorkách prúdového zdroja bolo minimálne, pretože impedancia sériového obvodu je za rezonancie minimálna. V obidvoch prípadoch by sa rezonančné vlastnosti obvodov prejavili iba vplyvom na svorkové napätie, resp. svorkový prúd napájacích generátorov, ktoré nie sú nikdy ideálne, teda vždy je  $R_i > 0$  resp.  $G_i > 0$ . V prípade ideálnych zdrojov by sme v takých nevhodných zapojeniach dokonca nepozorovali žiadne rezonančné efekty.

Spôsob napájania rezonančných obvodov možno posúdiť aj z hľadiska ich kvalít. Doteraz uvažované kvality  $Q_0$  sú **vlastné kvality** obvodov dané ich vlastnými stratami. Ak generátory nie sú ideálne, vznikajú isté straty aj na ich vnútorných odporoch, resp. vodivostiach a celkové straty sú potom vyššie. Kvalita obvodu zaťaženého vonkajšími stratami sa nazýva **kvalita zaťaženého obvodu**. Tak napríklad ak napäťový generátor na obr. 9.10 nie je ideálny (t. j. ak  $R_i > 0$ ), potom kvalita zaťaženého obvodu

$$Q_s = \frac{\omega_0 L}{R_s + R_i} = Q_0 \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_s}}$$

Ak generátor nemá príliš ovplyvňovať rezonančné vlastnosti obvodu (nemá veľmi vplývať na kvalitu), musí mať malý vnútorný odpor ( $R_i \ll R_s$ ), teda musí to byť napäťový generátor blízky ideálnemu. Podobnú úvahu možno urobiť pre paralelný obvod, pre ktorý je však výhodnejšie vyjadriť kvalitu  $Q_0$  z definície výrazom

$$Q_0 = \omega_0 \frac{\frac{1}{2} C U_0^2}{\frac{1}{2} G_p U_0^2} = \frac{\omega_0 C}{G_p}$$

kde  $G_p = 1/R_p$  je rezonančná vodivosť obvodu. Kvalita zaťaženého obvodu vodivosťou  $G_i$  prúdového generátora je daná výrazom

$$Q_p = \frac{\omega_0 C}{G_p + G_i} = Q_0 \frac{1}{1 + \frac{G_i}{G_p}}$$

a nebude generátorom podstatne ovplyvnená, ak jeho vnútorná vodivosť bude malá ( $G_i \ll G_p$ ), teda ak generátor bude mať vlastnosti blízke ideálnemu prúdovému generátoru.

Prúdové generátory (zdroje) však v praxi neexistujú a vzniká otázka, z čoho sa vlastne paralelné rezonančné obvody napájajú? Odpoveď je jednoduchá. **Vhodným generátorom pre napájanie paralelného rezonančného obvodu je napätový generátor, ktorého vnútorný odpor  $R_i$  je podstatne väčší ako rezonančný odpor obvodu  $R_p = Q_0^2 R_s$ .** Je to teda generátor, pre ktorý platí

$$R_i \gg \frac{L}{CR_s} = Q_0^2 R_s$$

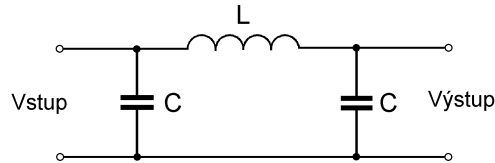
Rezonančné obvody predstavujú základ obvodovej vysokofrekvenčnej elektroniky. Tvoria súčasť oscilátorov, reprezentujú najjednoduchšie frekvenčné priepusty a zádrže, sú súčasťou ladených viazaných obvodov, pásmových zosilňovačov a pod.

## 9.8 FREKVENČNÉ FILTRE

V obvodovej elektronike často treba zo zmesi signálov (napätí alebo prúdov) rôznych frekvencií vybrať signál s jednou frekvenciou alebo signály v nejakom frekvenčnom intervale (vo frekvenčnom pásme). Inokedy treba oddeliť jednosmernú zložku napätia a potlačiť striedavé zložky ako je to v usmerňovačoch striedavého prúdu. Elektrické zariadenia slúžiace na tieto účely sa nazývajú spoločným názvom "frekvenčné filtre". V tomto odseku sa budeme zaoberať iba pasívnymi frekvenčnými filtermi pozostávajúcimi z pasívnych elektrických prvkov  $R$ ,  $L$  a  $C$  bez aktívnych polovodičových súčiastok.

Podľa pásma priepustnosti sa filtre delia na **frekvenčné priepusty** prepúšťajúce signály v istom definovanom pásme frekvencií  $\Delta\omega$  a **frekvenčné zádrže**, ktoré naopak, v nejakom pásme  $\Delta\omega$  signály potláčajú. Jednoduchými príkladmi nie veľmi dokonalých frekvenčných priepustov a zádrží sú v predchádzajúcich odsekoch analyzované sériové a paralelné rezonančné obvody, ktoré prepúšťajú alebo zadržávajú signály v úzkom pásme okolo rezonančnej frekvencie  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

Iné druhy filtrov prepúšťajú signály s frekvenciami v pásme od 0 po istú, **kritickú frekvenciu  $\omega_{kr}$** , nad ktorou prepúšťajú signály s veľkým útlmom alebo neprepúšťajú vôbec. Filter s takými vlastnosťami sa nazýva **dolnofrekvenčný priepust**. Filter, ktorý naopak, silne potláča signály s frekvenciami menšími ako  $\omega_{kr}$  a prepúšťa signály nad  $\omega_{kr}$  sa nazýva **hornofrekvenčný priepust**.



Obr. 9.15

Na obr. 9.15 je znázornený špeciálny filter, ktorý sa často používa na "vyhladenie" pulzujúceho napätia z výstupu napr. dvojcestného usmerňovača striedavého napätia sieťovej frekvencie  $f = 50$  Hz. Od takého filtra sa očakáva, že prepustí jednosmerné napätie, teda napäťovú zložku s frekvenciou  $f = 0$  Hz a potlačí zložku s frekvenciou 100 Hz (dvojcestné usmernenie) a vyššie harmonické zložky. Pomer efektívnej hodnoty striedavej zložky napätia na výstupe filtra k jeho konštantnej, jednosmernej zložke sa nazýva **činiteľ zvlnenia  $\xi$** . Na filter sa možno pozerať ako na delič tvorený reaktanciami  $X_L = \omega L$  a  $X_C = 1/\omega C$ , pričom sa volí  $X_L \gg X_C$ . Pre frekvenciu  $\omega$  je pomer frekvenčných zložiek napätia  $U_{vyst}/U_{vst}$  daný približne deliacim pomerom reaktancií, teda

$$\frac{U_{vyst}(\omega)}{U_{vst}(\omega)} = \frac{X_C}{X_L - X_C} \approx \frac{X_C}{X_L} \approx \frac{1}{\omega^2 LC}$$

(za predpokladu, že výstup filtra nie je zaťažný). Napäťový prenos na výstup je teda nepriamo úmerný  $\omega^2$ . Ak napr.  $L = 25$  H a  $C = 10$   $\mu$ F, potom pri frekvencii  $f = 100$  Hz je

$$\frac{U_{vyst}(\omega)}{U_{vst}(\omega)} \approx \frac{1}{\omega^2 LC} \approx 10^{-2}$$

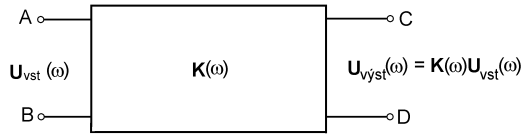
Vidieť, že aj keď striedavá zložka napätia nie je dokonale potlačená, je zvlnenie pri základnej frekvencii malé, a pre vyššie harmonické zložky je ešte menšie. Na druhej strane, ak kondenzátory nemajú zvody, prenesie sa na výstup filtra plné jednosmerné napätie. V prípadoch, keď sa vyžaduje väčšie potlačenie striedavej zložky (menšie zvlnenie), zapojí sa niekoľko takých filtrov za sebou.

Filtre zostavené z iba reaktančných prvkov  $L$  a  $C$  sa používajú hlavne pre energetické účely a pre špeciálne požiadavky vysokofrekvenčnej elektroniky, pretože výroba najmä veľkých indukčností, so železným prípadne feritovým jadrom, je nákladná. V prípadoch, keď netreba prenášať veľké výkony, nahrádzajú sa kombinácie  $L-C$  kombináciami  $R-C$ . Takáto kombinácia má isté výkonové straty na odpore  $R$  a to obmedzuje jej použitie pri veľkých prúdoch.

Prv, než pristúpime k analýze vlastností niektorých pasívnych  $R-C$  filtrov, zavedieme niekoľko všeobecných pojmov, ktoré vystupujú v teórii filtrov. Pre naše účely budeme pod pojmom pasívny frekvenčný filter rozumieť elektrické zapojenie z odporov a kondenzátorov, ktoré je schematicky znázornené na obr. 9.16. Svorok AB sú vstupné, CD výstupné. Prenosové vlastnosti filtra sú úplne opísané jeho komplexným koeficientom prenosu  $K(\omega)$  definovaným ako pomer komplexných amplitúd výstupného a vstupného napätia pri frekvencii  $\omega$  teda

$$K(\omega) = \frac{U_{\text{výst}}(\omega)}{U_{\text{vst}}(\omega)} = K(\omega)e^{j\varphi} \quad (9.85)$$

kde  $K(\omega)$  je bezrozmerná absolútna hodnota koeficientu prenosu a  $\varphi$  je jeho fáza. Pre pasívne filtre typu  $R-C$  a  $R-L$  je koeficient prenosu  $K(\omega)$  vždy menší, nanajvýš sa rovná 1. V ďalšom preskúmame vlastnosti niektorých  $R-C$  filtrov z hľadiska ich prenosovej funkcie.



Obr. 9.16

### 9.8.1 Dolnofrekvenčný $R-C$ priepust

Zapojenie jednoduchého  $R-C$  filtra s vlastnosťami dolnofrekvenčného priepustu je na obr. 9.17. Ak je na vstupe napätie, ktorého komplexná amplitúda je  $U_{\text{výst}}(\omega)$  a na výstupe komplexná amplitúda  $U_{\text{vst}}(\omega)$ , potom komplexný koeficient prenosu je daný výrazom

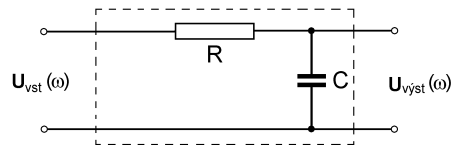
$$K(\omega) = \frac{U_{\text{výst}}(\omega)}{U_{\text{vst}}(\omega)} = \frac{-jX_C}{R - jX_C} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (9.86)$$

Amplitúda a fáza koeficientu prenosu (amplitúdovo-frekvenčné a fázovo-frekvenčné charakteristiky) sú dané výrazmi

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad \varphi(\omega) = -\text{arctg } \omega RC \quad (9.87)$$

Vidíme, že koeficient prenosu má hodnotu 1 pri nulovej frekvencii a s rastúcou frekvenciou klesá k nule. Filter teda dobre prenáša jednosmerný signál a signály pri nízkych frekvenciách a potláča signály s vysokými frekvenciami. Za hraničnú alebo kritickú frekvenciu  $\omega_{kr}$  v spektre prenášaného signálu možno považovať frekvenciu, pri ktorej koeficient prenosu  $K(\omega)$  klesne z hodnoty 1 na hodnotu  $1/\sqrt{2}$ . Z výrazu (9.87) vidieť, že je to frekvencia, ktorá spĺňa podmienku

$$\omega_{kr} RC = 1$$



Obr. 9.17



$$\text{z čoho} \quad \omega_{kr} = \frac{1}{RC} \quad (9.88)$$

Vidíme, že hraničná frekvencia je prevrátenou hodnotou časovej konštanty obvodu  $\tau = RC$ , ktorú sme zaviedli pri analýze prechodových javov v  $RC$  obvode. Možno očakávať, že frekvenčné vlastnosti  $RC$  obvodu nejako hlbšie súvisia s jeho prechodovými vlastnosťami. Možno dokázať, že prechodová (časová) charakteristika je Fourierovou transformáciou frekvenčnej charakteristiky.

Ak využijeme vzťah (9.88), možno vo výrazoch (9.87) zaviesť bezrozmernú normovanú frekvenciu

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{kr}} = \omega RC$$

ktorá nadobúda hodnoty od 0 po  $\infty$ . Hodnotu 1 dosahuje pri  $\omega = \omega_{kr} = 1/RC$ . Výrazy (9.87) prejdú potom na tvar

$$K(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \quad \varphi(\Omega) = -\operatorname{arctg} \Omega \quad (9.89)$$

Vlastnosti dolnofrekvenčného priepustu možno lepšie pochopiť, ak sa graficky znázorní frekvenčná závislosť koeficientu prenosu  $K(\Omega)$  a jeho fázy  $\varphi(\Omega)$ . Lineárne zobrazenie v závislosti od frekvencie nemá veľký praktický osoh, pretože správanie sa filtra je zaujímavé nie pri malých zmenách frekvencie, ale pri zmenách rádových (cez dekády frekvencií – ako to hovoria elektrotechnici). Pri takýchto zmenách frekvencií sa aj koeficient prenosu mení rádozo, a to vedie k myšlienke, vyjadrovať uvažované veličiny ich logaritmiami [logaritmický spôsob vyjadrovania pomerných veličín navrhol už pôvodca prirodzených logaritmov škótsky matematik John Napier (1550 – 1617)]. A tak namiesto pomeru dvoch veličín, ktoré sú v nejakom príčinnom vzťahu (ako napríklad vstupné a výstupné napätie, prúd alebo výkon v nejakej dvojbráne) berie sa podľa dohody dekadický logaritmus uvažovaného pomeru. Tak napríklad v prípade dvoch výkonov  $P_{vyst}$  a  $P_{vst}$  možno namiesto ich pomeru  $A = P_{vyst}/P_{vst}$ , ktorý predstavuje zosilnenie alebo útlm výkonu, pracovať s veličinou

$$\underline{A} = \log \frac{P_{vyst}}{P_{vst}} \quad (9.90)$$

ktorá v prípade zosilnenia je kladná a v prípade útlmu záporná. Veličina  $\underline{A}$  je bezrozmerná, napriek tomu má jednotku nazvanú **bel** (B), ktorá nesie názov po americkom fyzikovi a fyziológovi škótskeho pôvodu Alexandrovi Grahamovi Bellovi (1847 – 1922). Jednotka bola pôvodne zavedená na vyjadrenie akustického tlaku, resp. výkonu. Hodnota  $\pm 1$  B predstavuje desaťnásobné zosilnenie alebo desaťnásobný útlm výkonu. V prípade, ak je porovnávanou veličinou napätie alebo prúd, treba pravú stranu výrazu (9.90) vynásobiť s faktorom 2, pretože výkon je úmerný druhej mocnine napätia alebo prúdu.

Jednotka bel je príliš veľká, a preto sa v praxi častejšie pracuje s jej desatinou, ktorá sa nazýva **decibel** (dB). V takom prípade treba pravú stranu výrazu (9.90) vynásobiť súčiniteľom 10 a v prípade napäťových alebo prúdových veličín súčiniteľom 20. Podľa uvedeného možno teda koeficient prenosu vyjadriť

$$\underline{K}(\Omega) = 20 \log K(\Omega) = 20 \log \frac{U_{\text{výst}}}{U_{\text{vst}}} \quad [\text{dB}] \quad (9.90a)$$

Vidíme, že filtre *RC*, prípadne *RL*, pre ktoré je  $K < 1$ , majú  $\underline{K} < 0$ . Záporný koeficient prenosu v dB predstavuje útlm. Zosilňovače, pre ktoré je  $K > 1$ , majú  $\underline{K} > 0$ . V tabuľke 19 je uvedených niekoľko typických hodnôt koeficientu prenosu a zodpovedajúce hodnoty v dB.<sup>1</sup>

**Tabuľka 19**

$K$	$10^{-3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	10	$10^3$
$\underline{K}[\text{dB}]$	-60	-6	-3	0	3	6	20	60

Ako referenčný výkon vo výraze (9.90) sa niekedy berie  $P_{\text{vst}} = 1 \text{ mW}$ . V takom prípade výstupný výkon udáva výkonovú úroveň v dBm výrazom

$$P(\text{dBm}) = 10 \log P_{\text{výst}}(\text{mW})$$

takže napr. výstupnému výkonu 1 mW zodpovedá úroveň 0 dBm, 2 mW zodpovedá 3 dBm, 10 mW zodpovedá 10 dBm atď. dBm škála sa používa hlavne v telekomunikácii.

Na *obr. 9.18a* je znázornená logaritmická závislosť  $\underline{K}$  od pomernej frekvencie  $\Omega$  a na *obr. 9.18b* je závislosť fázy  $\varphi$ . Závislosti možno aproximovať asymptotami, ktoré vytvárajú Bodeho diagram.<sup>2</sup> Vidieť, že závislosť  $\underline{K}$  je ohraničená dvoma asymptotami:

- Pre  $\Omega < 1$  je asymptotou  $\underline{K} = 0 \text{ dB}$ . Pre frekvencie  $\omega < \omega_{kr}$  je priestup "priehľadný".
- Pre  $\Omega > 1$ , teda pre  $\omega > \omega_{kr}$  je asymptotou priamka so smernicou  $-20 \text{ dB/dekádu}$ , alebo  $-6 \text{ dB/oktávu}$ .<sup>3</sup>
- Pri frekvencii  $\Omega = 1$ , teda pri  $\omega = \omega_{kr}$  je

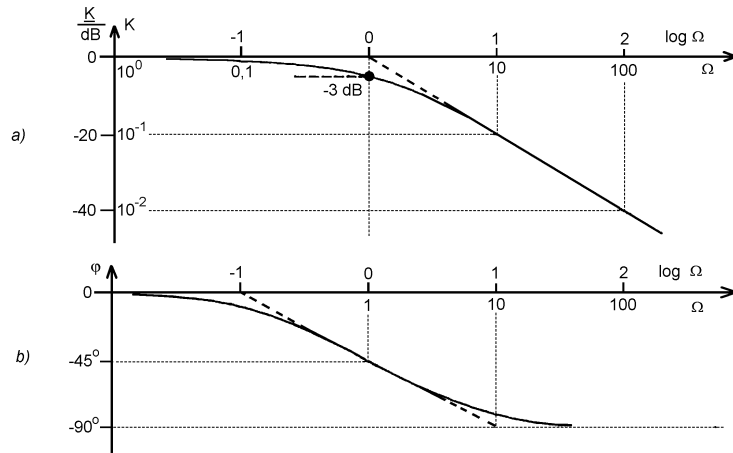
$$\underline{K} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3 \text{ dB}$$

Fáza koeficientu prenosu  $\varphi$  sa mení od 0 pri  $\Omega = 0$ , po  $-\pi/2$  ( $-90^\circ$ ) pre  $\Omega \rightarrow \infty$ . Pri  $\Omega = 1$  ( $\omega = \omega_{kr}$ ) je  $\varphi = -\pi/4$  ( $-45^\circ$ ).

<sup>1</sup> V literatúre sa možno stretnúť s vyjadrením napätového zosilnenia alebo útlmu aj prostredníctvom prirodzených logaritmov. Koeficient prenosu možno vyjadriť výrazom  $A(\text{Np}) = \ln(U_2/U_1)$ . Jednotkou takto definovaného prenosu je neper (Np). Je zřejmé, že  $\pm 1 \text{ Np}$  je zosilnenie alebo útlm napätí v pomere  $U_2/U_1 = e = 2,718\,281\,8$ . Platí  $A(\text{dB}) = 20 (\log e) A(\text{Np}) = 8,686 A(\text{Np})$ , takže  $1 \text{ Np} = 8,686 \text{ dB}$  a  $1 \text{ dB} = 0,1151 \text{ Np}$ . V SI-sústave je neper zakázanou jednotkou.

<sup>2</sup> Pozri Bode, H. W.: *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, Princeton, D. Van Nostrand Co., 1945

<sup>3</sup> V elektrotechnike je oktávou frekvenčný interval v pomere frekvencií 1:2. Pojem je prebraný z hudobníckej terminológie.



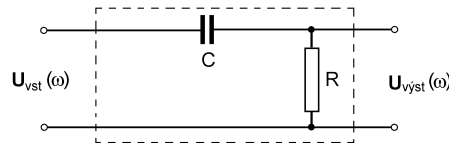
Obr. 9.18

## 9.8.2 Hornofrekvenčný R-C priepust

Hornofrekvenčný R-C priepust vznikne z dolnofrekvenčného výmenou kondenzátora za odpor a naopak. Jeho zapojenie je znázornené na obr. 9.19. Koeficient prenosu takeého filtra je daný výrazom

$$K(\omega) = \frac{U_{\text{výst}}(\omega)}{U_{\text{vst}}(\omega)} = \frac{R}{R - jX_C} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\Omega}{1 + j\Omega} \quad (9.91)$$

kde  $\Omega = \omega RC$  je normovaná frekvencia definovaná v predchádzajúcom odseku. Amplitúdovo-frekvenčné a fázovo-frekvenčné charakteristiky sú dané výrazmi



Obr. 9.19

$$K(\Omega) = \frac{\Omega}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \quad \varphi(\Omega) = \arctg \frac{1}{\Omega} \quad (9.92)$$

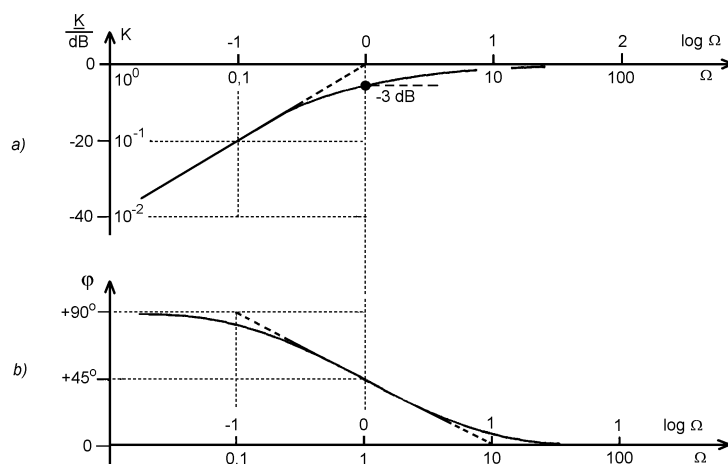
Tieto charakteristiky sú graficky znázornené na obr. 9.20a,b. Vidíme, že:

a) na nízkych frekvenciách pre  $\Omega < 1$  ( $\omega < \omega_{kr}$ ) je asymptotou k logaritmickému priebehu  $\underline{K}$  priamka so smernicou +20 dB/dekádu alebo +6 dB/oktávu, t. j. filter potláča signály v tomto pásme.

b) pri vysokých frekvenciách, pre  $\Omega > 1$  ( $\omega > \omega_{kr}$ ) je asymptotou k amplitúdovo-frekvenčnej charakteristike priamka  $\underline{K} = 0$  dB. Filter je v tomto pásme "priehľadný".

c) Pre  $\omega = \omega_{kr}$  je podobne ako pre dolnofrekvenčný priepust

$$\underline{K} \approx -3 \text{ dB}$$



Obr. 9.20

Priebeh fáze koeficientu prenosu v závislosti od  $\Omega$ , resp. od  $\log \Omega$  je vidno na obr. 9.20b. Pri  $\omega = \omega_{kr}$  je  $\varphi = +\pi/4$  ( $+45^\circ$ ).

Dolnofrekvenčný a hornofrekvenčný priepust majú ešte jednu zaujímavú vlastnosť, že za istých okolností elektricky "diferencujú" alebo "integrujú" prechádzajúci signál. Ukazuje sa, že dolnofrekvenčný priepust v pásme potlačenia signálov ( $\omega \gg \omega_{kr}$ ) pôsobí ako "integračný" obvod, a hornofrekvenčný priepust v pásme jeho potlačenia signálov ( $\omega \ll \omega_{kr}$ ) naopak signál "derivuje". Čitateľ sa môže o tom presvedčiť riešením úlohy 254.

### 9.8.3 Pásmový R-C priepust (Wienov delič)

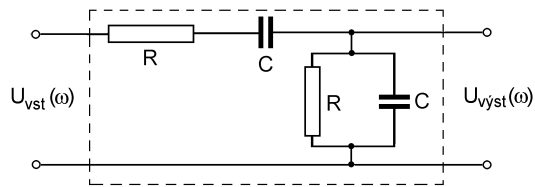
Syntézou dvoch predchádzajúcich priepustov (dolnofrekvenčného a hornofrekvenčného) vznikne **pásmový priepust**. Jeho zapojenie je na obr. 9.21. Na určenie komplexného koeficientu prenosu označme impedanciu sériovej dvojice RC ako

$$Z_s = R - j \frac{1}{\omega C} = \frac{\omega RC - j}{\omega C}$$

a impedanciu paralelnej dvojice RC ako

$$Z_p = \frac{-jRX_C}{R - jX_C} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

Tieto impedancie predstavujú delič pre vstupné napätie, takže koeficient prenosu



Obr. 9.21

$$K(\omega) = \frac{U_{vyst}(\omega)}{U_{vst}(\omega)} = \frac{Z_p}{Z_s + Z_p} = \frac{\omega RC}{3\omega RC + j[(\omega RC)^2 - 1]}$$

Použitím substitúcie  $\Omega = \omega RC$  možno koeficient  $K(\omega)$  vyjadriť v tvare

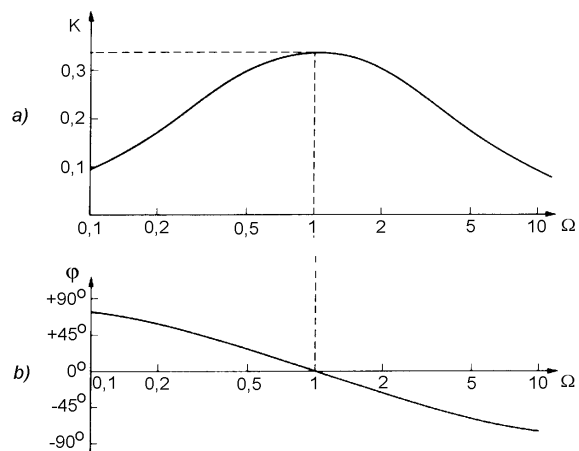
$$K(\Omega) = \frac{1}{3 + j\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)} \quad (9.93)$$

Z výrazu (9.93) plynú pre amplitúdovú a fázovú charakteristiku výrazy

$$K(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)^2}} \quad \varphi(\Omega) = \arctg \frac{1 - \Omega^2}{\Omega} \quad (9.94)$$

a ich grafické zobrazenia sú na obr. 9.22. Z priebehu amplitúdovej charakteristiky vidíme, že má extrém (maximum) pri normovanej frekvencii  $\Omega = 1$  alebo pri frekvencii

$$\omega = \frac{1}{RC}$$



Obr. 9.22

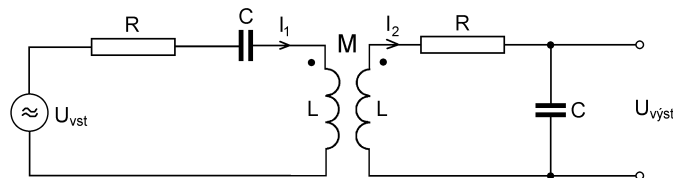
kedy koeficient prenosu má maximum s hodnotou

$$K_{max} = \frac{1}{3}$$

a jeho fáza sa rovná nule ( $\varphi = 0$ ). Obvod sa do istej miery podobá na rezonančný, nejde v ňom však o fyzikálnu rezonanciu, pretože chýbajú dva zásobníky, medzi ktorými by energia mohla vykonávať kmity premenou z potenciálnej (elektrickej) na kinetickú (magnetickú) formu. Obvod sa používa ako selektívny spätnoväzobný prvok v  $RC$ -oscilátoroch. Niekedy sa nazýva Wienov delič, pretože predstavuje frekvenčne závislú časť Wienovho mostu, ktorého vlastnosti sú predmetom analýzy v úlohe 247.

### 9.8.4 Induktívne viazané obvody ako pásmový filter

Vo vysokofrekvenčnej elektronike sa ako pásmový filter často používajú dva induktívne viazané ladené  $RLC$  obvody, ktorých zapojenie je znázornené na obr. 9.23. Oproti jednoduchému rezonančnému obvodu majú viazané obvody výhodu vyššej selektivity, väčšej šírky pásma a väčšej ekvivalentnej kvality. Prvky  $RLC$  v primárnom a sekundárnom obvode môžu byť vo všeobecnosti rôzne, v našej analýze kvôli jednoduchosti však budeme predpokladať, že sú rovnaké. O väzbe medzi obvodmi budeme predpokladať, že je premenná, t. j. že koeficient väzby  $k = M/L$  (pozri odsek 7.5.1) možno meniť, napr. zmenou vzdialenosti cievok. Viazané obvody sú svojím vstupom obyčajne pripojené na výstup nejakého aktívneho prvku (tranzistora, prípadne operačného zosilňovača) a spolu tvoria ladený pásmový zosilňovač. V prípade operačného zosilňovača, ktorého výstupný odpor je malý, možno ho priamo pripojiť k vstupu primárneho sériového  $RLC$  obvodu. V prípade tranzistora, ktorého výstupný odpor je veľký, treba primárny sériový obvod nahradiť paralelným  $RLC$  obodom, tranzistor pripojiť k paralelnej dvojici a uvažovať zdroj ako prúdový. Analýza paralelných induktívne viazaných  $RLC$  obvodov napájaných prúdovým generátorom je však zložitejšia a fyzikálne neprináša nič nového.



Obr. 9.23

Pri analýze obvodu je predmetom záujmu napätie na kondenzátore sekundárneho obvodu  $U_{vyst}$  a pri konštantnej amplitúde vstupného napätia je cieľ zmenou parametrov obvodu (obyčajne zmenou kapacity kondenzátorov) dosiahnuť maximum amplitúdy výstupného napätia. Maximum možno dosiahnuť buď zmenou iba parametrov primárneho obvodu (prvá čiastková rezonancia) alebo zmenou iba parametrov sekundárneho obvodu (druhá čiastková rezonancia). Okrem toho možno naladiť jeden z obvodov a nastaviť väzbu na maximum (zložená rezonancia) alebo naladiť obidva obvody zvlášť pri ich nulovej väzbe, a potom nastaviť väzbu na maximum (úplná rezonancia). Ak sa pri

naladených obvodoch mení frekvencia generátora, potom podľa veľkosti väzby  $k$  výstupné napätie vykazuje jedno maximum pri slabšej väzbe alebo dve maximá pri silnej väzbe. Frekvenčná vzdialenosť maxím rastie s koeficientom väzby.

Vidíme, že aj v takej relatívne jednoduchšej dvojici obvodov ako je na obr. 9.23 vznikajú zložité rezonančné javy, ktorých niektoré stránky posúdime nasledujúcou analýzou. Pre primárny a sekundárny obvod dvojice možno na základe II. Kirchhoffovho zákona napísať obvodové rovnice<sup>1</sup>

$$\left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) I_1 - j\omega M I_2 = U_{vst} \quad (9.95a)$$

$$\left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) I_2 - j\omega M I_1 = 0 \quad (9.95b)$$

Riešením sústavy (9.95) pre prúd  $I_2$  dostaneme výraz

$$I_2 = \frac{j\omega M U_{vst}}{\left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right)^2 + \omega^2 M^2}$$

z ktorého výstupné napätie

$$U_{výst} = -jX_C I_2 = \frac{M}{C} \frac{U_{vst}}{\left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right)^2 + \omega^2 M^2} \quad (9.96)$$

Komplexný koeficient prenosu je potom daný výrazom

$$K(\omega) = \frac{U_{výst}}{U_{vst}} = \frac{M}{C} \frac{1}{\left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right)^2 + \omega^2 M^2} \quad (9.97)$$

Vo výraze (9.97) možno zaviesť niekoľko substitúcií a to: koeficient väzby cievok viazaných obvodov

$$k = \frac{M}{L}$$

rezonančná frekvencia obvodov

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

a tlmenie obvodov definované ako recipročná hodnota ich kvality, teda

<sup>1</sup> Bodky pri svorkách vzájomnej indukčnosti označujú relatívne polaritu na indukčnostiach. Ak v jednej cievke prúd vzrastá v smere od zdroja k označenej bodke ako na obr. 9.23, v druhej cievke je indukované napätie takej polaritu, že svorka označená bodkou je kladná oproti druhej jej svorke.

$$d = \frac{1}{Q_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 RC$$

Výraz (9.97) možno potom prepísať do tvaru

$$\mathbf{K}(\omega) = \frac{k}{d^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 k^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 + j2d\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad (9.98)$$

Pre ďalší postup treba vo výraze (9.98) predovšetkým urobiť niektoré zjednodušenia. Budeme predpokladať, podobne ako u rezonančných obvodov, že k interakcii obvodov dochádza iba v úzkom pásme frekvencií okolo hodnoty  $\omega_0$ , inak povedané, že rezonancia je "ostrá". Ak zavedieme pomerné rozladenie

$$\zeta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

potom za uvedených predpokladov platí, že

$$\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1 \quad \text{a} \quad \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \approx 2\zeta$$

a prenosovú funkciu možno prepísať do tvaru

$$\mathbf{K}(\zeta) = \frac{k}{d^2 + k^2 - 4\zeta^2 + 4jd\zeta} \quad (9.99)$$

Amplitúda koeficientu prenosu alebo amplitúdová charakteristika induktívne viazaných obvodov je

$$K(\zeta) = \frac{k}{\sqrt{(d^2 + k^2 - 4\zeta^2)^2 + 16d^2\zeta^2}} \quad (9.100)$$

Vidíme, že charakteristika závisí od dvoch parametrov  $k$ ,  $d$  a od pomerného rozladenia  $\zeta$ . Preskúmame jej priebeh pre rôzne situácie. Predovšetkým zistíme jej extrémny riešením podmienky  $\frac{dK}{d\zeta} = 0$ . Dostaneme dve rovnice určujúce polohy troch extrémálnych bodov na osi frekvencií:

$$\zeta = 0 \quad \text{a} \quad k^2 - d^2 - 4\zeta^2 = 0$$

Prvá rovnica určuje extrém pri  $\omega = \omega_0$ . Druhá rovnica má dve riešenia

$$\zeta_{1,2} = \mp \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - d^2}$$



ktorým zodpovedajú dve frekvencie extrémov

$$\omega_{1,2} = \omega_0(1 \pm \zeta_{1,2}) = \omega_0 \left( 1 \mp \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - d^2} \right)$$

Môžeme teda zhrnúť, že vo všeobecnosti amplitúdová charakteristika viazaných obvodov má nasledovné tri frekvencie extrémov:

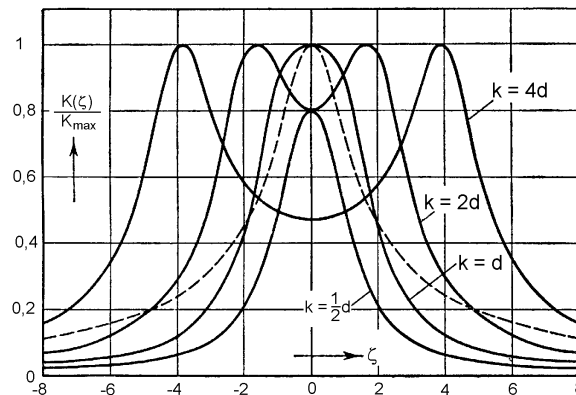
$$\left. \begin{aligned} \omega = \omega_1 &= \omega_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - d^2} \right) \\ \omega = \omega_0 \\ \omega = \omega_2 &= \omega_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - d^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.101)$$

Tri "rezonančné" frekvencie sú najdôležitejšou vlastnosťou viazaných obvodov. Bočné frekvencie  $\omega_{1,2}$  závisia od koeficientu väzby  $k$  (v ďalšom budeme predpokladať, že tlmenie obvodov  $d$  je konštantné). Podľa veľkosti väzby  $k$  môžu nastať tri prípady:

a) **Podkritická väzba**  $k < d$ . V takých prípadoch existuje iba jedna extrémálna frekvencia  $\omega_0$  ( $\zeta = 0$ ), pri ktorej má amplitúdová charakteristika maximum s hodnotou

$$K_{max} = \frac{k}{k^2 + d^2} \quad (9.102)$$

a má podobný priebeh ako rezonančné krivky jednoduchých  $RLC$  obvodov. S rastom  $k$  rastie aj  $K_{max}$  ku svojej kritickej hodnote. Priebeh amplitúdovej charakteristiky je pre podkritickú hodnotu  $k = 0,5d$  znázornený na obr. 9.24. Lepšiu predstavu o priebehoch si možno vytvoriť z priestorovej projekcie takých kriviek na obr. 9.25.



Obr. 9.24

b) **Kritická väzba**  $k = k_{kr} = d$ . V tomto prípade všetky tri frekvencie splývajú, t. j.

$$\omega_1 = \omega_0 = \omega_2 \quad (9.103)$$

Amplitúdová charakteristika má priebeh daný výrazom

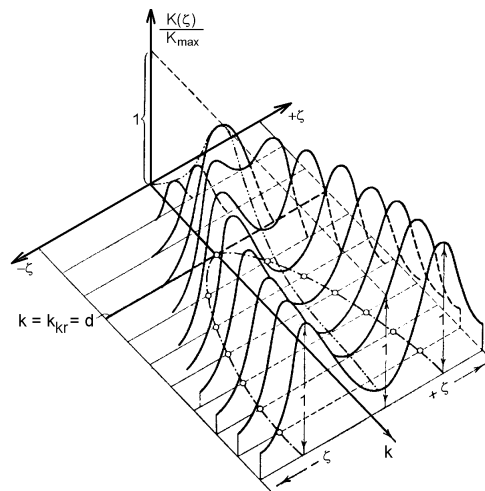
$$K(\zeta) = \frac{d}{2\sqrt{d^4 + 4\zeta^4}} \quad (9.104)$$

a dosahuje absolútne maximum pri  $\zeta = 0$  ( $\omega = \omega_0$ ) s hodnotou

$$K_{max}^{max} = \frac{1}{2d} = \frac{Q_0}{2} \quad (9.105)$$

Priebeh tejto charakteristiky je podobný priebehu rezonančnej krivky jednoduchého *RLC* obvodu (na *obr. 9.24* nakreslenej čiarkovane), avšak je oveľa strmší, teda bližší k ideálnej obdĺžnikovej charakteristike pásmového priepustu. Šírka pásma kriticky viazaných obvodov na úrovni  $1/\sqrt{2}$  maxima charakteristiky je

$$\Delta \omega = \frac{\sqrt{2}\omega_0}{Q_0} = \sqrt{2}\omega_0 d \quad (9.106)$$



Obr. 9.25

teda  $\sqrt{2}$ -krát väčšia ako šírka pásma jednoduchého rezonančného obvodu s rovnakou kvalitou [pozri výraz (9.73)].

c) **Nadkritická väzba  $k > d$ .** V týchto prípadoch stredná frekvencia  $\omega_0$  odpovedá lokálnemu minimu amplitúdovej charakteristiky [o tom sa možno presvedčiť preskúmaním priebehu závislosti (9.100)] a bočné frekvencie maximám ako to vidieť z kriviek na *obr. 9.24* a *9.25*. Frekvenčný odstup maxím je

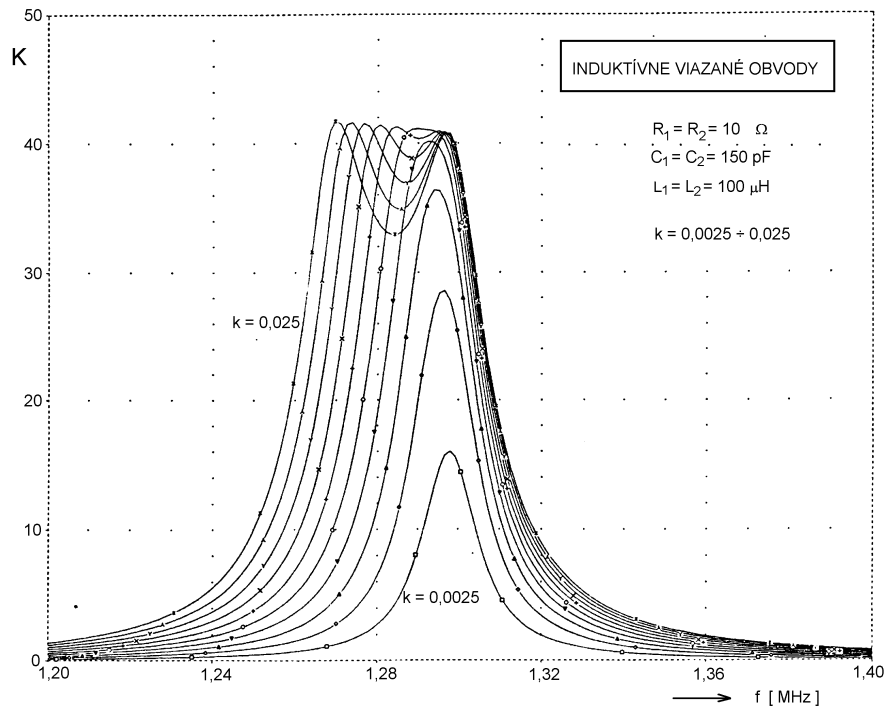
$$\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0 \sqrt{k^2 - d^2} \quad (9.107)$$

a ako vidíme rastie s koeficientom väzby. V bočných maximách má amplitúda koeficientu prenosu rovnaké hodnoty

$$K_{1,2}^{max} = \frac{1}{2d} = \frac{Q_0}{2} \quad (9.108)$$

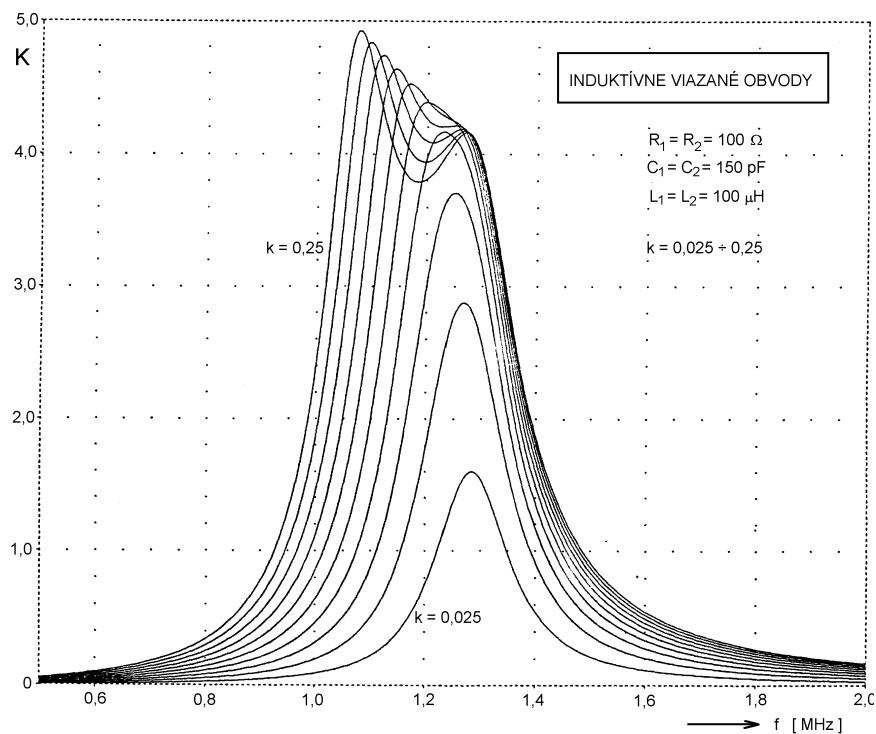
a v strede má minimum s hodnotou

$$K_{min} = \frac{k}{k^2 + d^2} \quad (9.109)$$



Na záver treba povedať, že uvedená približná analýza viazaných obvodov založená na predpoklade vysokých kvalít jednotlivých obvodov v praxi obyčajne úplne postačuje. Dnes, v dobe počítačovej techniky, však nie je problém presne analyzovať koeficient prenosu viazaných obvodov podľa výrazu (9.97), a to ako z hľadiska amplitúdovej, tak aj fázovej charakteristiky. Výsledkom takejto analýzy sú ako príklad na obr. 9.26 a 9.27 zobrazené dve sústavy amplitúdových charakteristík.<sup>1</sup> Na obrázkoch sú zadané číselné parametre obvodov ako aj koeficienty väzby (ako parameter). Obvody sa líšia odporami  $R_1 = R_2 = R$ , v pomere 1:10. Odpor  $R = 10 \ \Omega$  obvodov na obr. 9.26 zodpovedá kvalite  $Q_0 = (\sqrt{L/C})/R \approx 80$ , čo je bežná kvalita obvodov v megahertzovej oblasti, obvody na druhom obrázku s odporami  $R = 100 \ \Omega$  sú už silne tlmené a ich kvalita je iba  $Q \approx 8$ .

<sup>1</sup> Grafické priebehy na obr. 9.26 a 9.27 boli získané simuláciou využitím programu PSPICE fy MicroSim Corporation, Fairbanks, Irvine, Ca 92718.



Obr. 9.27

Pozrime sa, čím sa výsledky presnej analýzy týchto obvodov líšia od výsledkov približnej, a čím sa líšia navzájom! Predovšetkým si na obrázkoch možno všimnúť, že frekvencia  $\omega_0$  obvodov nezostáva pri zmene väzby konštantná, ale sa mení – pri kvalitnejšom obvode menej a pri menej kvalitnom viac. V prípade na obr. 9.26 sa pri zmene koeficientu väzby z hodnoty 0,0025 na hodnotu 0,025 posunie frekvencia z hodnoty cca 1,3 MHz o asi 17 kHz smerom k nižším frekvenciám, čo predstavuje relatívnu zmenu asi o  $-1,3\%$ . Takýto výsledok nás vo väčšine praktických prípadov oprávňuje použiť výsledky približnej analýzy. V druhom obvode na obr. 9.27 pri desaťnásobnej zmene väzby z hodnoty  $k = 0,025$  na hodnotu  $k = 0,25$  posunie sa stredná frekvencia z hodnoty 1,3 MHz o asi 120 kHz smerom k nižším frekvenciám, čo predstavuje značnú relatívnu zmenu asi  $-9\%$ . V praxi treba uvážiť, či sa s takou odchýlkou výsledku približnej analýzy možno ešte uspokojiť. Ďalej si možno všimnúť, že zatiaľ čo približná analýza dáva rovnakú absolútnu hodnotu koeficientu prenosu v bočných maximách [pozri výraz (9.108) a obr. 9.24 prípadne obr. 9.25], pri presnej analýze majú nerovnakú hodnotu a rozdiel rastie s hodnotou odporov obvodov. Na obr. 9.26 je rozdiel pozorovateľný, ale prakticky nemerateľný, na obr. 9.27  $k = 0,25$  činí rozdiel maxima a minima cca 1,4 dB. Z porovnania grafov na obidvoch obrázkoch vidieť, že hodnoty koeficientu prenosu sú nepriamo úmerné hodnotám odporov  $R$ , čo plynie aj z výrazu (9.97). V konkrétnych prípadoch na obr. 9.26 a 9.27 je  $R$  v pomere 1:10 a  $K$  sa redukuje približne 10:1.

Induktívne viazané obvody sa používajú najmä vo vysokofrekvenčných častiach rôznych telekomunikačných zariadení, ako sú rádiové a televízne vysielače a prijímače, a v meracích zariadeniach vysokofrekvenčnej elektroniky. Dnes sa často nahrádzajú keramickými filtermi.

## Úlohy 231 – 276

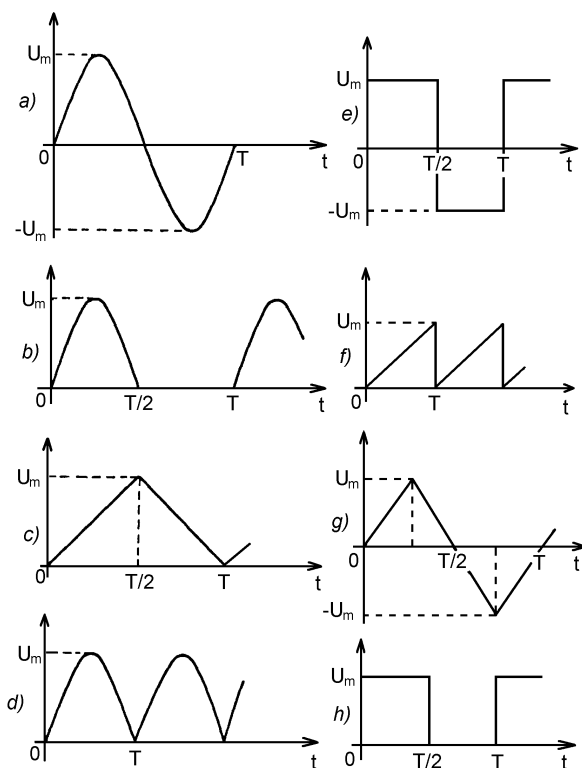
231. Stredná hodnota periodickej funkcie  $v(t)$  s periódou  $T$  je daná výrazom

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$$

a efektívna (stredná kvadratická) hodnota je daná výrazom

$$u_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

Vypočítajte stredné a efektívne hodnoty funkcií zobrazených na obr. 231.



Obr. 231

232. Rozhodnite, z ktorých dvoch elementov pozostáva sériový obvod, v ktorom prúd a napätie sú dané časovými závislosťami

$$\begin{aligned} u &= 150 \sin(500t + 10^\circ) & [\text{V}] \\ i &= 13,42 \sin(500t - 53,4^\circ) & [\text{A}] \end{aligned}$$

Vypočítajte hodnoty týchto elementov.

233. V sériovom  $RLC$  obvode prúd a napätie sú dané vzťahmi

$$i = 12,5 \cos(3000t - 45^\circ) \quad [\text{A}]$$

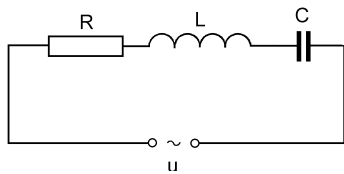
$$u = 353,5 \cos(3000t) \quad [\text{V}]$$

Indukčnosť v obvode má hodnotu 10 mH. Vypočítajte hodnoty odporu a kapacity.

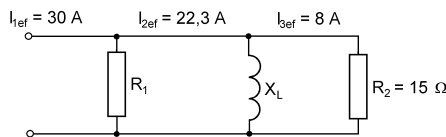
234. Ak je k sériovému  $RLC$  obvodu na obr. 234 pripojené striedavé napätie  $u_1 = 100 \cos(1000t)$  V, potom amplitúda prúdu v obvode je 5 A. V prípade, že k obvodu je pripojené napätie  $u_2 = 80 \cos(500t)$  V, potom stredný výkon v odpore  $R$  je 200 W a účinník sa rovná jednej. Vypočítajte hodnoty odporu, indukčnosti a kapacity.

235. V zapojení podľa obr. 235 vypočítajte:

- efektívnu hodnotu napätia na vstupných svorkách,
- hodnotu odporu  $R$  a reaktancie  $X$ ,
- celkový činný výkon v obvode,
- komplexnú impedanciu obvodu.



Obr. 234

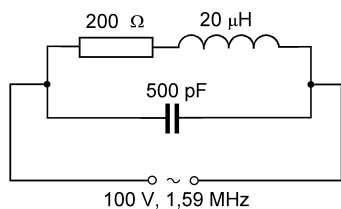


Obr. 235

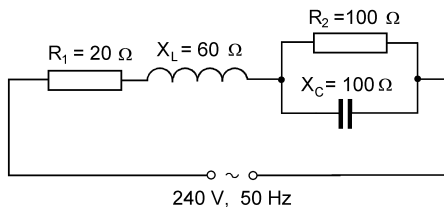
236. Určite amplitúdu prúdu dodávaného zdrojom do obvodu podľa obr. 236. Zdroj má efektívne napätie 100 V s frekvenciou 1,59 MHz.

237. V obvode na obr. 237 vypočítajte:

- efektívnu hodnotu prúdu dodávaného zdrojom,
- maximálny náboj na kondenzátore (jeho amplitúdu),
- celkový činný výkon v obvode.



Obr. 236



Obr. 237

238. Odpor  $R = 10 \text{ k}\Omega$  a kondenzátor  $C = 0,2 \text{ }\mu\text{F}$  sú spojené v sérii a pripojené na zdroj striedavého efektívneho napätia 220 V s frekvenciou 50 Hz. Vypočítajte:

- impedanciu obvodu,
- efektívnu hodnotu prúdu dodávaného zdrojom,
- činný výkon v obvode,
- efektívne hodnoty napätí na odpore a kondenzátore.

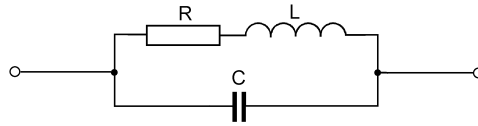
Vypočítajte veličiny podľa bodov a), b), c) pre paralelné spojenie daných elementov. Určite efektívne hodnoty prúdov v odpore a kondenzátore.

239. Čierna skrinka má dve svorky. Ak sa na svorky pripojí jednosmerné napätie 100 V, potom v obvode tečie prúd 0,01 A. Pri pripojení sieťového efektívneho napätia (220 V, 50 Hz)

tečie v obvode efektívny prúd 2 A. Ak sa amplitúda napätia udržiava konštantnou a mení sa frekvencia, pri  $f_0 = 1$  kHz má amplitúda prúdu maximum. Čo obsahuje skrinka?

**240.** Priestor medzi kruhovými elektródami doskového kondenzátora je vyplnený slabovo vodivým dielektrikom s mernou vodivosťou  $\sigma$  a permitivitou  $\epsilon$ . Nájdite intenzitu magnetického poľa v kondenzátore, ak intenzita elektrického poľa medzi doskami je

$$E = E_m \cos \omega t$$



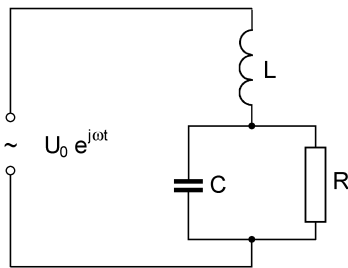
Obr. 241

**241.** Kondenzátor je vyplnený dielektrikom s relatívnou permitivitou

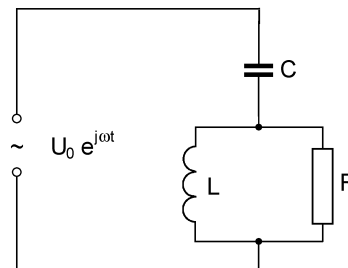
$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\gamma)}$$

(ionizovaný plyn, plazma,  $\omega_p$  je plazmová frekvencia). Kapacita nevyplneného kondenzátora je  $C_0$ . Dokážte, že impedancia takého kondenzátora je rovnaká ako impedancia dvojpoľu podľa obr. 241, ak sa jeho prvky vyberú zodpovedajúcim spôsobom. Vypočítajte hodnoty  $R$ ,  $L$ ,  $C$ .

**242.** Je daný obvod podľa obr. 242. Vypočítajte prúd odporom, ak  $\omega L = 1/\omega C$ . Obvod si dal patentovať ako jednoduchý stabilizátor striedavého prúdu americký elektrotechnik Charles Steinmetz (1865 – 1923).



Obr. 242



Obr. 243

**243.** Je daný obvod podľa obr. 243. Vypočítajte prúd odporom, ak  $\omega L = 1/\omega C$ .

**244.** Principiálne zapojenie reproduktorových sústav pre Hi-Fi zosilňovače je znázornené na obr. 244. Aktívny odpor každého reproduktora je  $R$ .

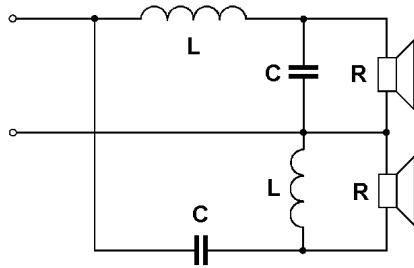
a) Ukážte, že impedancia na vstupných svorkách je reálna pri frekvencii

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

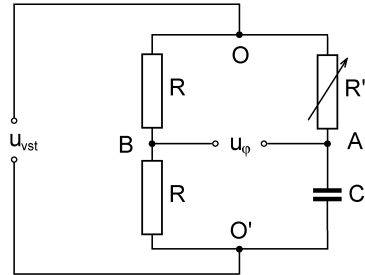
b) Ako treba zvoliť pomer  $L/C$ , aby vstupný odpor pri frekvencii  $\omega_0$  bol rovný práve hodnote  $R$ ?

c) Ako sa v tomto prípade delí vstupný výkon medzi jednotlivými reproduktormi?

245. V obvodovej elektronike niekedy treba posúvať fázu napätia, ktorého amplitúda musí pritom zostať konštantná. Na nízkych frekvenciách takému účelu slúži fázový posúvač na obr. 245. Dokážte, že ak je na vstup fázového posúvača pripojené striedavé napätie s amplitúdou  $U_0$ , potom pri zmene odporu  $R'$  od nuly do nekonečna zostáva amplitúda výstupného napätia  $u$  konštantná a rovná  $U_0/2$  a fáza sa oproti vstupnému napätiu mení v intervale od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ .



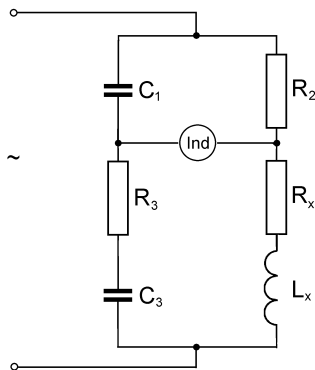
Obr. 244



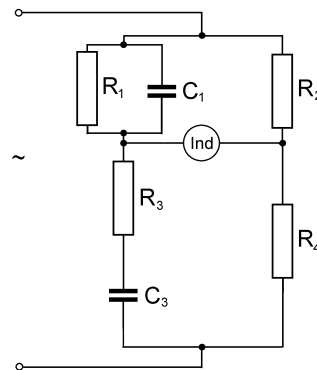
Obr. 245

246. Zapojenie na obr. 246 je Owenov most, vhodný na meranie indukčností a odporov cievok. Zistite aké vzťahy musia platiť medzi elementmi mostu, aby bol vyvážený, t. j. aby prúd indikátorom bol nulový. Závisí vyváženie mostu od frekvencie napájacieho napätia?

247. Na meranie nízkych frekvencií a tiež ako selektívny spätnoväzobný prvok v RC-generátoroch sa používa Wienov most podľa obr. 247. Nájdite podmienky rovnováhy tohoto mostu. Aké sú podmienky rovnováhy, ak  $R_1 = R_3 = R$ ,  $C_1 = C_3 = C$ ,  $R_2 = R_4/2 = R_0$ ?



Obr. 246

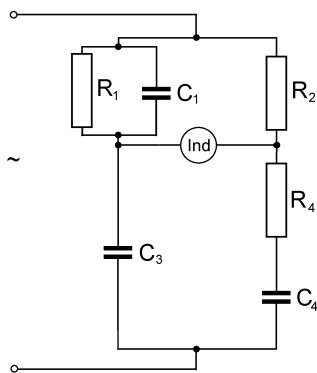


Obr. 247

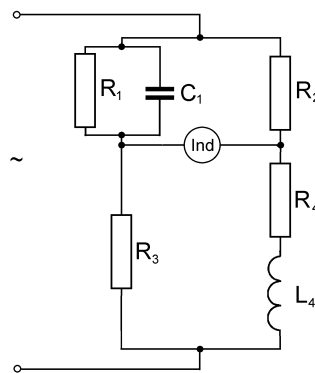
248. Na meranie kapacít a dielektrických vlastností materiálov sa používa Scheringov most v zapojení podľa obr. 248. Nájdite podmienky rovnováhy tohoto mostu. Závisí rovnováha mostu od frekvencie napájacieho napätia?

249. Na meranie indukčností a odporov cievok sa používa aj Maxwellov most, ktorého zapojenie je na obr. 249. Nájdite podmienky rovnováhy mostu. Je tento most frekvenčne závislý?



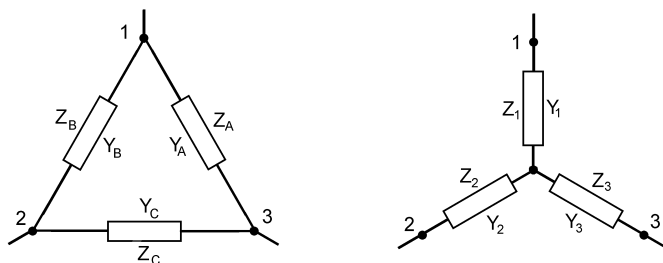


Obr. 248



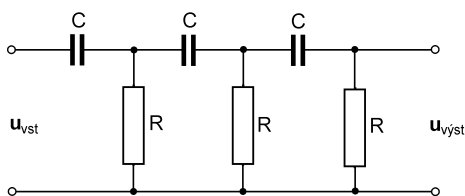
Obr. 249

250. Pri analýze elektrických sietí je niekedy užitočné urobiť transformáciu "trojuholníkového" zapojenia impedancií na "trojčipú hviezdu" impedancií a naopak. Takáto transformácia časti elektrickej siete je znázornená na obr. 250. Hodnoty elementov vo hviezde a trojuholníku možno vybrať tak, že obidva obvody budú elektricky ekvivalentné, t. j. ich impedancie, resp. admittancie z ľubovoľnej strany budú rovnaké. Nájdite vzťahy medzi  $Z_1, Z_2, Z_3$  a  $Z_A, Z_B, Z_C$ , pre identické vlastnosti oboch zapojení.



Obr. 250

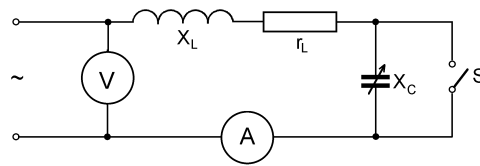
251. V generátoroch nízkych frekvencií sa na otočenie fázy napätia o  $180^\circ$  používa zapojenie podľa obr. 251. Dokážte, že v takomto zapojení pri frekvencii  $\omega = \frac{1}{\sqrt{6RC}}$  je  $U_{vyst} = -\frac{1}{29}U_{vst}$ .



Obr. 251

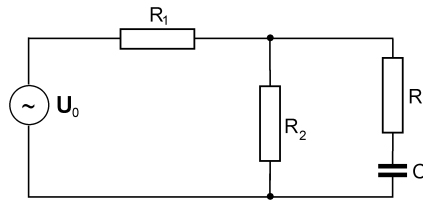
252. Na meranie parametrov cievok ( $r_L, X_L$ ) môže slúžiť obvod podľa obr. 252. Kapacita  $C$  v obvode sa pri meraní nastaví tak, aby efektívna hodnota prúdu v obvode bola rovnaká pri zopnutom a rozopnutom spínači  $S$ . Vypočítajte ohmický odpor indukčnosti  $r_L$  a jej reaktanciu  $X_L$ ,

ak pri efektívnom napätí 220 V a reaktancii kondenzátora  $X_C = 48 \Omega$  bola efektívna hodnota prúdu v obvode pri rozopnutom a zopnutom spínači 5,6 A.



Obr. 252

253. V zapojení na obr. 253 treba vypočítať komplexné amplitúdy (fázory) prúdov v jednotlivých odporoch. Hodnoty jednotlivých elementov sú:  $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega$ ,  $C = 3,183 \mu\text{F}$ . Zdroj má amplitúdu napätia  $U_0 = 10 e^{j0} \text{ V}$  a frekvenciu  $f = 50 \text{ kHz}$ . Aký je fázový posuv medzi prúdmi v odporoch  $R_2$  a  $R_3$ ?



Obr. 253

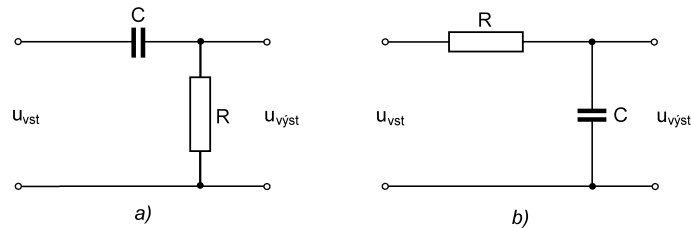
254. Obvod na obr. 254a sa za istých podmienok správa ako "derivačný", t. j. jeho výstupné napätie je úmerné časovej derivácii vstupného napätia. Podobne obvod na obr. 254b sa správa ako "integračný". Zistíte za akých podmienok platí (v prvom prípade)

$$u_{\text{výst}} \sim \frac{d}{dt} u_{\text{vst}}$$

resp. (v druhom prípade)

$$u_{\text{výst}} \sim \int u_{\text{vst}} dt$$

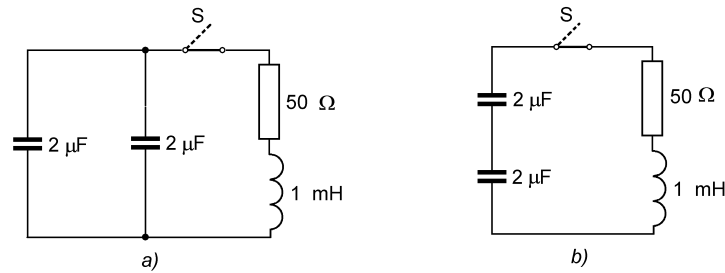
Nech  $u_{\text{vst}} = U_0 \cos \omega t$ . Ako voliť hodnoty  $R$  a  $C$  v obvodoch, aby výstupné napätie bolo úmerné derivácii (integrálu) vstupného napätia?



Obr. 254

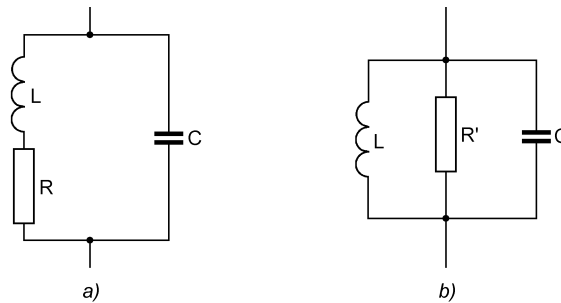
255. Rezonančný obvod kmitá bez tlmenia na frekvencii  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . O koľko sa zmení rezonančná frekvencia (v percentách), ak sa obvod zatlmí sériovým odporom, ktorého veľkosť je taká, že obvod má kvalitu 200?

256. Zistíte, v ktorom z obvodov na obr. 256a,b môžu po zapnutí spínača vzniknúť tlmené kmity.



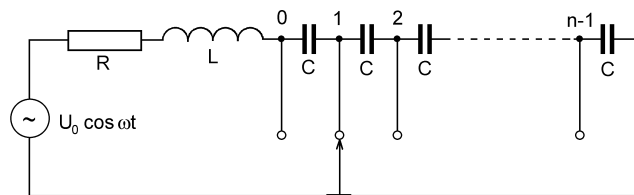
Obr. 256

257. Na obr. 257a,b sú dva rezonančné obvody  $RLC$  a  $R'LC$ . Odpor  $R$  je taký malý, že  $R \ll \omega_0 L$ , kde  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Ako treba voliť odpor  $R'$ , aby obidva obvody boli v okolí rezonancie ekvivalentné?



Obr. 257

258. V elektrickom zapojení na obr. 258 možno k sériovej dvojici  $RL$  pripájať prepínačom sériovo radené kondenzátory  $C$ .

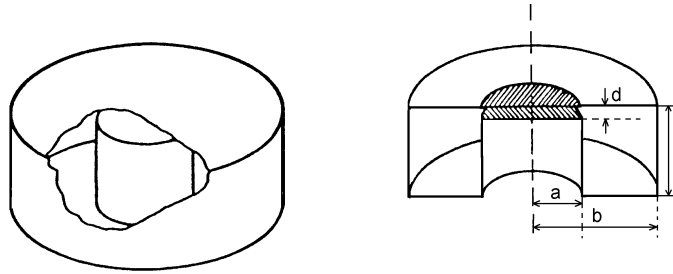


Obr. 258

- Nájdite stredný výkon v odpore  $R$ , ak je prepínač v ľubovoľnej polohe  $m$  ( $0 < m < n$ ).
- Nech  $R = 1\,000\ \Omega$ ,  $L = 10\ \text{H}$ ,  $C = 20\ \mu\text{F}$ ,  $\omega = 100\ \text{rad/s}$ . Pre akú hodnotu  $m$  je stredný výkon v odpore maximálny?
- Aká je amplitúda napätia na sériovej dvojici  $RL$ , ak je prepínač v polohe 2 a  $U_0 = 100\ \text{V}$ ? Aká je amplitúda napätia na odpore?

259. Rezonančná dutina na obr. 259 je podstatnou časťou generátora veľmi vysokých frekvencií – klystrónu. Takúto dutinu možno považovať za paralelný  $LC$  obvod. Jeho indukčnosť tvorí toroid s jedným závitom (cylindrická časť dutiny) a paralelné plochy uzatvárajúce toroid (vyšrafovaná časť) predstavujú kapacitu obvodu. Nájdite výraz pre rezonančnú frekvenciu dutiny,

príčom predpokladajte, že steny dutiny sú ideálne vodivé! Riešte numericky pre  $a = 1 \text{ cm}$ ,  $b = 2 \text{ cm}$ ,  $h = 1 \text{ cm}$ ,  $d = 1 \text{ mm}$ . V dutine je vákuum.

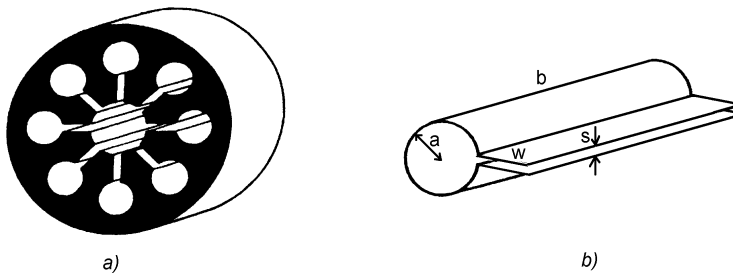


Obr. 259

**260.** Podstatnou časťou magnetrónu (generátora veľmi vysokých frekvencií) je masívny anódový blok (obr. 260a) s vyfrézovanými rezonančnými dutinami, z ktorých jedna je zobrazená na obr. 260b. Dutinu možno považovať za paralelný rezonančný LC obvod, ktorého indukčnosť je tvorená valcovou časťou a kapacitu predstavujú paralelné rovinné plochy. Rezonančná frekvencia dutiny je v prvom priblížení frekvenciou, na ktorej magnetrón kmitá, pričom počet dutín len málo ovplyvňuje výslednú frekvenciu.

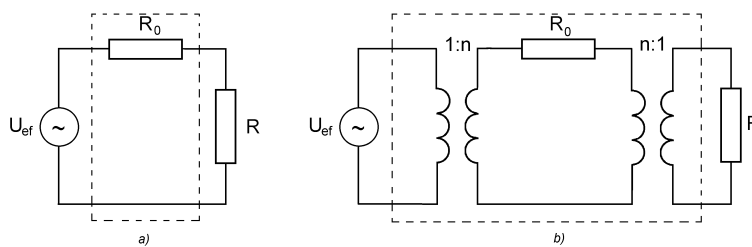
a) Vypočítajte rezonančnú frekvenciu dutiny za predpokladu, že  $b \gg a$  a  $s \ll w$ .

b) Prvý magnetrón vyrobený v USA počas druhej svetovej vojny pre radarové účely mal parametre:  $a = 3 \text{ mm}$ ,  $s = 1 \text{ mm}$ ,  $w = 3 \text{ mm}$ . Vypočítajte číselne rezonančnú frekvenciu a vlnovú dĺžku kmitov magnetrónu. V dutine je vákuum.



Obr. 260

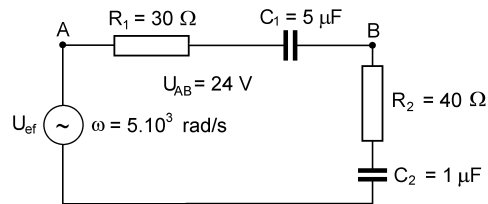
**261.** Pri prenose veľkých elektrických výkonov na diaľku sa primárne napätie elektrárne najprv transformuje na vysoké napätie (rádovo stovky kilovoltov) a na strane spotrebiteľa sa znovu



Obr. 261

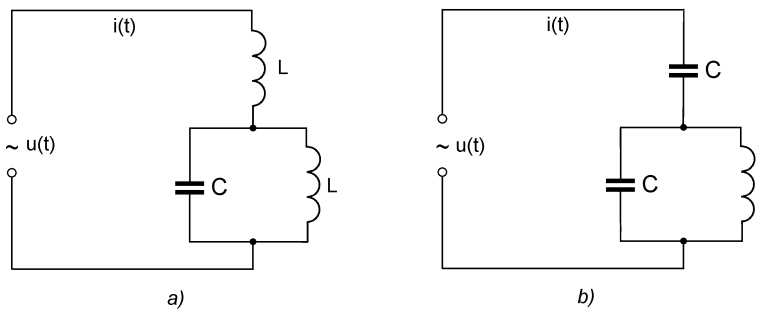
transformuje na nízke napätie (napr. 220 V). Táto transformácia sa robí kvôli zníženiu tepelných (ohmických) strát vo vedení. Na obr. 261a je obvod, v ktorom generátor a spotrebič  $R$  sú priamo spojené vedením o celkovom odpore  $R_0$ . Na obr. 261b je spojenie generátor – spotrebič urobené ideálnymi transformátormi s prevodom  $1 : n$  a  $n : 1$ , pričom samotné vedenie má ten istý odpor  $R_0$ . Vypočítajte pomer celkového prenášaného výkonu k tepelným stratám v prvom a druhom prípade.

**262.** V obvode na obr. 262 nájdite efektívnu hodnotu napätia zdroja  $U_{ef}$ , ak na sériovej dvojici  $R_1 C_1$  bolo namerané efektívne napätie  $U = 24$  V.



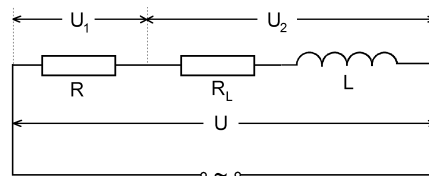
Obr. 262

**263.** V obvodoch podľa obr. 263a,b nájdite časovú závislosť prúdu  $i(t)$ , ak  $u(t) = U_0 \cos \omega t$ .



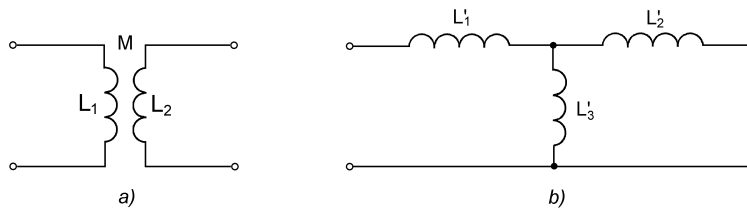
Obr. 263

**264.** Cievka a známy odpor  $R$  sú spojené v sérii (obr. 264) a pripojené na zdroj striedavého napätia s efektívnou hodnotou  $U$ . Na odpore bolo namerané efektívne napätie  $U_1$  a na cievke  $U_2$ . Vypočítajte stredný výkon na cievke (na jej činnom odpore).



Obr. 264

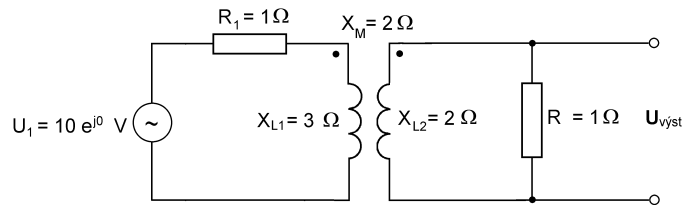
**265.** Viazané obvody na obr. 265a sa pre výpočtové účely dajú nahradiť zapojením podľa obr. 265b. Ako treba voliť hodnoty indukčností  $L'_1, L'_2$  a  $L'_3$ , aby obvody boli elektricky ekvivalentné?



Obr. 265

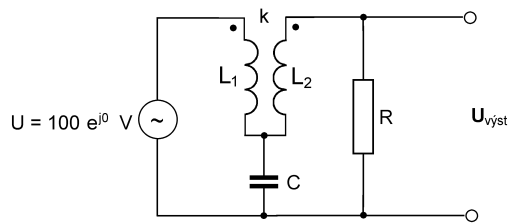
- 266.** Dve cievky s indukčnosťami  $L_1$  a  $L_2$  majú vzájomnú indukčnosť  $M$ .
- Vypočítajte dve možné hodnoty indukčnosti cievok spojených do série.
  - Vypočítajte dve možné hodnoty indukčnosti, ak sú cievky spojené paralelne.
  - Aká indukčnosť je medzi svorkami každej cievky, ak je druhá cievka skratovaná?
- Riešte číselne pre  $L_1 = 6 \text{ H}$ ,  $L_2 = 4 \text{ H}$ ,  $M = 3 \text{ H}$ .

- 267.** V zapojení na obr. 267 nájdite amplitúdu a fázu výstupného napätia.



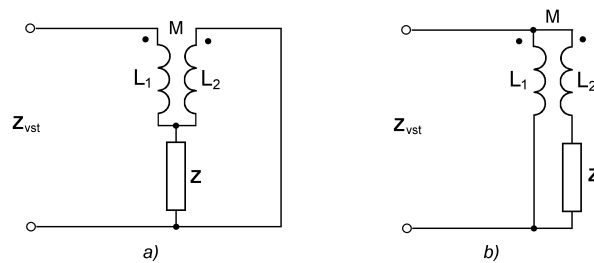
Obr. 267

- 268.** V obvode na obr. 268 nájdite amplitúdu a fázový posuv výstupného napätia. Riešte pre číselné hodnoty  $R = 1 \Omega$ ,  $X_C = 8 \Omega$ ,  $X_{L1} = 16 \Omega$ ,  $X_{L2} = 4 \Omega$ ,  $k = 1/2$ .



Obr. 268

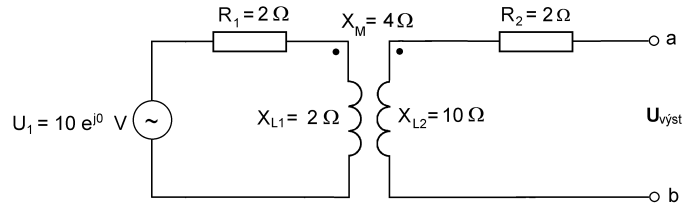
- 269.** Vypočítajte vstupnú impedanciu obvodov na obr. 269a, b pri frekvencii  $\omega$ .



Obr. 269

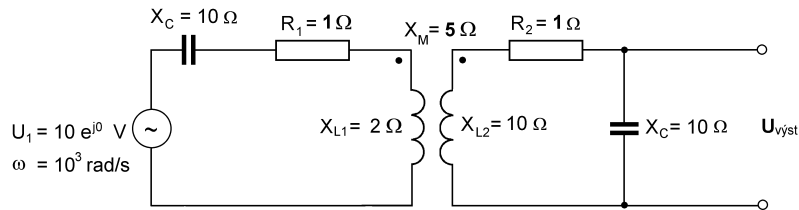
270. Pre obvod podľa obr. 270 nájdite:

- a) Výstupné napätie (amplitúdu a fázový posuv) medzi svorkami  $a-b$ .  
 b) Prúd, ktorý tečie sekundárnym obvodom ak svorky  $a-b$  sú skratované.



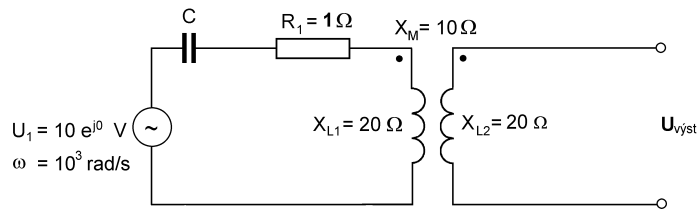
Obr. 270

271. V zapojení na obr. 271 nájdite amplitúdu a fázový posuv výstupného napätia.



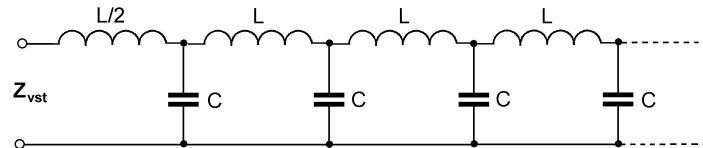
Obr. 271

272. a) V obvode na obr. 272 nájdite takú hodnotu  $C$ , pri ktorej výsledná reaktancia primárneho obvodu bude nulová (sériová rezonancia). b) Pre túto hodnotu  $C$  nájdite amplitúdu a fázový posuv výstupného napätia. Ukážte, že amplitúda výstupného napätia je maximálna pri zvolenej hodnote  $C$ .



Obr. 272

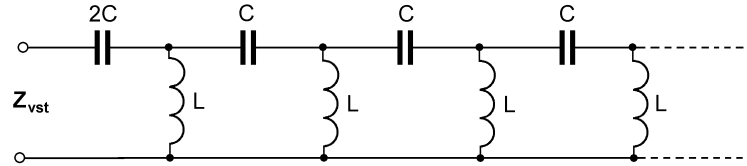
273. Vypočítajte vstupnú impedanciu nekonečného LC reťazca podľa obr. 273 (použite postup uvedený v úlohe 118). Vstupná impedancia zapojenia na obrázku môže byť reálna alebo imaginárna. V akom pásme frekvencií je táto impedancia reálna?



Obr. 273

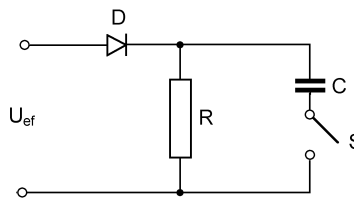
Reálna impedancia (ohmický odpor) pripojená k zdroju napätia odoberá zo zdroja energiu, ktorá sa v prípade zapojenia zostaveného z čisto reaktančných prvkov nemôže meniť na teplo, ale iba postupovať pozdĺž nekonečného reťazca (nekonečný reťazec sa môže nahradiť konečným, ak sa na jeho výstup pripojí vhodný tzv. charakteristický odpor). Reťazec sa teda správa ako frekvenčný filter – prepustí signály s frekvenciou, pre ktorú je vstupná impedancia reálna a zadrží signály s frekvenciou, pre ktorú vstupná impedancia reťazca je imaginárna. V akom pásme frekvencií je uvedený filter "priehľadný"? Opísané zapojenie predstavuje oneskorovacie vedenie, často používané v impulzovej technike.

274. Podobne ako v úlohe 273 analyzujte nekonečný reťazec, ktorého zapojenie je na obr. 274.



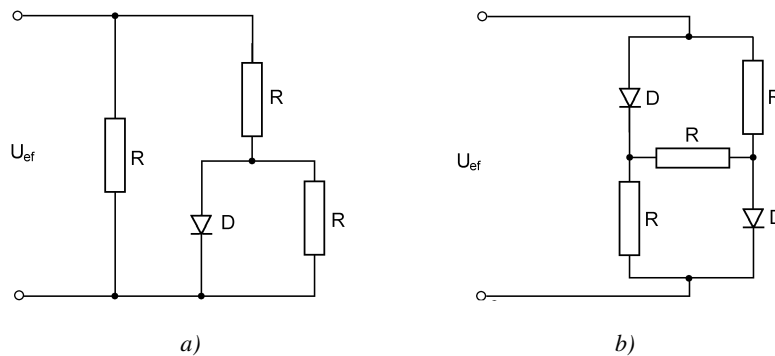
Obr. 274

275. Usmerňovač s ideálnou diódou (ideálna dióda je v priepustnom smere dokonale vodivá a v závernom smere dokonale nevodivá) je pripojený na zdroj striedavého napätia  $U_{ef}$  s frekvenciou  $f$  podľa obr. 275. Koľkokrát sa zmení stredný výkon v odpore  $R$ , ak sa zopne spínač  $S$ , keď je známe, že za jednu periódu napätie na kondenzátore zostáva prakticky konštantné? V akom vzťahu musia byť  $R$ ,  $C$  a  $f$ ?



Obr. 275

276. V obvodech na obr. 276a,b vypočítajte stredný výkon. Diódy sú ideálne.



Obr. 276