

1. Zväzok protónov prelieta cez oblasť skríženého elektrického a magnetického poľa. Vektor intenzity pôsobiaceho elektrického poľa je $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$ a indukcie magnetického poľa $\mathbf{B} = (0, B_y, 0)$. Aká musí byť rýchlosť (veľkosť aj smer) prelietajúcich protónov aby sa pôsobením polí ich rýchlosť vôbec nezmenila?

Riešenie:

Pôsobenie elektrickej aj magnetickej sily na nabitú časticu je určené všeobecným vyjadrením Lorentzovej sily v tvare

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.1)$$

kde q je náboj, v rýchlosť častice. Zložku sily ktorou pôsobí zadané elektrické pole na kladne nabitú časticu preto vyjadríme v pravouhlej sústave ako

$$\vec{F}_{(elek)} = (+e)\vec{E} = eE_x \vec{i} + 0 \vec{j} + 0 \vec{k} \quad (1.2)$$

a zložku vyvolanú pôsobením magnetického poľa na pohybujúce náboje (protóny) ako

$$\vec{F}_{(mag)} = (+e)\vec{v} \times \vec{B} = e \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = e(v_x B_y \vec{k} - v_z B_y \vec{i}) \quad (1.3)$$

Celková sila pôsobiaca na pohybujúce sa elektróny je

$$\vec{F}_c = e[(E_x - v_z B_y)\vec{i} + v_x B_y \vec{k}] \quad (1.4)$$

Ak aplikované polia nemajú ovplyvniť rýchlosť pohybu častice, t.j. nesmú zmeniť smer jej pohybu ani ju spomaliť resp. zrýchliť, potom celková pôsobiaca sila musí byť nulová. Aby bol vektor výslednej sily nulový, musia byť nulové aj jeho zložky, čo vyjadríme ako

$$\begin{aligned} \text{zložka v smere } \vec{i} : & \quad E_x - v_z B_y = 0 \\ \text{zložka v smere } \vec{j} : & \quad 0 = 0 \\ \text{zložka v smere } \vec{k} : & \quad v_x B_y = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Z rovníc (1.5) dostávame riešenie

$$\begin{aligned} v_z &= \frac{E_x}{B_y} \\ v_y &\text{ môže byť ľubovoľná} \\ v_x &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Z riešenia (1.6) je zrejmé, že protóny sa musia pohybovať v rovine rovnobežnej s rovinou y-z, a presne určená je len z-ová zložka ich rýchlosti. Zapísané v zložkovom tvare

$$\vec{v} = \left(0, v_y, \frac{E_x}{B_y} \right) \quad (1.7)$$

Na princípe dvoch kolmých polí, ktoré sú súčasne kolmé aj na rýchlosť častice, čo je špeciálny prípad riešenia (1.7) pre $v_y = 0$, sa zakladá činnosť rýchlostných selektorov napr. v Bainbridgeovom hmotnostnom spektrografe, ktorým prejdú bez zmeny pohybového stavu len častice s určenou rýchlosťou (ostatné sú odklonené mimo zväzok).

2. Tri kruhové závitov majú spoločný stred totožný so stredom zvolenej súradnicovej sústavy. Prvý závit leží v rovine x-y má polomer R a preteká ním prúd I . Druhý závit má polomer o 20 % väčší ako prvý, leží v rovine x-z a tečie ním prúd 2 krát väčší ako v prvom. Tretí závit leží v rovine y-z, jeho polomer je súčtom polomerov prvých dvoch závitov a tečie ním prúd 3 krát väčší ako v druhom závite. Vo všetkých troch závitoch je orientácia prúdu kladná (proti smeru hodinových ručičiek) ak sa na nich pozeráme z prvého oktantu (súradnicového systému). Určte vektor indukcie magnetického poľa a jeho absolútnu hodnotu v strede závitov. Permeabilitu prostredia považujte za μ_0 . (2,5 bodu)

Riešenie:

Začneme prvým závitom. Indukciu v jeho strede sme už mnohokrát počítali a pamätáme sa, že jej absolútna hodnota je

$$B = \mu_0 \frac{I}{2R} \quad (2.1)$$

kde I je prúd závitom a R jeho polomer. Pretože prvý závit leží v rovine, smer ním vyvolanej indukcie bude pozdĺž smeru osi z. Presný smer určíme zo smeru vektorového súčinu vystupujúceho v Biot-Savartovom zákone ktorého výsledkom je aj (2.1) alebo pomocou pravej ruky a v našom konkrétnom prípade je to kladný smer osi z t.j.

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{I}{2R} \vec{k} \quad (2.2)$$

Poloha druhého závitu determinuje indukciu v jeho strede pozdĺž osi y s presným výsledkom

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \frac{2I}{2(1,2R)} \vec{j} \quad (2.3)$$

kde dvojka v čitateli a 1,2 v menovateli súvisia s prúdom a veľkosťou závitu podľa zadania. Úplne analogicky určíme aj indukciu od tretieho závitu ako

$$\vec{B}_3 = \mu_0 \frac{3(2I)}{2(R+1,2R)} \vec{i} \quad (2.4)$$

kde opäť faktor 3 v čitateli zodpovedá uvádzanému prúdu v závite a súčet v menovateli polomeru závitu. Výsledná indukcie v strede všetkých troch závitov je

$$\vec{B}_c = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = \mu_0 \frac{I}{2R} \vec{k} + \mu_0 \frac{2I}{2(1,2R)} \vec{j} + \mu_0 \frac{3(2I)}{2(R+1,2R)} \vec{i} = \mu_0 \frac{I}{2R} \left(\frac{30}{11} \vec{i} + \frac{5}{3} \vec{j} + \vec{k} \right) \quad (2.5)$$

a smeruje práve do prvého oktantu použitej sústavy. Jej absolútnu hodnotu určíme ako absolútnu hodnotu súčtu vektorov (alebo zložiek výsledného vektora) ako

$$|\vec{B}_c| = \sqrt{|\vec{B}_1|^2 + |\vec{B}_2|^2 + |\vec{B}_3|^2} = \mu_0 \frac{I}{2R} \sqrt{\left(\frac{30}{11}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 1} \quad (2.6)$$

3. Aj keď sa Slnko bežným okom zdá byť pokojnou a bežnou hviezdou hlavnej postupnosti, na jeho povrchu prebiehajú zložité a často pre ľudskú civilizáciu aj potenciálne nebezpečné procesy. Výtrysk koronálnej hmoty (Coronal Mass Ejection) je dej, pri ktorom sa z koróny Slnka uvoľní mrak plazmy (ionizovaného vodíka) a letí veľkou rýchlosťou do medziplanetárneho priestoru. Pre nás sú nebezpečné len prípady, keď sa tento mrak pohybuje smerom do blízkosti Zeme. Pre zjednodušenie uvažujme, že uvoľnená hmota je z 1 % ionizovaný vodík (stotina hmoty sú protóny a zvyšok neutrálne atómy vodíka) s celkovou hmotnosťou $m = 1,5 \times 10^{12}$ kg. Doba (trvanie) počas ktorej k tomuto výronu došlo bola $T = 5$ hodín. Nech rýchlosť mračna je $v = 600$ km/s a nech sa všetky jeho častice sa pohybujú jedným smerom v úzkom, cigare podobnom zväzku. Ak tento zväzok prelieta vo vzdialenosti 2x väčšej ako je vzdialenosť Zem –

Mesiac ($d = 380\,000\text{ km}$) a Mesiac je uprostred, akú najväčšiu indukciu poľa vyvolá na Mesiaci? Na Zemi sa prelet mraku prejaví zmenami nazývanými „magnetická búrka“. Pri nej sa rýchlo mení hodnota aj smer magnetického poľa. Nech pri „magnetickej búrke“ dôjde k rovnomernej zmene vertikálnej zložky magnetického poľa o $\Delta B = 100\text{ nT}$ v priebehu $\tau = 15\text{ sekúnd}$. Určte aké maximálne napätie sa pritom indukuje v sústave elektrického vedenia trasovaného pozdĺž hraníc Slovenska (aproximujte obdĺžnikom s dĺžkou $a = 400\text{ km}$ a šírkou $b = 120\text{ km}$. Využite všetky zmysluplné zanedbania. Hmotnosť atómu vodíka aj protónu považujte za rovnakú (m_p). Numerické hodnoty nedosadzujte, sú len ilustračné aj keď realistické a vhodné pre posúdenie uvažovaných zanedbaní. (3 body)

Riešenie:

Najskôr určíme aký veľký náboj a prúd pohybujúci sa mrak predstavuje. Celkový počet protónov vypočítame ako podiel hmotnosti vyvrhutej hmotnosti a hmotnosti protónu, t.j.

$$N = \frac{m}{m_p} = \frac{1.5 \times 10^{12} [kg]}{1.7 \times 10^{-27} [kg]} \doteq 8,8 \times 10^{38} \tag{3.1}$$

Pretože ionizácia tohto mraku je podľa zadania len stotinová, jeho náboj bude

$$Q = \frac{N}{100} e = \frac{8,8 \times 10^{38}}{100} 1.6 \times 10^{-19} [C] \doteq 1,4 \times 10^{18} C \tag{3.2}$$

S pohybom tohto náboja súvisí prúd, ktorý určíme ako podiel celkového náboja a času za ktorý minie zvolené miesto. Tento čas nezávisí od rýchlosti mraku ale len od času ako dlho vznikol, t.j.

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{1,4 \times 10^{18} [C]}{5 [hod]} \doteq 7,8 \times 10^{13} A \tag{3.3}$$

Rýchlosť mraku potrebujeme na odhad aký dlhý je uvažovaný mrak

$$l = vT = 600 \frac{km}{s} 5 hod = 10\,800\,000 km \tag{3.4}$$

čo je hodnota podstatne väčšia ako vzdialenosť Zem – Mesiac a na výpočet indukcie na Mesiaci môžeme s dostatočnou presnosťou využiť vzťah pre indukciu od nekonečne dlhého vodiča

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \left[\frac{N}{A^2} \right] 7,8 \times 10^{13} [A]}{2\pi 380\,000 [km]} \doteq 0,08 T \tag{3.5}$$

čo je z hľadiska neporušeného magnetického poľa Zeme ($\sim 0,0002\text{ T}$) obrovská hodnota. Pohyb podobných mrakov nabitých častíc môže preto výrazne pozmeniť charakter (tvar aj intenzitu) magnetického poľa Zeme v pomerne krátkych časových úsekoch. Ak si predstavíme uvažované vedenie ako elektrický obvod, potom zmenu indukčného toku určíme ako

$$\Delta\Phi = S(\Delta B) = ab(\Delta B) = 400 [km] 120 [km] 100 [nT] = 4800 [Tm^2] \tag{3.6}$$

čo sa prejaví indukovaným napätím

$$U = \frac{\Delta\Phi}{\tau} = \frac{4800 [Tm^2]}{15 [s]} = 320 V \tag{3.7}$$

Znamienko (-) je ignorované pretože v príklade nie je explicitne zadané, či zmena indukcie je kladná alebo záporná, t.j. či pole narastalo alebo klesalo. V magnetických búrkach sa striedajú rýchle poklesy aj nárasty poľa s čím je spojené aj znamienko indukovaného napätia.

Mechanizmus aj dynamika „magnetických búrok“ sú v skutočnosti podstatne zložitejšie (ignorovali sme ionosférické prúdy, indukované prúdy v podloží, uzatváranie magnetických indukčných čiar v „magnetickom chvoste“ za Zemou atď.), preto je potrebné považovať tento príklad len za ilustráciu spomínaných procesov.