1. Doskový kondenzátor s doskami v tvare štvorca so stranou a sa používa na meranie hladiny oleja v nádrži. Keď je hladina oleja nižšie ako spodný okraj (vodorovne umiestnených) dosiek kondenzátora nádrž je považovaná za prázdnu a meranie udáva kapacitu C_{min}. Keď je hladina oleja vyššie ako horná hrana dosiek (nádrž naplnená až po plniace hrdlo) meranie udáva kapacitu C_{max}. Aká je relatívna permitivita oleja a vzdialenosť platní kondenzátora? Určte vzťah (závislosť) pomocou ktorého vieme určiť hladinu oleja ako funkciu meranej kapacity. Ak kapacitu určujeme ako podiel malého, známeho, presne určeného náboja Q_0 umiestneného na platniach a meraného napätia, určte s akou presnosťou určujeme hladinu oleja pri skoro úplne plnej a úplne prázdnej nádrži, ak napätia meriame s presnosťou $\pm\Delta U_0$? Vzlínavosť oleja a elektrostatický zdvih hladiny medzi doskami zanedbajte. (4,5 boda).

Riešenie:

Kapacita doskového kondenzátora je určená vzťahom

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \tag{1.1}$$

kde $S = a^2$ je plocha platní a d neznáma vzdialenosť platní. Pre minimálnu kapacitu preto platí

$$C_{min} = \varepsilon_0 \frac{a^2}{d} \tag{1.2}$$

a pre maximálnu

$$C_{max} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{a^2}{d} \tag{1.3}$$

kde ε_r je relatívna permitivita oleja. Podielom rovníc (1.3) a (1.2) dostávame pre relatívnu permitivitu

$$\varepsilon_r = \frac{C_{max}}{C_{min}} \tag{1.4}$$

Vzdialenosť platní určíme priamo z (1.2) ako

$$d = \varepsilon_0 \frac{a^2}{C_{min}} \tag{1.5}$$

Pri čiastočnom naplnení nádrže je celková kapacita určená súčtom vedľa seba zapojených menších kondenzátorov a kapacitami

$$\begin{gathered} C_1 = \varepsilon_0 \frac{a(a-h)}{d} \qquad\qquad C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{ah}{d} \\ C = C_1 + C_2 = \varepsilon_0 \frac{a}{d}\left(a - h + \varepsilon_r h\right) = \frac{a-h}{a} C_{min} + \frac{h}{a} C_{max} \end{gathered} \tag{1.6}$$

kde C_1 je kapacita časti kondenzátora nad hladinou oleja a C_2 pod hladinou a h je výška hladiny. Ak meriame kapacitu C potom v zmysle spodného vzťahu z (1.6) tomu zodpovedá hladina

$$h = \frac{C - C_{min}}{C_{max} - C_{min}} a \tag{1.7}$$

Pri určení nepresnosti merania hladiny najskôr využijeme definíciu kapacity kondenzátora

$$C = \frac{Q}{U} \tag{1.8}$$

Ak napätie meriame s presnosťou $\pm\Delta U_0$, potom presnosť určenia kapacity bude (v zmysle metódy šírenia chýb)

$$\pm\Delta C = \pm \frac{dC}{dU} \Delta U = \pm \frac{d\left(\frac{Q_0}{U}\right)}{dU} \Delta U = \pm \frac{Q_0}{U^2} \Delta U = \pm \frac{C^2}{Q_0} \Delta U \tag{1.9}$$

Podobne postupujeme pri presnosti určovania hladiny zo vzťahu (1.7) a dostávame

$$\pm\Delta h = \pm\frac{d\,h}{dC}\Delta C = \pm\frac{d\left(\dfrac{C-C_{min}}{C_{max}-C_{min}}a\right)}{dC}\Delta C = \pm\frac{a}{C_{max}-C_{min}}\Delta C \tag{1.10}$$

Dosadením nepresnosti určenia kapacity zo vzťahu (1.9) do (1.10) dostávame výsledok

$$\pm\Delta h = \pm\frac{a}{C_{max}-C_{min}}\frac{C^2}{Q_0}\Delta U \tag{1.11}$$

Pri plnej nádrži je potom presnosť určenia hladiny

$$\pm\Delta h_{max} = \pm\frac{a}{C_{max}-C_{min}}\frac{C_{max}^2}{Q_0}\Delta U \tag{1.12}$$

a pri prázdnej

$$\pm\Delta h_{min} = \pm\frac{a}{C_{max}-C_{min}}\frac{C_{min}^2}{Q_0}\Delta U \tag{1.13}$$

2. V minulosti sa na pohon motorových leteckých modelov používali hlavne dvojtaktné spaľovacie motory. Pokrok v oblasti akumulátorov a malých elektrických motorov umožnil použitie podstatne tichšieho a ľahšie regulovateľného elektrického pohonu. Uvažujme, že letecký model má celkovú hmotnosť M, je vybavený N akumulátormi, každý s nominálnym napätím U a kapacitou Q [mAh]. Ak je účinnosť konverzie elektrickej energie na mechanickú η, určte akú maximálnu výšku môže dosiahnuť ak odštartuje s plne nabitými akumulátormi. Všetky trenia a odpory sú zahrnuté v uvedenej účinnosti, gravitačné zrýchlenie je g. (2,5 boda)

Riešenie:

Maximálnu (idealizovanú) výšku, ktorú by model mohol dosiahnuť určíme so zákona zachovania energie, keď predpokladáme, že celá energia uložená v akumulátoroch

$$W_{aku} = N\,U\,I\,T = N\,U\,Q \tag{2.1}$$

kde Q je kapacita akumulátorov udaná v mAh čo sú jednotky veľkosti (uloženého náboja). Táto energia sa premení na potenciálnu energiu modelu len s istou účinnosťou, t.j. nadobudnutá mechanická energia bude

$$W_{mech} = N\,U\,Q\,\eta \tag{2.2}$$

Pri lete sa elektrická energia premieňa na kinetickú aj potenciálnu energiu (najskôr musí lietadlo zrýchliť na letovú rýchlosť) ale pri maximálnom (dynamickom) dostupe na vrchole dráhy zastane a celú dostupnú mechanickú energiu vyjadrujeme ako potenciálnu, t.j.

$$W_{pot} = M\,g\,h \tag{2.3}$$

kde M je hmotnosť modelu, g gravitačné zrýchlenie a h dosiahnutá výška. Kombináciou vzťahov (2.3) a (2.2)) môžeme napísať rovnicu

$$M\,g\,h_{\max} = N\,U\,Q\,\eta \tag{2.4}$$

z ktorej ľahko dostávame pre maximálnu výšku

$$h_{\max} = \frac{N\,U\,Q\,\eta}{M\,g} \tag{2.5}$$

3. Drôt s dĺžkou L má v strede nióbové jadro s polomerom r_{Nb}, vodivo obkolesené medeným puzdrom s vonkajším polomerom r_{Cu}. Merná vodivosť nióbu je σ_{Nb} a medi σ_{Cu}. Určte odpor tohto drôtu. (3 body)

Riešenie:

V zmysle Ohmovho zákona môžeme pre každý bod v nióbovej časti drôtu písať

$$j_{Nb} = \sigma_{Nb}\, E_{Nb} \tag{3.1}$$

a medenej

$$j_{Cu} = \sigma_{Cu}\, E_{Cu} \tag{3.2}$$

kde uvažujeme len jedinú zložku vektora prúdovej hustoty v smere drôtu. Pri vodivom prepojení oboch jeho častí sa prúd medzi jednotlivými časťami prerozdelí tak, že na rovnakých častiach drôtu bude rovnaký spád napätia, resp. intenzita elektrického poľa, t.j.

$$E_{Nb} = \frac{j_{Nb}}{\sigma_{Nb}} = \frac{I_{Nb}}{\sigma_{Nb}\, S_{Nb}} = \frac{I_{Nb}}{\sigma_{Nb}\, \pi r_{Nb}^2} \tag{3.3}$$

a

$$E_{Cu} = \frac{j_{Cu}}{\sigma_{Cu}} = \frac{I_{Cu}}{\sigma_{Cu}\, S_{Cu}} = \frac{I_{Cu}}{\sigma_{Cu}\, \pi\left(r_{Cu}^2 - r_{Nb}^2\right)} \tag{3.4}$$

Pri rovnosti a zjavnej konštantnosti oboch intenzít môžeme tieto formálne vyjadriť ako

$$U_{Nb} = E_{Nb}\, L \tag{3.5}$$

a

$$U_{Cu} = E_{Cu}\, L \tag{3.6}$$

Porovnaním vzťahov (3.3) a (3.5), resp. (3.4) a (3.6) dostávame pre odpor jednotlivých častí

$$\frac{U_{Nb}}{L} = \frac{I_{Nb}}{\sigma_{Nb}\, \pi r_{Nb}^2} \qquad \Rightarrow \qquad R_{Nb} = \frac{U_{Nb}}{I_{Nb}} = \frac{L}{\sigma_{Nb}\, \pi r_{Nb}^2} \tag{3.7}$$

a

$$\frac{U_{Cu}}{L} = \frac{I_{Cu}}{\sigma_{Cu}\, \pi\left(r_{Cu}^2 - r_{Nb}^2\right)} \qquad \Rightarrow \qquad R_{Cu} = \frac{U_{Cu}}{I_{Cu}} = \frac{L}{\sigma_{Cu}\, \pi\left(r_{Cu}^2 - r_{Nb}^2\right)} \tag{3.8}$$

Drôt uvedenej konštrukcie môžeme takto považovať za dva drôty zapojené vedľa seba a celkový odpor preto vyjadríme ako

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{Nb}} + \frac{1}{R_{Cu}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{R} = \frac{\sigma_{Nb}\, \pi\, r_{Nb}^2}{L} + \frac{\sigma_{Cu}\, \pi\left(r_{Cu}^2 - r_{Nb}^2\right)}{L} \tag{3.9}$$

a po úprave dostávame požadovaný výsledok v tvare

$$R = \frac{L}{\pi\left[\sigma_{Cu} r_{Cu}^2 - \left(\sigma_{Cu} - \sigma_{Nb}\right)\, r_{Nb}^2\right]} \tag{3.10}$$