1. Na oboch koncoch rybárskeho silónového vlákna neznámej dĺžky sú upevnené dve malé guľôčky, každá s hmotnosťou m a polomerom r. Postupne obe guľôčky nabíjame nábojom s rovnakou polaritou, až pri dosiahnutí veľkosti náboja Q_{krit} (na každej guľôčke) sa vlákno roztrhne. Keď sme následne v dostatočne veľkej vzdialenosti (nekonečnej) odmerali rýchlosti guľôčok, táto bola rovná v_{max} voči sústave v ktorej bola dvojica nábojov pôvodne v pokoji. Určte dĺžku vlákna a jeho pevnosť (maximálnu silu pred roztrhnutím). Vlákno považujte za ideálny izolant, veľkosť guľôčok voči dĺžke vlákna je zanedbateľná, ignorujte gravitačné pôsobenie guľôčok a ostatné nepodstatné vplyvy (napr. hmotnosť vlákna atď.). (3 body)

Riešenie:

Označme neznámu dĺžku vlákna ako L. Ak zanedbáme veľkosť guľôčok, potom stred symetrie rozloženia náboja na guľôčkach je práve v tejto vzdialenosti. Pôsobiaca sila medzi nábojmi má smer pozdĺž napnutého vlákna a veľkosť tejto zložky v momente roztrhnutia zapíšeme ako

$$F_{max} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{krit}\,Q_{krit}}{L^2} \tag{1.1}$$

Po roztrhnutí vlákna sa pôvodná potenciálna energia sústavy premení na kinetickú energiu pohybujúcich guľôčok. Potenciálna energie jednej guľôčky voči druhej (keď sú náboje vo vzájomnej vzdialenosti L) je daná ako

$$E_p = \varphi Q_{krit} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{krit}}{L}Q_{krit} \tag{1.2}$$

kde φ je potenciál od jedného z nábojov. Nárast kinetickej energie v dôsledku poklesu potenciálnej vyjadríme rovnicou

$$\begin{gathered}\Delta E_k = \Delta E_p \\ \frac{1}{2}mv_{max}^2 + \frac{1}{2}m\left(-v_{max}\right)^2 - 0 - 0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{krit}}{L}Q_{krit} - 0\end{gathered} \tag{1.3}$$

kde nuly na ľavej strane zodpovedajú nulovej kinetickej energii guľôčok v pokoji, a na pravej strane nulovej potenciálnej energii keď sa vzdialia na nekonečnú vzdialenosť. V zmysle zákona zachovania hybnosti sa obe guľôčky rozletia rovnakou rýchlosťou na opačné strany, čo zodpovedá zápornému znamienku v druhom člene pravej strany rovnice (1.3). Z tejto rovnice najskôr vyjadríme neznámu vzdialenosť ako

$$L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{krit}^2}{mv_{max}^2} \tag{1.4}$$

Dosadením tejto vzdialenosti do (1.1) a úpravou dostávame

$$F_{max} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{krit}^2}{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{krit}^2}{mv_{max}^2}\right)^2} = 4\pi\varepsilon_0\frac{\left(mv_{max}^2\right)^2}{Q_{krit}^2} = 4\pi\varepsilon_0\frac{m^2v_{max}^4}{Q_{krit}^2} \tag{1.5}$$

2. Dva rovnaké kruhové závity s polomerom R sa nachádzajú vo vzájomnej vzdialenosti d orientované tak, že ich roviny sú rovnobežné. Jeden závit je rovnomerne nabitý nábojom Q, druhý rovnako veľkým nábojom opačnej polarity ($-Q$). Vyjadrite intenzitu a potenciál v ľubovoľnom bode na osi spájajúcej stredy týchto závitov. Výsledné vzťahy, ktoré nevyzerajú práve „priateľsky“ využite (upravte) na vyjadrenie potenciálu a intenzity v geometrickom strede (bode súmernosti) sústavy, t.j. na osi v strede medzi závitmi. (3,5 bodov)

Riešenie:

Riešme problém v pravouhlej sústave v ktorej stredy oboch závitov ležia na osi y. Závit s kladným nábojom Q nech leží v rovine rovnobežnej s rovinou x,z vo vzdialenej $d/2$ pod ňou ($y=-d/2$) a druhý závit so záporným nábojom ($-Q$) vo vzdialenej $d/2$ ($y=d/2$) nad rovinou x,z. V takto zvolenej geometrii najskôr vyjadríme potenciál a až následne intenzitu poľa pre body so súradnicami [0,y,0]. Vzdialenosť ľubovoľnej časti prvého závitu od zvoleného bodu [0,y,0] je

$$r_+ = \sqrt{R^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2} \tag{2.1}$$

a od druhého závitu

$$r_- = \sqrt{R^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2} \tag{2.2}$$

Celkový potenciál od prvého závitu v uvedených bodoch je potom

$$\begin{aligned}\varphi_+ = \int d\varphi = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r_+} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{Q}{2\pi R}\frac{R\,d\alpha}{r_+} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2\pi}\frac{d\alpha}{\sqrt{R^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2}}\int_0^{2\pi} d\alpha = \\ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2}}\end{aligned} \tag{2.3}$$

a úplne analogicky pre potenciál od druhého závitu

$$\varphi_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q}{\sqrt{R^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2}} \tag{2.4}$$

kde sa okrem vzdialenosti líši ešte znamienko náboja (v zmysle zadania príkladu). Pre celkový potenciál od oboch závitov potom dostávame

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2}}\right] \tag{2.5}$$

V geometrickom strede pri našej voľne vzťažnej sústavy je $y = 0$ a dostávame

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(-\frac{d}{2}\right)^2}}\right] = 0 \tag{2.6}$$

t.j. potenciál je v tomto bode rovnako nulový ako v nekonečnej vzdialenosti.

Potenciál vyjadrený vzťahom (2.5) je len funkciou premennej y (vďaka symetrii riešeného problému) a preto aj intenzita bude mať len túto komponentu. Vyjadriac intenzitu všeobecným spôsobom ako

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}k\right) \tag{2.7}$$

dostávame pre zložku E_y

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+\left(y+\frac{d}{2}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+\left(y-\frac{d}{2}\right)^2}}\right]\right\} =$$

$$= \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\partial\left[R^2+\left(y+\frac{d}{2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}}{\partial y} - \frac{\partial\left[R^2+\left(y-\frac{d}{2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}}{\partial y}\right] =$$

$$= \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)2\left(y+\frac{d}{2}\right)}{\left[R^2+\left(y+\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)2\left(y-\frac{d}{2}\right)}{\left[R^2+\left(y-\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right] =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left(y+\frac{d}{2}\right)}{\left[R^2+\left(y+\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(y-\frac{d}{2}\right)}{\left[R^2+\left(y-\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right] \tag{2.8}$$

Pre bod $y = 0$ dostávame

$$E_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left(\frac{d}{2}\right)}{\left[R^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(-\frac{d}{2}\right)}{\left[R^2+\left(-\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{\left[R^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{d^2}\left[1+\left(\frac{2R}{d}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} \tag{2.9}$$

3. Búrkový mrak sférického (guľového) tvaru s polomerom R_m je homogénne (rovnomerne) nabitý a jeho stred sa nachádza vo výške h. Aká je absolútna hodnota intenzity elektrického poľa vo vnútri mraku vo vzdialenosti 10% polomeru od jeho stredu, ak napätie medzi povrchom mraku a zemským povrchom je U? (3.5 bodov)

Riešenie:

Objemovú hustotu náboja mraku vyjadríme pomocou jeho celkového náboja (označeného ako Q_m) a objemu ako

$$\rho = \frac{Q_m}{V_m} = \frac{Q_m}{\frac{4}{3}\pi R_m^3} = \frac{3Q_m}{4\pi R_m^3} \tag{3.1}$$

Pre sféricky symetrické objekty sa všeobecný tvar Gaussovej vety

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV \tag{3.2}$$

dá vďaka:

- rovnobežnosti vektorov intenzity a normály každej infinitezimálnej časti integračnej plochy
- konštantnosti absolútnej hodnoty intenzity na celej integračnej ploche
- konštantnej hustote náboja

zredukovať na tvar

$$E\,4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3 \tag{3.3}$$

kde E je radiálna zložka intenzity. Po úprave a dosadení objemovej hustoty náboja z (3.1)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_m}{R_m^3}r \tag{3.4}$$

kde E je absolútna hodnota určovanej intenzity elektrického poľa. Smer vektora intenzity je, ako už bolo uvádzané, pre sféricky symetrické systémy vždy radiálny. Pre konkrétne miesto (vo vzdialenosti 10% od stredu) v ktorom máme určiť intenzitu dostávame

$$r = \frac{R_m}{10} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{1}{40\pi\varepsilon_0}\frac{Q_m}{R_m^2} \tag{3.5}$$

Aby sme mohli zo vzťahu (3.5) odstrániť neznámy náboj celého mraku, tento vyjadríme ako napätie medzi povrchom mraku a zemským povrchom. Mimo sféricky symetricky nabitých telies je priebeh intenzity rovnaký ako v okolí bodového náboja (zjavné aj zo vzťahu (3.3) pre $r > R_m$) a v zadaní uvádzané napätie sa dá vyjadriť ako

$$U = -\int_{R_m}^{h}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_m}{r^2}dr = -\frac{Q_m}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_m}^{h} r^{-2}dr = -\frac{Q_m}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r^{-1}}{(-1)}\right]_{R_m}^{h} = \frac{Q_m}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{R_m}\right) = \frac{Q_m}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(R_m-h)}{h\,R_m} \tag{3.6}$$

odkiaľ

$$Q_m = 4\pi\varepsilon_0\frac{h\,R_m}{R_m-h}U \tag{3.7}$$

a po dosadení do (3.5) dostávame výsledný vzťah

$$E(0{,}1R_m) = \frac{1}{10}\frac{h}{R_m(R_m-h)}U \tag{3.8}$$

Skutočnosť, že rozdiel $R_m - h$ nadobúda zjavne záporné hodnoty je kompenzovaný bližšie neurčenou polaritou napätia U, s ním spojeným znamienkom náboja Q_m a následne aj orientáciou intenzity vo vnútri mraku.