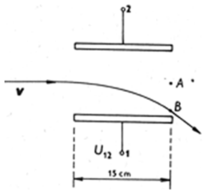
Príklad č. 1 Dve rovnaké guľôčky s hmotnosťou *m*, polomerom *R*, nabité nábojom *Q* sú zavesené na nitiach rovnakej dĺžky. V dôsledku odpudivej sily medzi nábojmi rozostúpia sa guľôčky tak, že nite zvierajú uhol φ. Tento systém nábojov je ponorený do dielektrickej kvapaliny s hustotou ρ a relatívnou permitivitou ε_r. Aká musí byť hustota kvapaliny, aby sa uhol φ medzi niťami ani po ponorení guľôčok do kvapaliny nezmenil? (7 bodov)

Príklad č. 2. Drôt s dĺžkou *L*, konštantným prierezom *S* má odpor R_0 nameraný medzi jeho koncami. Konce drôtu ideálne vodivo spojte a takto vytvoríte kruhový závit. Určte:
a) Polomer závitu
b) Kam je potrebné pripojiť meracie kontakty, aby ste namerali odpor 10-krát menší ako R_0?
c) Aký najväčší odpor na kružnici sa dá takto namerať?(8 bodov)



Príklad č. 3. Na obrázku je znázornená trajektória elektrónu, ktorý sa pohyboval v homogénnom elektrickom poli medzi dvoma kovovými platňami. Pri vstupe do priestoru medzi platňami mal elektrón rýchlosť v a pohyboval sa rovnobežne s platňami. Pod vplyvom elektrických síl koná elektrón krivočiary pohyb a miesto jeho výstupu z poľa medzi platňami sa posunie z bodu A (v strede medzi platňami) do bodu B, pričom vzájomná vzdialenosť bodov AB je d_{AB}. Celková vzdialenosť medzi platňami je D_{plat}, napätie medzi nim je U_{plat}, dĺžka platní je L_{plat}. Ak náboj elektrónu (*e*) považujeme za známy, určte hmotnosť elektrónu. (7 bodov).

Príklad č. 4. Tenký dielektrický disk s polomerom *R*, nabitý po celej ploche rovnakým plošným nábojom σ sa otáča okolo svojej rotačnej osi uhlovou rýchlosťou ω. Vypočítajte magnetickú indukciu na osi rotácie vo vzdialenosti z od stredu disku. (8 bodov)

Riešenia :

Príklad č. 1.

Podmienka stability vzájomnej polohy guľôčok vyžaduje aby v oboch prípadoch bola výslednica všetkých síl nulová. Zložka elektrostatickej sily pôsobiaca pozdĺž spojnice stredov guľôčok (označme tento smer ako horizontálny) je

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{d^2} \qquad (1.1)$$

kde *d* je vzdialenosť guľôčok. Vektorovým súčtom elektrickej sily s tiažou guľôčky (pôsobiacou kolmo dole)

$$F_g = mg \qquad (1.2)$$

získame výslednú silu ktorá napína niť v smere určenom uhlom výchylky φ. Napätie nite je tá sila, ktorá kompenzuje pôsobenie oboch spomínaných síl. Z geometrie je pomer elektrostatickej a tiažovej sily tangens uhla $\varphi/2$, t.j.

$$tg\left(\varphi/2\right) = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{d^2}}{mg} \qquad (1.3)$$

Po ponorení do kvapaliny sa zmenia elektrostatická aj tiažová sila ako

$$F_e^{'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q^2}{d^2} \qquad (1.4)$$

resp.

$$F_g^{'} = mg - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \qquad (1.5)$$

kde druhý člen opisuje vztlakovú silu pri ponorení do kvapaliny s hustotou ρ. Pri požadovanom zachovaní geometrie musí opäť platiť

$$tg\left(\varphi/2\right)=\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q^2}{d^2}}{mg-\frac{4}{3}\pi R^3\rho g} \tag{1.6}$$

Priamym porovnaním vzťahov (1.3) a (1.6) dostávame

$$\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{d^2}}{mg}=\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q^2}{d^2}}{mg-\frac{4}{3}\pi R^3\rho g} \tag{1.7}$$

a úpravou

$$\rho=\frac{3m}{4\pi R^3}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right) \tag{1.8}$$

Príklad č. 2

Pri spojení koncov drôtu sa meranie odporu medzi dvoma bodmi kruhového závitu dá vždy považovať za meranie odporu dvoch vedľa seba zapojených odporov. Riešme túto úlohu najskôr všeobecne a to tak, určíme odpor pri kontaktoch umiestnených hocikde na kružnici, ktorých polohu určuje stredový uhol označený ako α. Celková dĺžka drôtu, teda aj obvod kruhového závitu je

$$L=2\pi r=l_1+l_2 \tag{2.1}$$

Kde $l_{1,2}$ sú dĺžky oblúkov vymedzených polohou meracích kontaktov. Hľadaný polomer závitu je z (2.1)

$$r=\frac{L}{2\pi} \tag{2.2}$$

Časť obvodu vymedzená uhlom α takto zodpovedá odporu časti uvažovaného drôtu s dĺžkou a odporom

$$l_1=2\pi r\frac{\alpha}{2\pi}=\alpha r=\frac{\alpha}{2\pi}L \qquad R_1=R_0\frac{l_1}{L}=R_0\frac{\alpha}{2\pi} \tag{2.3}$$

a druhej časti obvodu závitu analogicky zodpovedá

$$l_2=2\pi r\frac{2\pi\text{-}\alpha}{2\pi}=(2\pi-\alpha)r=\frac{(2\pi-\alpha)}{2\pi}L \qquad R_2=R_0\frac{l_2}{L}=R_0\frac{(2\pi-\alpha)}{2\pi} \tag{2.4}$$

Pre odpory zapojené vedľa seba platí

$$\frac{1}{R_c}=\sum_i\frac{1}{R_i} \tag{2.5}$$

Dosadením určených odporov podľa (2.3) a (2.4) do (2.5) dostávame

$$\frac{1}{R_c}=\frac{2\pi}{\alpha R_0}+\frac{2\pi}{(2\pi-\alpha)R_0} \tag{2.6}$$

a po úprave

$$R_c=\frac{\alpha(2\pi-\alpha)}{(2\pi)^2}R_0 \tag{2.7}$$

Pre náš konkrétny prípad, keď $R_c = R_0/10$ dostávame

$$\frac{1}{10}R_0 = \frac{\alpha(2\pi-\alpha)}{(2\pi)^2}R_0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha^2 - 2\pi\alpha + \frac{(2\pi)^2}{10} = 0 \tag{2.8}$$

a po vyriešení kvadratickej rovnice (2.8) pre uhol α

$$\alpha = \pi\left(1 \pm \sqrt{\frac{3}{5}}\right) \tag{2.9}$$

pričom obe možnosti zodpovedajú rovnakej situácii, len raz určujú menší a raz väčší z dvojice uhlov určených polohou kontaktov. Maximálne možný nameraný odpor slučky určíme z (2.7) nájdením maxima funkcie $R_c(\alpha)$ ako

$$\frac{dR_c}{d\alpha} = \frac{R_0}{(2\pi)^2}\left(2\pi - 2\alpha\right) = 0 \tag{2.10}$$

a hľadanému maximu zodpovedajú

$$\alpha_{max} = \pi \qquad\qquad R_{max} = \frac{\alpha_{max}(2\pi-\alpha_{max})}{(2\pi)^2}R_0 = \frac{\pi(2\pi-\pi)}{(2\pi)^2}R_0 = \frac{R_0}{4} \tag{2.11}$$

Príklad č. 3.

Pohyb elektrónu v priečnom homogénnom elektrickom poli je charakterom v mnohom podobný vodorovnému vrhu. Označme ako smer *x* počiatočný (pôvodný) smer elektrónu a smer *y* nech smeruje kolmo dole. Smer z nie je dôležitý (potrebný), pretože riešený pohyb je zjavne dvojrozmerný (prebieha v rovine, pre riešenie zvolenej ako rovina *xy*). Počiatok vzťažného systému umiestnime do bodu, kde elektrón vstupuje do elektrického poľa. V tomto poli pôsobí na elektrón len sila v smere y (od rovnakej zložky intenzity poľa) čo zapíšeme ako

$$F_x = 0 \qquad\qquad F_y = eE_y = e\frac{U_{plat}}{D_{plat}} \tag{3.1}$$

kde intenzitu homogénneho poľa vyjadrili v tvare podielu podielu vychyľovacieho napätia a vzdialenosti platní. Pod vplyvom síl vyjadrených vzťahmi (3.1) elektrón podlieha zrýchleniu

$$a_x = 0 \qquad\qquad a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{e}{m}\frac{U_{plat}}{D_{plat}} \tag{3.2}$$

kde *m* je nateraz neznáma hmotnosť elektrónu. Pohyb elektrónu so zrýchlením vyjadreným v (3.2) je rovnomerný v smere *x* a rovnomerne zrýchlený v smere *y.* Rýchlosť pohybu v oboch smeroch určíme ako

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= 0 & \qquad v_x &= v \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{e}{m}\frac{U_{plat}}{D_{plat}} & \qquad v_y &= \frac{e}{m}\frac{U_{plat}}{D_{plat}}t \end{aligned} \tag{3.3}$$

kde sme už využili počiatočnú podmienky, v zmysle počiatočnej rýchlosti v v smere *x* a 0 v smere *y*. Ďalším integrovaním vzťahov (3.3) dostávame

$$\frac{dx}{dt} = v \qquad x = vt$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{e}{m}\frac{U_{plat}}{D_{plat}}t \qquad y = \frac{e}{m}\frac{U_{plat}}{D_{plat}}\frac{t^2}{2} \tag{3.4}$$

kde sme použili opäť počiatočné podmienky vstupu do poľa (začiatok počítania času *t*) v bode [0,0]. Pri výstupe z poľa platí v zmysle zadania

$$L_{plat} = vt_k$$
$$d_{AB} = \frac{e}{m}\frac{U_{plat}}{D_{plat}}\frac{t_k^2}{2} \tag{3.5}$$

kde t_k je čas, keď elektrón opúšťa elektrické pole. Porovnaním oboch rovníc (3.5) cez tento čas výstupu dostávame

$$m = \frac{e}{d_{AB}}\frac{U_{plat}}{D_{plat}}\frac{L_{plat}^2}{2v^2} \tag{3.6}$$

Príklad č. 4.

Rozdelíme disk na nekonečný počet nekonečne tenkých medzikruží, ktoré majú premenlivý polomer *r* a rovnakú šírku *dr*. Nekonečne malá plocha tohto medzikružia je rovná

$$dS = 2\pi r\, dr \tag{4.1}$$

a leží na nej náboj

$$dQ = \sigma dS = \sigma 2\pi r\, dr \tag{4.2}$$

Všetky medzikružia sa otáčajú rovnakou uhlovou rýchlosťou ω, teda za čas $T = 2\pi/\omega$ sa otočí práve 1 krát. Pri rotácii predstavuje každé medzikružie prúdovodič s nekonečne malým prúdom

$$dI = \frac{dQ}{T} = \frac{\sigma 2\pi r\, dr}{\frac{2\pi}{\omega}} = \sigma\omega r\, dr \tag{4.3}$$

Pomocou Biot-Savartovho zákona vyjadríme magnetickú indukciu od konkrétneho prúdu *I* ako

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \tag{4.4}$$

V našom príklade ale potrebujeme spočítať príspevky všetkých nekonečne malých prúdov nesených v jednotlivých medzikružiach, čo môžeme zapísať ako

$$d^2\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} dI \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \tag{4.5}$$

Pozor, symbol *r* vo vzťahu (4.3) označuje úplne inú premennú ako vo vzťahu (4.5), preto preznačme *r* (polomer medzikružia) vo vzťahu (4.3) ako premennú *x* a šírku medzikružia ako *dx*. Vzťah (4.5) preto prepíšeme ako

$$d^2\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\sigma\omega x\, dx \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \tag{4.6}$$

Pre výpočet je vhodné najskôr integrovať pozdĺž medzikružia (t.j. cez $d\vec{l}$). Pretože $d\vec{l}$ a $\vec{r}$ sú na seba stále kolmé, môžeme najskôr vzťah (4.6) zredukovať na

$$d^2B = \frac{\mu_0}{4\pi}\sigma\,\omega\,x\,dx\frac{dl}{r^2} \tag{4.7}$$

avšak absolútna hodnota dvojitého diferenciálu d^2B na ľavej strane rovnice (4.7) zodpovedá vektoru kolmému súčasne na $d\vec{l}$ aj $\vec{r}$. Samotný vektor $d\vec{B}$ pri integrovaní okolo medzikružia opíše povrch kužeľa, t.j. zložka vektora kolmá na rotačnú os disku sa pri integrovaní zruší a „prežije" len zložka v smere rotačnej osi, ďalej označená ako dB_y. Prvé integrovanie rovnice (4.7) vedie k výrazu

$$dB_y = \frac{\mu_0}{4\pi}\sigma\,\omega\,x\,dx\left(\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\varphi}{r^2}\right)\cos\alpha \tag{4.8}$$

kde sme dl označili ako $x\,d\varphi$ a uhol α je vrcholovým uhlom spomínaného kužeľa. Kosínus uhla α sa dá vyjadriť aj pomocou podobnosti trojuholníkov aj ako x/r, preto ďalej píšeme

$$dB_y = \frac{\mu_0}{4\pi}\sigma\,\omega\,x\,dx\frac{x}{r^2}\frac{x}{r}\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{\mu_0}{2}\sigma\,\omega\frac{x^3}{r^3}dx \tag{4.9}$$

Ak z Pythagorovej vety vyjadríme r a dosadíme do (4.9) dostávame

$$dB_y = \frac{\mu_0}{2}\sigma\,\omega\frac{x^3}{\left(x^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx \tag{4.10}$$

a integrovaním cez celú rotujúcu dosku

$$B_y = \frac{\mu_0}{2}\sigma\,\omega\int_0^R\frac{x^2}{\left(x^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}x\,dx \tag{4.11}$$

Pri integrovaní (4.11) je vhodné využiť substitúciu

$$t = x^2+z^2 \qquad\qquad dt = 2xdx \tag{4.12}$$

ktorá prevedie integrál (4.11) na elementárne mocninné funkcie

$$B_y = \frac{\mu_0}{2}\sigma\,\omega\int_{z^2}^{z^2+R^2}\frac{t-z^2}{t^{\frac{3}{2}}}\frac{dt}{2} = \frac{\mu_0}{4}\sigma\,\omega\int_{z^2}^{z^2+R^2}\left(t^{-\frac{1}{2}}-z^2\,t^{-\frac{3}{2}}\right)dt \tag{4.13}$$

s medzivýsledkom

$$B_y = \frac{\mu_0}{4}\sigma\,\omega\left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-z^2\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_{z^2}^{z^2+R^2} = \frac{\mu_0}{2}\sigma\,\omega\left[t^{\frac{1}{2}}+z^2\,t^{-\frac{1}{2}}\right]_{z^2}^{z^2+R^2} \tag{4.14}$$

Po dosadení hraníc integrovania dostávame konečný výsledok v upravenom tvare

$$B_y = \frac{\mu_0}{2}\sigma\,\omega\left(\sqrt{z^2+R^2}-z+\frac{z^2}{\sqrt{z^2+R^2}}-\frac{z^2}{z}\right) = \frac{\mu_0}{2}\sigma\,\omega\left(\frac{2z^2+R^2}{\sqrt{z^2+R^2}}-2z\right) \tag{4.15}$$