1. Predpokladajme známy náboj **Q**, ktorý sa môže rozdeliť na náboj q a náboj Q-q. Pri akej hodnote (veľkosti) náboja q bude odpudivá sila medzi touto dvojicou maximálna (pri ľubovoľnej vzdialenosti). Výsledok podložte výpočtom! (3 body)

Riešenie:

Absolútna hodnota sily pôsobiacej medzi dvoma nábojmi je $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(Q-q)}{r^2}$.

Zadanie príkladu žiada nájsť pri akej q bude F maximálna, tj. potrebujeme nájsť maximum funkcie F(q), čo vykonáme nájdením jej stacionárneho bodu. Najskôr vykonáme deriváciu F(q) podľa q $\frac{dF}{dq} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{d\left[q(Q-q)\right]}{dq} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(Q-2q)$ ktorú následne postavíme rovnú nule $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(Q-2q) = 0$ a dostávame $q = \frac{Q}{2}$

2. Predpokladajme dvojicu nábojov **+Q** a **–Q**. Prvý náboj je rozložený na povrchu gule s polomerom R. Druhý je na veľmi malom (bodovom) teliesku s hmotnosťou **m**, ktoré sa nachádza vo vzdialenosti **h** nad povrchom gule. Určte akú tangenciálnu (dotyčnicovú) rýchlosť v_0 musíme teliesku udeliť aby:
   a) Bodový náboj obiehal po kruhovej dráhe okolo gule. (2 body)
   b) Bodový náboj unikol do nekonečnej vzdialenosti. (2 body)

Riešenie:

Ak sa má náboj –Q urdžať na kruhovej dráhe potom musí byť pôsobiaca elektrická sila aj dostredivou silou pri pohybe po požadovanej kružnici. Absolútnu hodnotu elektrostatickej sil vyjadríme ako $F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(R+h)^2}$, pretože elektrické pole nabitej gule (na povrchu) je identické ako pole bodového náboja umiestneného v jej strede. Dostredivú silu vyjadríma ako $F_d = \frac{\mathrm{m.v}_0^2}{R+h}$. Porovnaním oboch síl dostávame $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(R+h)^2} = \frac{\mathrm{m.v}_0^2}{R+h}$ a po úprave $\mathrm{v}_0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{m}}\frac{Q^2}{R+h}}$

Ak má náboj uniknúť do nekonečnej vzdielenosti jeho kinetická energia musí byť väčšia (alebo aspoň rovná) rozdielu potenciálnej energie medzi počiatočnou a koncovou polohou. Rozdiel potenciálnej energie sa dá napísať ako $\Delta W_p = Q.\Delta\varphi = Q.\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R+h} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\infty}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R+h}$. Zmena kinetickej energie bude zasa $\Delta W_k = \left[\frac{m.\mathrm{v}_0^2}{2} - \frac{m.0^2}{2}\right] = \frac{m.\mathrm{v}_0^2}{2}$ (ak náboj v nekonečne zastane). V oboch rovniciach sú uvažované len absolútne hodnoty rozdielu energií aby sme nestrácali čas detailným označovaním negatívnej väzbovej energie opačných nábojov, ktorá je prekonávaná ubúdaním kinetickej energie, pričom celková energia sa samozrejme zachováva. Porovnaním predchádzajúcich rovníc nájdeme najnižšiu potrebnú v_0 ako $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R+h} = \frac{m.\mathrm{v}_0^2}{2}$ a po úprave $\mathrm{v}_0 = \sqrt{\frac{2}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{m}}\frac{Q^2}{R+h}}$ Úniková rýchlosť je teda aj v elektrostaticky viazaných sústavách vyššia o $\sqrt{2}$ ako orbitálna, rovnako ako pre gravitačne viazané objekty.

3. Uvažujme nekonečnú rovinu nabitú plošnou hustotou náboja **+σ**. Na povrchu tejto roviny (ale dokonale izolovane) je umiestnená veľmi tenká kruhová obruč s polomerom **R** na ktorej je umiestnený náboj opačnej polarity a veľkosťou rovnaký ako na časti nabitej roviny ohraničenej uvedenou obručou. Určte závislosť (priebeh) intenzity a potenciálu ako funkcie vzdialehosti (y) od roviny na osi prechádzajúcej stredom obruče a kolmej na rovinu. Každý výsledok podložte výpočtom! (5 bodov)

Riešenie:
Kladne nabitá nekonečná rovina vytvára vo svojom okolí homogénne eletrické pole s intenzitou $E_1 = \dfrac{+\sigma}{2\varepsilon_0}$, kde kladný smer je preč od roviny. Tento výsledok je dôsledkom aplikácie Gaussovej vety pre tok intenzity v uvažovanej geometrii (nechce sa mi to na počítači kresliť, až tak dobre ma neplatia). Celkové pole v okolí roviny aj obruče môžeme počítať ako superpozíciu poľa platne a obruče. Intenzitu poľa generovanú obručou na jej osi vypočítame ako súčet príspevkov jednotlivých nekonečne malých kúskov obruče. Vzhľadom na osovú symetriu obruče sa zložky intenzity rovnobežné s rovinou obruče vždy zrušia (od vzájomne protiľahlých kúskov obruče). Výsledná (y-ova) zložka intenzity pozdĺž osi obruče sa určí ako (počiatok vzťažného systému sme umiestnili do jej stredu)

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{-dQ}{r^3}\vec{r}.\vec{j} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\gamma R d\alpha}{R^2+y^2}.\cos\vartheta = \frac{-\gamma R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{y}{(R^2+y^2)^{3/2}}d\alpha\,,$$

kde γ je dĺžková hustota náboja na obruči rovná $\gamma = \dfrac{Q}{2\pi R} = \dfrac{\sigma\pi R^2}{2\pi R} = \dfrac{\sigma R}{2}$ Záporné znamienko je vynechané lebo je vo výraze pre E. Po dosadení a integrovaní dostávame $E_2 = \dfrac{-\sigma R^2}{4\varepsilon_0}\dfrac{y}{(R^2+y^2)^{3/2}}$ a pre celkovú intenzitu píšeme

$$E_c(y) = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0}\frac{y}{(R^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R^2}{2}\frac{y}{(R^2+y^2)^{3/2}}\right).$$

Priebeh potenciálu určíme integrovaním zo vzťahu potenciálu a intenzity v zmysle $\Delta\varphi = -\int \vec{E}_c.d\vec{r} = -\int \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{R^2}{2}\dfrac{y}{(R^2+y^2)^{3/2}}\right)dy$ kde sme využili skutočnosť, že E_c má smer totožný so smerom osi y. V dôsledku kalibračnej voľnosti vo výbere hodnoty potenciálu môžeme zvoliť $\varphi = 0$ v bode y=0 a vlastný integrál nadobúda tvar $\varphi(y) - 0 = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\int_0^y \left(y - \dfrac{R^2}{2}\dfrac{y}{(R^2+y^2)^{3/2}}\right)dy\right)$. Druhý člen integrujeme pomocou substitúcie $t = R^2 + y^2$ a dostávame $\varphi(y) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\left(y\right]_0^y + \dfrac{R^2}{2}\left(\dfrac{1}{(R^2+y^2)^{1/2}}\right]_0^y\right)$ a po úprave $\varphi(y) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{R}{2} - y - \dfrac{R^2}{2}\dfrac{1}{(R^2+y^2)^{1/2}}\right)$