15 Magnetický moment tyčového magnetu

Autor pôvodného textu: **Drahoslav Barančok**

Úloha: Určiť magnetický moment permanentného tyčového magnetu pomocou buzoly a metódou torzných kmitov

Teoretický úvod

Magnetický moment tyčového magnetu, ale aj cievky ktorou prechádza elektrický prúd, je veličina slúžiaca na kvantifikáciu magnetu (cievky) ako zdroja magnetického poľa. Čím silnejšie pole vytvárajú vo svojom okolí, tým väčší magnetický moment im prisudzujeme. Ale aj naopak, ak sa objekt s magnetickým momentom nachádza vo vonkajšom magnetickom poli, potom účinok poľa na objekt závisí od veľkosti jeho magnetického momentu. V homogénnom magnetickom poli s indukciou $\boldsymbol{B}$, na objekt s magnetickým momentom $\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}$ pôsobí moment sily $\boldsymbol{M}$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m}_{\mathrm{m}} \times \boldsymbol{B} \,. \tag{15.1}$$

Tento vzťah sa všeobecne považuje za definičný pre magnetický moment, bez ohľadu na to či ide o cievku alebo tyčový magnet. Magnetický moment ako vektorová veličina, v prípade kruhovej cievky je rovnobežný s jej geometrickou osou, pri tyčovom magnete s jeho magnetickou osou, čiže spojnicou južného a severného pólu. Zo vzťahu (15.1) získame fyzikálny rozmer magnetického momentu, teda aj jednotku tejto veličiny. Uvedomíme si, že rozmer momentu sily je $\mathrm{N{\cdot}m} = \mathrm{kg{\cdot}m^2/s^2}$, a jednotkou magnetickej indukcie je tesla, pričom $1\ \mathrm{T} = 1\ \mathrm{N/(A{\cdot}m)} = 1\ \mathrm{kg/A{\cdot}s^2}$. S prihliadnutím na vzťah (15.1) pre rozmer magnetického momentu získame výsledok

$$[m_{\mathrm{m}}] = \frac{[M]}{[B]} = \frac{\mathrm{N \cdot m}}{\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{A \cdot m}}} = \mathrm{A \cdot m^2} \,. \tag{15.2}$$

Tento výsledok je v súlade so vzťahom vyjadrujúcim magnetický moment uzavretej prúdovej slučky, ktorou prechádza prúd I a ktorá ohraničuje plochu veľkosti S : $m_{\mathrm{m}} = IS$.

Objekt s magnetickým momentom $\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}$ vytvára vo svojom okolí magnetické pole, ktorého magnetická indukcia sa vyjadruje vzťahom:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\left[\frac{3(\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}} \cdot \boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}}{r^3}\right], \tag{15.3}$$

v ktorom $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor miesta v ktorom určujeme magnetickú indukciu $\boldsymbol{B}$ vzhľadom na stred objektu s magnetickým momentom (vzťah je analógiou vyjadrenia intenzity elektrického poľa v okolí elektrického dipólu). Tento vzťah nie je celkom korektný v malých vzdialenostiach. Platí tým presnejšie, čím je vzdialenosť r vzhľadom na veľkosť objektu s magnetickým momentom väčšia.

Vzťahy (15.1) a (15.3) sa dajú využiť na meranie magnetického momentu tyčového magnetu. V ***prvom prípade*** sa môže využiť pôsobenie zemského magnetického poľa na magnet zavesený na dlhšom tenkom závese, ktorý umožňuje torzné kmitanie magnetu v horizontálnej rovine. Doba kmitu magnetu závisí od veľkosti magnetického momentu.

V ***druhom prípade*** sa využíva vplyv magnetického poľa magnetu na magnetku buzoly. Pole magnetu sa skladá so zemským poľom, ktoré považujeme za známe a z výchylky magnetky po priblížení magnetu, sa dá vypočítať magnetický moment magnetu.

A Meranie magnetického momentu tangentovou buzolou.

Základným vzťahom používaným pri tejto metóde je vzťah (15.3). V dvoch špeciálnych prípadoch, v tzv. Gaussových polohách, nadobúda zjednodušený tvar. V prvej Gaussovej polohe, ktorá sa najčastejšie používa ide o prípad, keď vektor $\boldsymbol{r}$ je rovnobežný s vektorom magnetického momentu $\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}$ (osou tyčového magnetu). Ak zvolíme jednotkový vektor $\boldsymbol{j}$ tak, aby bol s týmito vektormi súhlasne rovnobežný, potom vektory môžeme vyjadriť ako jeho skalárne násobky: $\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}} = m_{\mathrm{m}}\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{j}$. Vtedy sa vzťah (15.3) dá takto upraviť:

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{GI}} = \frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\left[\frac{3(\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}}{r^3}\right] = \frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\left[\frac{3(m_{\mathrm{m}}r)\,r\,\boldsymbol{j}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}}{r^3}\right] = \frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\left[\frac{3(r^2)\,m_{\mathrm{m}}\,\boldsymbol{j}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}}{r^3}\right] =$$

$$= \frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\left[\frac{3\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}}{r^3} - \frac{\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}}{r^3}\right] = \frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\frac{2\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}}{r^3} = \frac{\mu_{\mathrm{o}}\,\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}}{2\pi r^3}\ .$$

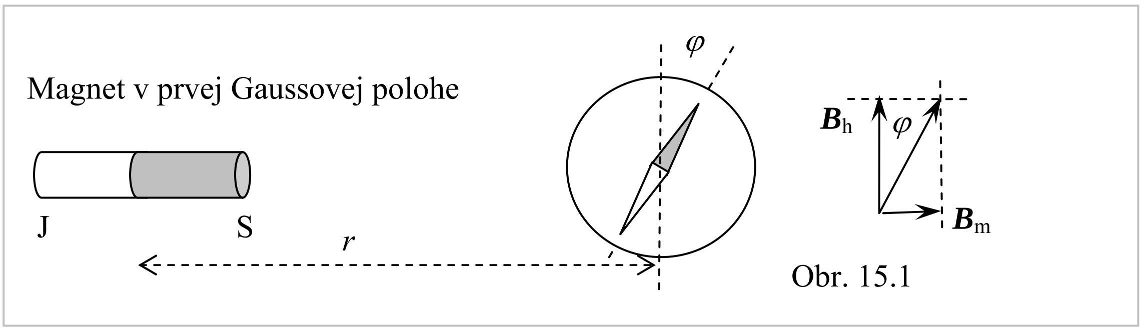
Pre indukciu magnetického poľa v prvej Gaussovej polohe preto platí vzťah

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{GI}} = \frac{\mu_{\mathrm{o}}\,\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}}{2\pi r^3}\ . \tag{15.4}$$

Vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}_{\mathrm{GI}}$ má v tomto prípade smer magnetického momentu, teda smer spojnice južného a severného pólu magnetu.

Metóda merania

Tyčový magnet sa umiestni v horizontálnej rovine do istej vzdialenosti od buzoly tak, aby vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}$ poľa vytvoreného magnetom bol kolmý na horizontálnu zložku zemského magnetického poľa $\boldsymbol{B}_{\mathrm{h}}$. Magnetka sa ustáli v polohe ukazujúcej smer výsledného magnetického poľa, od magnetického poludníka sa odchýli o uhol φ .



Obr. 15.1

Z obrázku vidno, že tgφ = B_{m} / B_{h} . Po dosadení hodnoty B_{GI} za B_{m} zo vzťahu (15.4), dostaneme výsledok

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{B_{\mathrm{m}}}{B_{\mathrm{h}}} = \frac{\mu_{\mathrm{o}}m_{\mathrm{m}}}{2\pi r^3}\frac{1}{B_{\mathrm{h}}}\ . \tag{15.5}$$

Z tohto vzťahu sa dá vypočítať magnetický moment, ak poznáme veľkosť horizontálnej zložky magnetickej indukcie zemského poľa B_h a zmeriame výchylku φ magnetky v istej vzdialenosti r magnetu od buzoly. Zmeraním výchylky pri viacerých vzdialenostiach zaručíme vyššiu presnosť merania.

Opis aparatúry a postup práce

a) Prístroje a pomôcky: buzola, tyčový magnet, základná meracia doska s vyznačenými vzdialenosťami.

b) Postup práce

Základnú dosku uložíme tak, aby magetkou indikovaný severo-južný smer bol kolmý na žliabok, do ktorého sa vkladá tyčový magnet. Potom do žliabku položíme magnet tak, aby jeho stred od stredu buzoly bol vo vzdialenosti r_1 . Odmeriame uhol φ_1 o ktorý sa magnetka odchýli od magnetického poludníka vplyvom poľa magnetu. Meriame pri rôznych vzdialenostiach r_i a údaje zapisujeme do tabuľky (tab. 15.1). Potom magnet otočíme, aby k buzole bol bližšie jeho druhý pól a meriame výchylky φ_2 (na opačnú stranu) a to pri rovnakých vzdialenostiach r_i ako v predošlom prípade. Z absolútnych hodnôt výchyliek φ_1 a φ_2 vypočítame aritmetický priemer $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$.

Ako vyplýva zo vzťahu (15.5), závislosť tg φ od hodnoty $1/(r^3)$ je lineárna,

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\mu_o m_m}{2\pi r^3}\frac{1}{B_h} = k\frac{1}{r^3} \quad ,$$

pričom smernicou tejto závislosti je

$$k = \frac{\mu_o m_m}{2\pi B_h} \quad . \tag{15.6}$$

Smernicu získame, keď zostrojíme graf závislosti tgφ = $k(1/r^3)$. Pomedzi vynesené namerané body preložíme optimálnu priamku. Po získaní hodnoty smernice vypočítame veľkosť magnetického momentu m_m použitím vzťahu (15.6).

Smernicu možno získať aj vhodným grafickým programom, napr. Origin, Excell, ktorý nameranú závislosť zobrazí a smernicu regresnej priamky aj vypočíta.

Hlavička tabuľky 15.1

i	r_i (m)	φ_1	φ_2	$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$	$\frac{1}{r^3}$ (m^{-3})	tg φ
1						

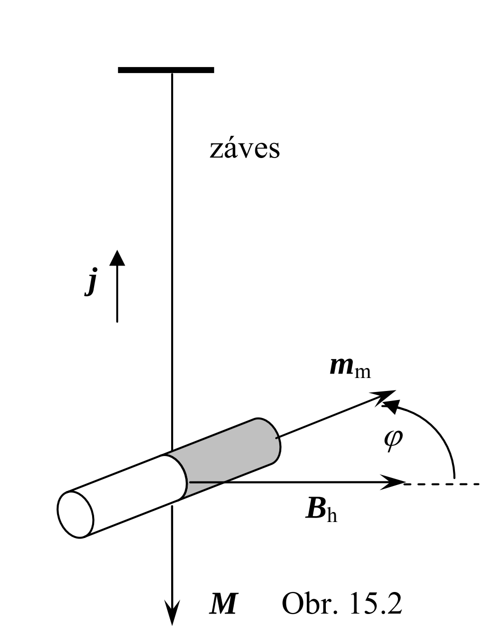
Výpočet ekvivalentného prúdu

Permanentný magnet tvaru tyče s prierezom S a dĺžkou l má magnetický moment m_m . Akú hodnotu I_{ekv} má mať (ekvivalentný) elektrický prúd prechádzajúci prúdovou slučkou obopínajúcou plochu s obsahom S , aby vytvoril rovnako veľký magnetický moment? Ak by takýto prúd prechádzal povrchom valca s rozmermi magnetu (kolmo na jeho os), koľko ampérov by pripadalo na centimeter dĺžky magnetu? Za veličiny m_m , S a l dosaďte reálne hodnoty tyčového magnetu, ktorý ste merali.

B Meranie magnetického momentu metódou torzného kyvadla

Ako bolo uvedené v prvej časti textu, v homogénnom magnetickom poli s indukciou $\boldsymbol{B}$, na objekt s magnetickým momentom $\boldsymbol{m}_\mathrm{m}$ pôsobí moment sily $\boldsymbol{M}$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m}_\mathrm{m} \times \boldsymbol{B} . \tag{15.7}$$



Obr. 15.2

Ak v laboratóriu voľne zavesíme tyčový magnet na dlhší záves tak, aby os magnetu bola vodorovná, horizontálna zložka zemského magnetického poľa bude otáčať magnet do takej polohy, aby os magnetu bola rovnobežná s lokálnym magnetickým poludníkom, t.j. s lokálnym vektorom $\boldsymbol{B}_\mathrm{h}$. Ak je os magnetu od poludníka vychýlená o uhol φ , potom veľkosť momentu sily pôsobiaceho na magnet má hodnotu

$$M = m_\mathrm{m} B_\mathrm{h} \sin\varphi . \tag{15.8}$$

Volne zavesený magnet sa začne otáčať, pričom na tento pohyb sa vzťahuje pohybová rovnica telesa otáčajúceho sa okolo pevnej osi:

$$\boldsymbol{M} = J \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t^2} , \tag{15.9}$$

v ktorom J je moment zotrvačnosti magnetu vzhľadom na vertikálnu os zhodnú so závesom. V poslednej rovnici vyjadríme vektory $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{\varphi}$ ako skalárne násobky jednotkového vektora $\boldsymbol{j}$. Pritom si uvedomíme, že uhol φ meriame smerom od vektora $\boldsymbol{B}_\mathrm{h}$ takže vektor $\boldsymbol{\varphi}$ je súhlasne rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{j}$, ale vektor $\boldsymbol{M}$ má opačný smer:

$$\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{j}\ m_\mathrm{m} B_\mathrm{h} \sin\varphi , \quad \boldsymbol{\varphi} = \varphi\,\boldsymbol{j} .$$

Po dosadení do pohybovej rovnice (15.9) dostaneme:

$$-\boldsymbol{j}\, m_\mathrm{m} B_\mathrm{h} \sin\varphi = \boldsymbol{j}\, J \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{m_\mathrm{m} B_\mathrm{h}}{J} \sin\varphi = 0 .$$

Ak budeme merať iba pri malých výchylkách, pri ktorých funkciu $\sin\varphi$ možno s dostatočnou presnosťou nahradiť priamo uhlom φ (vyjadreným v radiánoch!), potom pohybová rovnica dostane tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{m_\mathrm{m} B_\mathrm{h}}{J} \varphi = 0 , \tag{15.10}$$

čo je pohybová rovnica netlmeného harmonického oscilátora. To znamená, že uhlová frekvencia ω, resp. doba kmitu T magnetu ako torzného kyvadla sú vyjadrené vzťahmi

$$\omega = \sqrt{\frac{m_\mathrm{m} B_\mathrm{h}}{J}} , \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m_\mathrm{m} B_\mathrm{h}}} . \tag{15.11}$$

Z posledného vzťahu môžeme vypočítať magnetický moment m_{m}, ak zmeriame dobu kmitu T a poznáme horizontálnu zložku indukcie zemského magnetického poľa.

Prístroje a pomôcky: permanentný magnet, záves s objímkou, stopky, uhlomer

Postup pri meraní

Magnet vložíme do objímky zavesenej na dlhšom tenkom vlákne a nasmerujeme ho pozdĺž magnetického poludníka. Po ustálení polohy ho vychýlime o uhol $\varphi_1 = 10°$ a necháme kmitať ako torzné kyvadlo. Stopkami zmeriame dobu aspoň desiatich kmitov, výsledok prepočítame na dobu jedného kmitu. Potom merania opakujeme pri začiatočných uhloch postupne sa zväčšujúcich o 10°. Výsledky aspoň piatich meraní vynesieme do grafu a namerané doby kmitu extrapolujeme k nulovému uhlu φ. Takto získanú dobu kmitu dosadíme do vzťahu (15.11) a vypočítame magnetický moment magnetu.

Halvička tabuľky 15.2

Meranie:	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	extrapolácia k $\varphi = 0$
T (s)						

C Kombinácia úloh 15a a 15b

Metódy merania magnetického momentu uvedené v úlohách 15a a 15b , sa dajú využiť na súčasné stanovenie veľkosti magnetického momentu tyčového magnetu, a horizontálnej zložky indukcie zemského magnetického poľa. Zo vzťahu (15.6) získame podiel magnetického momentu a veľkosti horizontálnej zložky:

$$k = \frac{\mu_o m_m}{2\pi B_h} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_m}{B_h} = \frac{2\pi k}{\mu_o} = a \;, \tag{15.12}$$

a zo vzťahu (15.11) ich súčin:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m_m B_h}} \quad \Rightarrow \quad m_m B_h = \frac{4\pi^2 J}{T^2} = b \;. \tag{15.13}$$

Súčinom vzťahov (15.12) a (15.13) získame druhú mocninu magnetického momentu:

$$m_m^{\ 2} = \frac{2\pi k}{\mu_o}\frac{4\pi^2 J}{T^2} = \frac{8\pi^3 kJ}{\mu_o T^2} = ab \quad \Rightarrow \quad m_m = \sqrt{ab} \;, \tag{15.14}$$

ich podielom druhú mocninu horizontálnej zložky:

$$B_h^{\ 2} = \frac{2\pi\mu_o J}{kT^2} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad B_h = \sqrt{\frac{b}{a}} \;. \tag{15.15}$$

Meno: Krúžok: Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy 15.
Meranie magnetického momentu tyčového magnetu

Stručný opis metód merania:

Vzťahy ktoré sa používajú pri meraní:

Prístroje a pomôcky:

Úloha A

Tabuľka 15.1

i	r_i (m)	φ_1	φ_2	$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$	$\frac{1}{r^3}$ (m^{-3})	tg φ
1						
2						
3						

Výpočet

Potrebné údaje: $B_h = 20\ \mu T$, alebo podľa úlohy č. 14., $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m .

Smernica závislosti tg $\varphi = k\,(1/r^3)$	$k =$
Magnetický moment magnetu $m_m = \dfrac{2\pi k B_h}{\mu_o}$	$m_m =$
Odhadnutá smerodajná odchýlka aritm. priemeru	$s_{\bar{x}} =$
Výsledok merania s neistotou merania	$m_m =$
Ekvivalentný elektrický prúd	$I_{ekv} =$

Tu vpíšte výpočty s uvedením hodnôt a rozmerov veličín:

$m_m =$

$I_{ekv} =$

Úloha B

Tabuľka 15.2

Meranie:	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	extrapolácia k $\varphi = 0$
T_{10} (s)						
T_1 (s)						

Výpočet

Moment zotrvačnosti magnetu $J =$ $B_h = 20\ \mu T$, alebo podľa úlohy č. 14.,

Extrapolovaná doba kmitu magnetu	$T =$
Magnetický moment magnetu $m_m = \dfrac{4\pi^2 J}{B_h T^2}$	$m_m =$
Odhadnutá smerodajná odchýlka priemeru	$s_{\bar{x}} =$
Výsledok s neistotou merania	$m_m =$

Tu vpíšte výpočet s uvedením hodnôt a rozmerov veličín:

$m_m =$

C Výpočet z kombinácie úloh A a B

$k =$	$T =$
$a = \dfrac{2\pi k}{\mu_o} =$	$b = \dfrac{4\pi^2 J}{T^2} =$
$m_m = \sqrt{ab} =$	$B_h = \sqrt{\dfrac{b}{a}} =$

Tu vpíšte výpočty s uvedením hodnôt a rozmerov veličín:

$a =$

$b =$

$m_m =$

$B_h =$

K protokolu treba pripojiť
A) graf závislosti tg(φ) = f(1/r^3),
B) graf závislosti doby kmitu tyčového magnetu od začiatočnej výchylky.

Slovné zhodnotenie výsledkov, porovnanie hodnôt získaných dvomi metódami

Dátum odovzdania protokolu:

Podpis študenta: **Podpis učiteľa:**