

Chvenie struny

Autor pôvodného textu: **Jozef Lasz**

Úloha: A Zmerať základnú frekvenciu chvenia struny a závislosť tejto frekvencie od dĺžky struny a od sily, ktorou je struna napínaná.
 B Zo smernice tejto závislosti určiť dĺžkovú hmotnosť struny s .
 C Vypočítať rýchlosť, ktorou sa vlnenie šíri strunou.

Teoretický úvod

Struna predstavuje jednorozmerné prostredie, ktorým sa môže šíriť vlnenie. V takomto prípade sa vlnenie opisuje jednorozmernou diferenciálnou rovnicou - **vlnovou rovnicou**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\text{S.1})$$

kde $u(x, t)$ je okamžitá výchylka elementu struny, ktorá závisí od polohy x na strune a od času t , a v je rýchlosť, ktorou sa rozruch (vlna) po strune šíri. Rýchlosť v závisí od hrúbky struny – presnejšie od hmotnosti s pripadajúcej na jednotku dĺžky struny (dĺžkovej hmotnosti) a od sily F_0 , ktorou je struna napínaná

$$v = \sqrt{\frac{F_0}{s}}. \quad (\text{S.2})$$

Keď na istom mieste struny (napríklad so súradnicou $x = 0$) budeme trvale generovať harmonický (sínusový) rozruch, tento sa bude šíriť po strune, pričom funkcia $u_1(x, t)$ vyjadrujúca postupujúcu vlnu, bude mať vtedy tvar

$$u_1(x, t) = A_1 \sin \left[\omega_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] = A_1 \sin \left[2\pi f_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) \right], \quad (\text{S.3})$$

kde A je amplitúda vlny, f jej frekvencia a ω jej uhlová frekvencia. Rovnica (S.3) je riešením vlnovej rovnice (S.1) a vyjadruje vlnu postupujúcu v kladnom smere osi x . Ak je struna na jednom konci upevnená (napríklad zavesená za jeden koniec), vlna šíriaca sa od voľného kmitajúceho konca struny sa na upevnenom konci odrazí a postupuje nazad, proti prichádzajúcej vlne. Výchylku $u_2(x, t)$ odrazenej vlny, ako funkciu polohy a času vyjadríme rovnicou

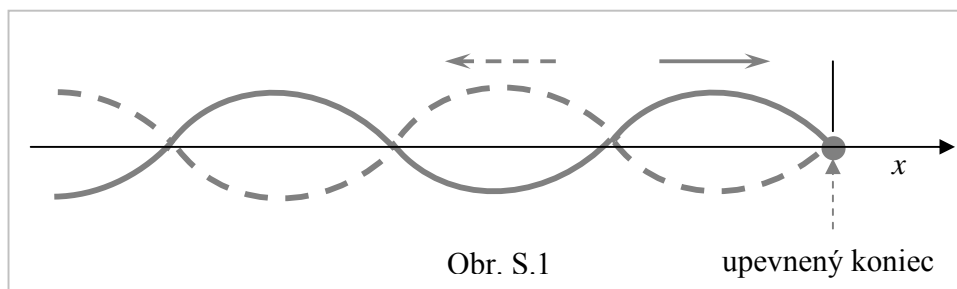
$$u_2(x, t) = A_2 \sin \left[\omega_2 \left(t + \frac{x}{v} \right) \right] = A_2 \sin \left[2\pi f_2 \left(t + \frac{x}{v} \right) \right]. \quad (\text{S.4})$$

V argumente funkcie sínus namiesto znamienka „-“ vystupuje znamienko „+“, čím sa zohľadňuje opačný smer postupu vlny pozdĺž osi x . Odrazená vlna má vždy rovnakú frekvenciu ako vlna dopadajúca a predpokladajme, že má aj rovnakú amplitúdu. Je známe, že ak k upevnenému koncu struny prichádza vlna s výchylkou „nahor“ (považujme ju za kladnú),

Struna

pri odraze sa výchylka zmení na „zápornú“ (obr. S.1). To znamená, že v rovnici (S.4) namiesto A_2 napíšeme $-A_1$. Strunou postupujú protismerné vlny s rovnakými frekvenciami a výsledná výchylka sa rovná súčtu výchyliek jednotlivých vln:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) = 2A \cos(\omega t) \sin(\omega x/v), \quad (\text{S.5})$$



pričom pri amplitúde bol vynechaný index. V rovnici (S.5) ako argumenty funkcií sínus a kosínus už nevystupujú členy s tvarom $(x - t/v)$, resp. $(x + t/v)$, charakterizujúce postupujúce vlny. To znamená, že výsledkom skladania (interferencie) týchto vln nie je postupujúce vlnenie, ale harmonické kmitanie jednotlivých elementov struny uhlovou frekvenciou ω . Prítom niektoré z elementov struny kmitajú s amplitúdou $2A$ (tzv. **kmitne**), iné majú trvale nulovú výchylku (tzv. **uzly**).

Z rovnice (S.5) vyplýva, že v mieste uchytenia struny, kde $x = 0$, je výchylka $u(0, t)$ trvale nulová - upevnený koniec struny nemôže kmitať. Frekvencia vln šíriacich sa po strune nie je upevnením jedného bodu struny obmedzená, môže byť ľubovoľná. Ak sa však upevní aj druhý koniec struny, ako to býva v hudobných nástrojoch, situácia sa zmení a po strune sa môžu šíriť iba vlny určitých frekvencií – a teda aj elementy struny môžu kmitať iba na týchto frekvenciách.

Ak dĺžku struny označíme L , teda jej druhý upevnený koniec má súradnicu $x = L$, potom z rovnice (S.5) vyplýva, že sa musí splniť podmienka

$$\sin\left(\frac{\omega}{v}L\right) = \sin\left(\frac{2\pi f}{v}L\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2\pi f}{v}L\right) = n\pi,$$

kde n je prirodzené číslo. Z posledného vzťahu vyplýva dôležitá podmienka pre frekvenciu f kmitania struny upevnenej na oboch koncoch:

$$f_n = \frac{v}{2L}n = n f_1, \quad f_1 = \frac{v}{2L}, \quad (\text{S.6})$$

kde f_1 je **základná frekvencia** struny a ostatné sú **vyššie harmonické frekvencie**. Frekvencie struny upevnenej na oboch koncoch môžu byť iba celočíselnými násobkami základnej frekvencie.

Keď spojíme vzťahy (S.2) a (S.6), dostaneme

$$f_n = \frac{v}{2L}n = n \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F_0}{s}}, \quad f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F_0}{s}}, \quad (\text{S.7})$$

čo je vzťah ktorý sa bude používať pri tejto laboratórnej úlohe.

Struna

Je vhodné si uvedomiť, že medzi frekvenciou f , vlnovou dĺžkou λ a rýchlosťou v šírenia harmonickej vlny platí vzťah

$$v = f\lambda. \quad (\text{S.8})$$

Keď ho dosadíme do (S.7), dostaneme

$$f_n = \frac{v}{2L}n = \frac{f_n \lambda_n}{2L}n \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{\lambda_1}{n}. \quad (\text{S.9})$$

To znamená, že základná vlnová dĺžka λ_1 harmonickej vln postupujúcej strunou sa rovná dvojnásobku dĺžky L struny, všetky ostatné do úvahy prichádzajúce (dovolené) vlnové dĺžky sú jej zlomkami.

Meranie

V zariadení kde je upnutá struna, pomocou posuvných mostíkov a priloženej stupnice vymedzíme pevné body struny – a tým jej dĺžku L . Závažie s hmotnosťou $m_Z = 1,020$ kg a teda tiažou $F_Z = 10$ N, zavesíme do prvej priehlbiny napínacieho ramena. Vtedy sa napínacia sila F_0 struny rovná tiaži závažia (v druhej priehlbine $F_0 = 20$ N, atď.).

Strunu rozkmitáva zdrojová cievka (v podstate elektromagnet) napájaná z generátora harmonickej kmitania. Cievku treba umiestniť približne 10 cm od ľavého uchytenia (pevného bodu) struny. Kmitanie struny sa sníma detekčnou cievkou, ktorú zvyčajne umiestňujeme do stredu struny, lebo tam má struna najväčšiu amplitúdu. (Ak by sme chceli registrovať prvú vyššiu harmonickej frekvencie, treba cievku posunúť mimo stredu struny!) V snímačnej cievke sa generuje elektrické napätie, ktorého veľkosť je úmerná amplitúde a frekvencii kmitania struny.

Zdrojovú a snímačnú cievku nedávame blízko k sebe, mohlo by dôjsť k nežiadúcej väzbe medzi nimi, čím by sa skreslil snímaný signál.

Signály z generátora a z detekčnej cievky sa privádzajú na vstupy dvojkanálového (dvojlúčového) osciloskopu. Signál z generátora, zobrazovaný jedným z lúčov, má sínusový priebeh. Druhý lúč, zobrazujúci signál z detekčnej cievky, kreslí na obrazovke spočiatku iba mierne zvlnenú čiaru. Postupne zvyšujeme frekvenciu generátora f_G (začínáme približne pri frekvencii 100 Hz) a sledujeme obrazovku osciloskopu. Keď sa frekvencia priblíži k rezonančnej frekvencii (vlastnej frekvencii struny), objaví sa aj na druhom lúči sínusový priebeh, ktorý pri presnom nastavení rezonančnej frekvencie dosahuje maximálnu amplitúdu. Na obrazovke vidno, že frekvencia kmitania struny je dvojnásobná v porovnaní s frekvenciou generátora. Elektromagnet zdrojovej cievky priťahuje strunu počas jednej periódy dvakrát, lebo príťažlivá sila nezávisí od smeru prúdu v cievke. Preto

$$f_1 = 2f_G.$$

Po určení rezonančnej frekvencie f_1 zmeníme napínaciu silu F_0 (závažie posunieme do nasledujúcej priehlbiny) a opäť určíme rezonančnú frekvenciu. Výsledky zapisujeme do tabuľky.

Struna

Keď vyčerpáme všetky možnosti napínacej sily F_0 , zmeníme dĺžku struny a postup opakujeme a výsledky zapisujeme do ďalšej tabuľky. Odporúčané dĺžky struny sú od 30 cm po 60 cm. Merať treba aspoň pri troch dĺžkach struny.

Hlavička tabuľky

$L =$		$\lambda =$		
F_0 (N)	f_G (Hz)	f_1 (Hz)	v_{exp} (m/s) podľa (S.8)	v_{teor} (m/s) podľa (S.2)

Pri každej dĺžke struny L a každej napínacej sile F_0 vypočítame pomocou vzťahu (S.8) príslušné rýchlosti v_{exp} postupujúceho vlnenia strunou.

Pomocou vzťahu (S.7) určíme dĺžkovú hustotu s struny. Závislosť frekvencie f_1 od odmocniny napínacej sily je podľa tohto vzťahu lineárna:

$$f_1 = k \sqrt{F_0}, \text{ kde smernica tejto závislosti } k = \frac{1}{2L\sqrt{s}}.$$

Smernicu k získame z grafu tejto závislosti, čo využijeme na výpočet dĺžkovej hmotnosti struny:

$$s = \frac{1}{4L^2k^2}.$$

Vypočítanú hodnotu porovnáme s údajom uvádzaným výrobcom struny, ktorý nájdeme na tabuľke umiestnenej pri úlohe.

Po určení dĺžkovej hmotnosti vypočítame hodnoty rýchlosti šírenia vln strunou v_{teor} pomocou vzťahu (S.2), a porovnáme s hodnotami v_{exp} .

Nakoniec si vynesением grafu overíme, že či je závislosť štvorca rýchlosti vlnenia od napínacej sily je lineárna.

Otázky

Prečo treba detekčnú cievku posunúť mimo stredu struny, ak chceme snímať vyššie harmonické frekvencie?

Meno:

Kružok:

Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy S

Chvenie struny

Stručný opis metódy merania:

Vzťahy ktoré sa používajú pri meraní:

Prístroje a pomôcky:

Tabuľky:

$L =$		$\lambda =$		
F_0 (N)	f_G (Hz)	f_1 (Hz)	v_{exp} (m/s) podľa (S.8)	v_{teor} (m/s) podľa (S.2)

$L =$		$\lambda =$		
F_0 (N)	f_G (Hz)	f_1 (Hz)	v_{exp} (m/s) podľa (S.8)	v_{teor} (m/s) podľa (S.2)

$L =$		$\lambda =$		
F_0 (N)	f_G (Hz)	f_1 (Hz)	v_{exp} (m/s) podľa (S.8)	v_{teor} (m/s) podľa (S.2)

Výpočet

Tu vpište po jednom konkrétnom výpočte s uvedením hodnôt a rozmerov veličín:

$v_{\text{exp}} =$

$k =$

$s =$

$v_{\text{teor}} =$

K protokolu treba pripojiť graf závislosti nameranej rezonančnej frekvencie struny od druhej odmocniny sily naťahujúcej strunu – pri jednej z jej dĺžok.

Slovné zhodnotenie výsledkov merania:

Dátum odovzdania protokolu:

Podpis študenta:

Podpis učiteľa: