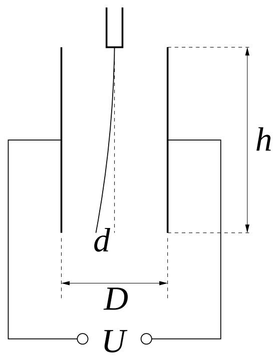
Posledná aktualizácia: 28. septembra 2009. Čo bolo aktualizované (oproti predošlej verzii zo 16. 2. 2000): len drobné úpravy: spresnené formulácie niektorých zadaní; opravené drobné preklepy a chyby; iné malé úpravy; pridané záhlavie s týmito informáciami.

# ELEKTROSTATIKA

1. Aký náboj $q$ nesie padajúca kvapka ortute s hustotou $\rho_{\mathrm{Hg}}$ o polomere $R$, keď po prelete cez homogénne elektrické pole sa odchýli od zvislice o $d$ (obr.1)?

   $\left[q = \dfrac{4\pi\rho_{\mathrm{Hg}} DdgR^3}{3Uh}\right]$




2. Akou silou $F$ pôsobia na seba dosky vzduchového kondenzátora s kapacitou $C$, nabitého nábojom $Q$, keď vzdialenosť dosiek je $d$?

   $\left[F = Q^2/(2Cd)\right]$

3. Akou silou pôsobia na seba dve polárne molekuly vzdialené o $r$, s dipólovými momentami orientovanými a) v smere ich spojnice, b) kolmo na smer ich spojnice?

   $\left[\text{a) príťažlivou } F = \dfrac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0 r^4}\ ;\ \text{b) odpudivou } F/2\right]$

4. Vypočítajte kapacitu jednotky dĺžky koaxiálneho kábla, ktorého polomer vnútorného vodiča je $r$, vonkajšieho je $R$ a permitivita dielektrika medzi nimi je $\varepsilon$.

   $\left[C = \dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln(R/r)}\right]$

5. Koľko elektrónov obsahuje náboj častice prachu o hmotnosti $m = 10^{-10}$ g, keď sa vznáša medzi vodorovnými doskami kondenzátora so vzdialenosťou dosiek $h = 0{,}5$ cm a potenciálovým rozdielom $U = 800$ V ?

   $\left[N = \dfrac{mgh}{eU} = 38\right]$

6. Aký veľký musí byť polomer osamelej vodivej gule, aby sa na ňu zmestil náboj 1 C bez toho, aby nastalo sršanie, keď maximálna intenzita elektrického poľa vo vzduchu, pri ktorej ešte sršanie nenastáva, je $2{,}5 \times 10^{-5}$V/m ? ($\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}$ m$^{-3}$ kg$^{-1}$ s$^4$ A$^2$.)

   [> 190m]

7. Aká časť energie elektrostatického poľa nabitej vodivej gule s polomerom $R$ je vo vnútri jej ekvipotenciály s polomerom $2R$?

   [1/2 celkovej energie]

8. Nájdite frekvenciu $f$ malých kmitov okolo rovnovážnej polohy elektrického dipólu s dipólovým momentom veľkosti $p$ a momentom zotrvačnosti vzhľadom na os rotácie $J$, ak je umiestnený v homogénnom elektrickom poli s intenzitou $E$.

$$\left[f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pE}{J}}\right]$$

9. Nájdite intenzitu elektrostatického poľa $\vec{E}$ na osi rovnomerne nabitého prstenca tvaru kružnice s polomerom $R$ a nábojom $Q$.

$\left[\vec{E} = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}\,\vec{i}\ .\right.$ (Os kružnice sme zvolili zhodnú s osou $x$ .)]

10. Určte frekvenciu malých kmitov elektrónu, ktorý sa pohybuje v elektrostatickom poli kruhového prstenca s polomerom $R$ nabitého nábojom $Q$ len na osi prstenca kolmej na jeho rovinu okolo rovnovážnej polohy elektrónu. Za malé kmity považujeme také kmity, ktorých amplitúda je oveľa menšia ako $R$. (Pozri výsledok predchádzajúceho príkladu. $e$ je veľkost náboja elektrónu, $m_e$ hmotnosť elektrónu.)

$$\left[f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0 R^3 m_e}}\right]$$

11. Určte prierazné napätie $U_P$ koaxiálneho kábla ak jeho vodiče majú polomery $r_1 < r_2$ a dielektrikum má prieraznú intenzitu elektrického poľa $E_P$ .

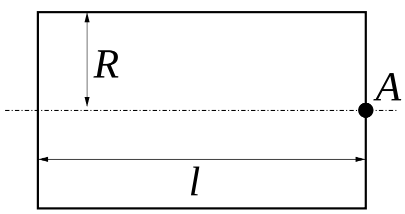
$$\left[U_P = E_P r_1 \ln\frac{r_2}{r_1}\right]$$

12. Nekonečne tenká kruhová doska s polomerom $R$ je nabitá nábojom s konštantnou plošnou hustotou $\sigma$. Vypočítajte vektor intenzity a potenciál elektrostatického poľa v strede dosky a v bode ležiacom na kolmici na dosku a prechádzajúcu jej stredom vo vzdialenosti $x$ od stredu dosky.

$$\left[\begin{array}{ll} \vec{E}(x\to 0\pm) = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}\ ; & V(x\to 0) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \\ \vec{E} = \vec{i}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\ ; & V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{x^2+R^2}-x)\ ,\ x>0 \end{array}\right]$$

13. Vypočítajte intenzitu a potenciál v bode $A$ na osi nevodivej dutej valcovej plochy s výškou $\ell$ a polomerom podstavy $R$, na povrchu ktorej je rovnomerne rozložený náboj $Q$ .

$$\left[V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\ell}\left[\ln(\ell+\sqrt{\ell^2+R^2}-\ln R\right]\ ;\ \ E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\ell}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\sqrt{R^2+\ell^2}}\right)\right]$$




14. Vypočítajte intenzitu elektrostatického poľa vo vzdialenosti $a$ od nekonečne dlhého veľmi tenkého priameho vodiča nabitého nábojom s dĺžkovou hustotou z definičného vzťahu pre absolútny potenciál sústavy bodových nábojov a pomocou Gaussovho zákona pre elektrostatické pole.

$$\left[E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\right]$$

15. Vypočítajte intenzitu elektrostatického poľa plošného náboja rozloženého v nekonečne rozľahlej rovine s plošnou hustotou $\sigma$. Na výpočet použite Gaussov zákon i definičný vzťah pre vektor intenzity elektrostatického poľa sústavy bodových nábojov a výsledky porovnajte.

$$\left[E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right]$$

16. Akú prácu treba vynaložiť na oddialenie dosiek rovinného kondenzátora s kapacitou $C$ pripojeného trvale na zdroj napätia $U$ na dvojnásobok ich vzdialenosti?

$$\left[A = \frac{1}{4}CU^2\right]$$

17. Medzi dosky rovinného kondenzátora vzdialené o $d$ vložíme ďalšiu kovovú dosku hrúbky $a$ vo vzdialenosti $d_1$ od prvej dosky kondenzátora. Aký potenciál je na povrchu vloženej dosky, ak na prvej doske udržiavame potenciál $V_1$ a na druhej doske potenciál $V_2$?

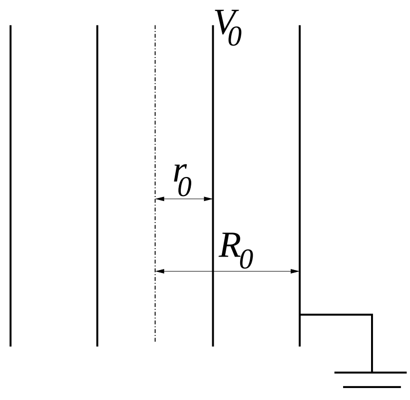
$$\left[V = \frac{V_1(d - d_1 - a) + V_2 d_1}{d - a}\right]$$

18. Akou rýchlosťou sa bude pohybovať náboj $Q > 0$ s hmotnosťou $m$ po kružnici s polomerom $r$ okolo nekonečne dlhého vodiča tvaru valca s polomerom $R < r$ nabitého nábojom s plošnou hustotou $\sigma < 0$?

$$\left[v = \sqrt{\frac{\sigma Q R}{m\varepsilon_0}}\right]$$

19. Vypočítajte priebeh intenzity elektrostatického poľa medzi súosými nekonečne dlhými vodivými valcovými plochami s polomermi $r_0 < R_0$, keď vnútorná valcová plocha má potenciál $V_0$ a vonkajšia je uzemnená (takže na nej je $V = 0$).

$$\left[E(r) = \frac{V_0}{\ln(R_0/r)}\frac{1}{r}\right]$$




20. Dokážte, ze dva osamelé rovnaké bodové náboje $Q$ a $-Q$ vzdialené od seba o $2d$ vytvárajú vo svojom okolí elektrostatické pole, ktorého nulová ekvipotenciálna plocha má tvar roviny prechádzajúcej kolmo na spojnicu oboch nábojov v jej strede. Ako závisí veľkosť intenzity elektrostatického poľa na tejto ekvipotenciálnej ploche od vzdialenosti od stredu spojnice oboch bodových nábojov?

$$\left[E(r) = \frac{Q}{2\varepsilon_0}\frac{d}{(r^2 + d^2)^{3/2}}\right]$$

21. Vo vzdialenosti $d$ od nekonečne rozľahlého vodivého polpriestoru s rovinným povrchom sa nachádza vo vákuu v bode $P$ bodový náboj $Q$. Nájdite závislosť plošnej hustoty indukovaného náboja na povrchu vodivého polpriestoru od vzdialenosti od päty kolmice spustenej z bodu $P$ na rovinu povrchu vodivého polpriestoru a vypočítajte veľkosť tohoto indukovaného náboja. Akou silou je náboj $Q$ priťahovaný k vodivému polpriestoru?

**Návod:** Pretože povrch vodivého polpriestoru predstavuje rovinnú ekvipotenciálnu plochu, na ktorú sú kolmé siločiary elektrostatického poľa, môžeme vzniknutú situáciu nahradiť situáciou z predošlého príkladu, t. j. zrkadlovo s rovinou povrchu vodivého polpriestoru umiestniť (vo vákuu) bodový náboj $-Q$. Pritom vieme, že táto náhrada vodivého polpriestoru „zrkadlovým" bodovým nábojom $-Q$ dáva fyzikálne správnu situáciu len v polpriestore, v ktorom sa nachádza náboj $Q$, pretože vo vnútri vodiča bude $\vec{E} = \vec{0}$. Podľa predchádzajúceho príkladu už vieme vyriešiť závislosť veľkosti intenzity poľa od päty kolmice z bodu $P$ od týchto súmerne rozložených nábojov. Veľkosť indukovaného náboja určíme integráciou plošnej hustoty náboja na povrchu vodivého polpriestoru, pričom plošnú hustotu indukovaného náboja na povrchu vodivej plochy určíme pomocou Coulombovej vety z intenzity poľa v danom mieste rovinného povrchu vodivého polpriestoru. Príťažlivú silu určíme pomocou Coulombovho zákona ako silu medzi nábojmi $Q$ a $-Q$.

$$\left[\sigma_{\text{ind}}(r) = \varepsilon_0 E(r) = \frac{Q}{2\pi}\frac{d}{(r^2+d^2)^{3/2}}\ ;\quad Q_{\text{ind}} = \int_0^\infty \sigma_{\text{ind}}(r) 2\pi r dr = Q\ ;\quad F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2d^2}\right]$$

22. Ak časticu s dipólovým momentom $\vec{p}$ vložíme vo vákuu do homogénneho elektrostatického poľa s intenzitou $\vec{E}_0$ tak, že $\vec{E}_0$ je rovnobežné s $\vec{p}$, potom vo výslednom elektrostatickom poli vzniká jedna ekvipotenciálna hladina tvaru guľovej plochy so stredom v mieste sídla dipólového momentu. Aký bude polomer tejto guľovej plochy?

**Návod:** Predpokladajte, že vektory $\vec{p}$ a $\vec{E}_0$ ležia napr. v smere súradnicovej osi $z$. Vložte časticu s dipólovým momentom do začiatku súradnicovej sústavy. Pre priebeh potenciálu homogénneho poľa v priestore potom možno písať

$$\varphi_0(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{0}} \vec{E}_0 \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\vec{0}} E_0\, \vec{k} \cdot (dx\, \vec{i} + dy\, \vec{j} + dz\, \vec{k}) = \int_z^0 E_0 dz = -E_0 z + C\ ,$$

kde $C$ je aditívna konštanta a $\vec{0}$ je vzťažný bod pre výpočet potenciálu. Súčet potenciálu homogénneho poľa a potenciálu v okolí elektrického dipólu dáva výsledný skalárny potenciál. Uhol medzi smerom $\vec{p}$ a vektorom $\vec{r}$ označte ako $\vartheta$, takže $z = r\cos\vartheta$. Pre výsledný potenciál vychádza pre ľubovoľne zvolené hodnoty $r$ a $\vartheta$ vzťah $\varphi = \frac{pr\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - E_0 r\cos\vartheta + C$. Nájdite podmienku, kedy výsledný potenciál dáva konštatnú hodnotu.

$$\left[R = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 E_0}\right)^{1/3}\right]$$

23. Do homogénneho elektrostatického poľa rovnobežného so súradnicovou osou $z$ je vložená vodivá guľa s polomerom $R$ tak, že jej stred leží v počiatku súradnicovej sústavy. Na povrchu vodivej gule vznikne nerovnomerne rozložený indukovaný náboj. Označme uhol medzi spojnicou uvažovanej plôšky na povrchu gule so stredom gule a osou $z$ ako $\vartheta$. Nájdite závislosť plošnej hustoty indukovaného náboja na povrchu gule od uhla $\vartheta$.

**Návod:** Využite poznatok, že vložením nekonečne tenkej vodivej plochy na ekvipotenciálnu hladinu elektrostatického poľa sa rozloženie poľa neovplyvní. Podľa výsledkov predchádzajúceho príkladu možno potenciál na povrchu gule s polomerom $R$ nahradiť potenciálom elektrického dipólu rovnobežného s $\vec{E}_0$ veľkosti $p = 4\pi\varepsilon_0 R^3$. Vyjadrite preto potenciál dipólu ležiaceho v homogénnom elektrostatickom poli tak, ako v prechádzajúcom príklade, a pomocou vzťahu $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ určte absolútnu hodnotu intenzity pre $r = R$, t. j. na povrchu gule. Pretože $\vec{E}$ je vždy kolmé na povrch vodiča, stačí formálne namiesto úplného gradientu počítať deriváciu potenciálu v radiálnom smere: $E(r=R) = -\left[\frac{\partial V(r)}{\partial r}\right]_{r=R}$, ktorá je (ale len pre $r = R$) zhodná so skutočnou veľkosťou intenzity poľa na povrchu gule. Podľa Coulombovej vety potom $\sigma = \varepsilon_0\, E$.

$[\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\vartheta]$

24. Vypočítajte veľkosť a smer sily pôsobiacej vo vákuu na teleso tvaru úsečky dĺžky $\ell$ rovnomerne nabitého kladným nábojom $Q$ a kolmého na líniový kladný elektrický náboj, ležiaci na priamke s konštatnou dĺžkovou hustotou $\lambda$, ak bližší koniec úsečky je od líniového náboja vzdialený na vzdialenosť $a$. (Vplyv tiaže sa neuvažuje.)

$$\left[F = \frac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln\frac{a+\ell}{a}\ ; \ \text{ sila je odpudivá.}\right]$$

25. Zvislo pod tenkou nevodivou prakticky nekonečne dlhou vodorovne uloženou tyčou rovnomerne nabitou kladným nábojom s dĺžkovou hustotou veľkosti $\lambda$ pridŕžame prstami vo vodorovnej polohe vo vzdialenosti $d$ od tyče teleso tvaru úsečky dĺžky $\ell$ a hmotnosti $m$, ktoré je rovnomerne nabité záporným nábojom s dĺžkovou hustotou veľkosti $\lambda$. Nájdite závislosť okamžitej rýchlosti nabitej úsečky od jej okamžitej vzdialenosti $y$ od tyče. (Príklad riešte v rámci klasickej fyziky.)

**Návod:** Práca výslednej sily sa rovná zmene kinetickej energie telesa tvaru úsečky, priťahovanej zvislo nahor k tyči.

$$\left[v = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{\frac{\lambda^2\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{y} - mg(d-y)}\ ; \ \text{ pre } y \to 0 \text{ je } v \to \infty\right]$$

26. Dielektrická guľa (súbor dipólových momentov uložených vo vákuu) s polomerom $R$ je po vložení do homogénneho vonkajšieho poľa homogénne spolarizovaná tak, že jej celkový dipólový moment má veľkosť $p$. Vypočítajte veľkost vektora polarizácie. Ukážte, že elektrostatické pole vo vnútri gule je homogénne a určte veľkosť tej zložky intenzity elektrostatického (tzv. depolarizačného) poľa, ktoré je vyvolané len viazanými nábojmi ležiacimi vo vnútri gule. Aký smer má táto zložka voči smeru vonkajšieho poľa?

**Návod:** Uvážte, že normálová zložka vektora sa rovná plošnej hustote povrchového viazaného (plošného) náboja, takže na povrchu gule $P\cos\vartheta = \sigma$, pričom veľkosť vektora polarizácie má význam veľkosti objemovej hustoty dipólových momentov. Pretože $\vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E}$ ($\chi$ je elektrická susceptibilita), pre konštantný vektor musí byť konštantný aj vektor na celom povrchu dielektrickej gule. Preto stačí počítať $\vec{E}_{\text{depol}}$ v strede gule.

$$\left[P = \frac{3p}{4\pi R^3}\ ; \ \vec{E}_{\text{depol}} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\right]$$

27. V rovine súradnicových osí $(x, z)$ ležia dva rovnobežné nekonečne tenké priame vodiče tak, ze oba sú kolmé na os $x$. Priamy vodič, ležiaci bližšie k počiatku súradnicového systému, je rovnomerne nabitý kladným nábojom s dĺžkovou hustotou $\lambda$ a pretína os $x$ vo vzdialenosti $x_+$ od počiatku súradnicového systému. Druhý priamy vodič je rovnomerne nabitý záporným nábojom s dĺžkovou hustotou $-\lambda$ a os $x$ pretína vo vzdialenosti $x_-$ od počiatku. Dokážte, ze táto sústava vodičov vytvára dve ekvipotenciálne valcové plochy s polomerom $R$, kde $R^2 = x_+x_-$. (Os prvej valcovej ekvipotenciálnej plochy je totožná s osou $z$ a os druhej valcovej ekvipotenciálnej plochy pretína os $x$ vo vzdialenosti $d = x_+ + x_-$ od počiatku súradnicového systému.)

**Návod:** Vyjadrite výsledný potenciál oboch líniových nábojov v ľubovolnom bode $P[x,y]$ priestoru (súradnicu $z$ vzhľadom na rozloženie poľa nebudete potrebovať) a položte ho rovný nejakej konštante $k$. Ako sa ukáže, rovnicu kružnice so stredom v počiatku (resp. valcovej plochy) dostanete len vtedy, ak bude $k = x_+/x_-$, t. j. bude platiť $x^2 + y^2 = x_+x_- = R^2$. Druhá valcová plocha existuje v dôsledku symetrie celej situácie.

28. Vypočítajte kapacitu „dvojlinkového" kábla, pozostávajúceho z dvoch rovnobežných nekonečne dlhých valcových vodičov s rovnakým polomerom $R$, osi ktorých majú vzdialenosť $d$, a to na jednotku dĺžky kábla za predpokladu, že $R \ll d$.

    **Návod:** Povrch oboch valcových vodičov tvorí v elektrostatike ekvipotenciálne plochy. Podľa predošlého príkladu však také isté pole mimo vnútra vodičov možno dostať aj ich nahradením dvoma nekonečne dlhými líniovými nábojmi s dĺžkovou hustotou $\pm\lambda$, pričom vzdialenosť prvého líniového náboja od osi prvého skutočného valcového vodiča je $x_+$ a vzdialenosť druhého líniového vodiča od osi prvého valcového vodiča je $x_-$. Potom platia vzťahy pre tzv. zrkadlenie líniového náboja okolo valcovej plochy: $x_+ + x_- = d$ a $x_+x_- = R^2$. Vypočítajte potenciál na bode povrchu každého skutočného vodiča vždy ako súčet príspevkov do potenciálu od oboch náhradných líniových vodičov. Potom $C^{(1m)} = \lambda/(V_1 - V_2)$.

    $$\left[C^{(1m)} \approx \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d-R}{R}}\right]$$

29. Dielektrická guľa s polomerom $R$ zhotovená z materiálu s relatívnou permitivitou $\varepsilon_r$ obsahuje homogénne rozložený kladný náboj s objemovou hustotou $\rho$. Vypočítajte a) priebeh veľkosti intenzity elektrostatického poľa v závislosti od vzdialenosti od stredu gule; b) rozdiel potenciálov v strede a na povrch gule.

    **Návod:** Použite Gaussov zákon pre dielektrické prostredie.

    $$\left[\text{a) } E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0\varepsilon_r} \text{ pre } r < R,\ \ E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \text{ pre } r \geq R\ ;\ \text{b) } V_S - V_R = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0\varepsilon_r}\right]$$

30. V balóne tvaru gule s polomerom $R$ je homogénne ionizovaný plyn ($\varepsilon_r = 1$) s celkovým nábojom $Q$. Aká energia elektrostatického poľa pripadá a) na vnútorný objem balóna; b) na ostatný okolitý priestor?

    **Návod:** Použite výsledky z predchádzajúceho príkladu a vzťah pre objemovú hustotu energie elektrostatického poľa. Za objemový element zvoľte oblasť ležiacu medzi dvoma guľovými plochami s polomermi $r$ a $r + dr$, t. j. $d\tau = 4\pi r^2 dr$.

    $$\left[\text{a) } W_{\text{int}} = \frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0 R}\ ;\ \ \text{b) } W_{\text{ext}} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\right]$$