1 **skalárny násobok vektora** = násobenie vektora (vektorovej veličiny) skalárnou veličinou (skalárom s) - operácia, ktorou získame vektorovú veličinu, ktorej rozmer sa rovná súčinu rozmerov násobených veličín, a ktorej veľkosť je s - násobkom veľkosti pôvodnej vektorovej veličiny (vektora). Ak $s < 0$, smer výsledného vektora je opačný ako smer násobeného vektora.

skalárny súčin vektorov $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ - operácia medzi dvomi vektormi, ktorej výsledok je definovaný ako skalárna veličina, ktorú získame ako súčin veľkostí vektorov a kosínusu uhla nimi zovretého: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\alpha$.

súčet vektorov - operácia, ktorú zobrazujeme geometricky tak, že ku koncu prvého vektora pripojíme začiatok druhého vektora a výsledný vektor získame spojením začiatku prvého s koncom druhého vektora. Tak vznikne vektorový trojuholník. Sčitovať možno aj viac vektorov, pričom uvedený postup opakujeme, čím vznikne vektorový mnohouholník.

vektorový súčin dvoch vektorov $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ - operácia, ktorej výsledkom je vektor $\boldsymbol{c}$. Veľkosť vektora $\boldsymbol{c}$ je definovaná ako súčin veľkostí vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a sínusu uhla nimi zovretého. Výsledný vektor je podľa definície kolmý na rovinu vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a v poradí ***a, b, c*** tvorí s nimi pravotočivú sústavu.

3 **zmiešaný súčin vektorov** - súčin troch vektorov typu $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$, alebo $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, ktorého výsledkom je skalárna veličina. Najprv treba vykonať vektorový súčin vektorov v zátvorke, po ktorom sa vykoná skalárny súčin výsledného vektora s ďalším vektorom. Má význam objemu rovnobežnostena skonštruovaného na základe vektorov ***a, b, c*** .

4 $$\boldsymbol{v} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \qquad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad \boldsymbol{a} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dv_z}{dt}\boldsymbol{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{k} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad , \qquad \boldsymbol{a} = a\boldsymbol{\eta}$$

kde $\boldsymbol{\eta}$ je jednotkový vektor vyjadrujúci smer vektora zrýchlenia, a je veľkosť vektora zrýchlenia, $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$, $a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$, sú jeho súradnice.

a) Pri pohybe **konštantnou rýchlosťou** sa vektor rýchlosti $\boldsymbol{v}$ nemení, jeho derivácia podľa času sa rovná nule, zrýchlenie je teda nulové - $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. Takémuto pohybu sa hovorí ***pohyb rovnomerný***. Ak sa nemení vektor rýchlosti $\boldsymbol{v}$, nemenia sa ani jeho súradnice v_x , v_y a v_z . Pre každú zo súradníc rýchlosti platí vzťah typu $v_y = \Delta y / \Delta t$, takže možno napísať vzťahy

$$\Delta x = v_x \Delta t\,, \quad \Delta y = v_y \Delta t\,, \quad \Delta z = v_z \Delta t \qquad (\Delta x)_i = v_x (\Delta t)_i$$

$$x_2 - x_1 = \sum_{i=1}^{n} (\Delta x)_i = \sum_{i=1}^{n} v_x (\Delta t)_i = v_x \sum_{i=1}^{n} (\Delta t)_i = v_x (t_2 - t_1) \qquad x_2 = x_1 + v_x (t_2 - t_1)$$

$$x_2 = x_0 + v_x t_2 \qquad x = x_0 + v_x t \quad y = y_0 + v_y t \quad , \quad z = z_0 + v_z t$$

Tieto rovnice vyjadrujú polohu častice (nie ubehnutú dráhu !) pri rovnomernom pohybe po priamke v ľubovoľnom časovom okamihu t . Tieto tri skalárne rovnice postupne vynásobíme príslušnými jednotkovými vektormi ***i, j, k*** a sčítame ich ľavé aj pravé strany:

$$(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = (x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}) + (v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k})\,t\,,$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}\,t$$

$$x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v_x\,dt = v_x (t_2 - t_1) \qquad \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \int_{r_1}^{r_2} d\boldsymbol{r} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{v}\,dt = \boldsymbol{v}(t_2 - t_1)$$

b) Pri pohybe konštantným zrýchlením sa nemení vektor zrýchlenia $\boldsymbol{a}$, preto jeho derivácia podľa času je nulová. Takémuto pohybu sa hovorí ***pohyb rovnomerne zrýchlený***. Na základe definície (2.1.3.1) môžeme napísať $d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\,dt$ a tento vzťah integrovať:

$$\int_{v_1}^{v_2} d\boldsymbol{v} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{a}\,dt = \boldsymbol{a}(t_2 - t_1)\,.$$

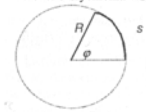
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}\,t \qquad \boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt \qquad d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,dt$$

$$\int_{r_0}^{r} d\boldsymbol{r} = \int_0^t \boldsymbol{v}\,dt = \int_0^t (\boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{a}t)\,dt = \boldsymbol{v}_o t + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2 \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}t_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

5 *uhlová rýchlosť* a *uhlové zrýchlenie*

uhlová rýchlosť (ω) – vektorová veličina, ktorej hodnota je zavedená ako podiel zmeny uhlovej súradnice (prípadne uhlovej dráhy) a príslušného časového intervalu: $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi_s}{\Delta t}$. Vektor uhlovej rýchlosti je kolmý na rovinu otáčania a smeruje na tú stranu, z ktorej sa otáčanie v rovine javí v smere proti chodu hodinových ručičiek. Jednotkou uhlovej rýchlosti je radián za sekundu (rad/s ≡ 1/s).

uhlové zrýchlenie (α)– vektorová veličina definovaná podielom zmeny uhlovej rýchlosti a príslušného časového intervalu: $\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$. Veľkosť vektora uhlovej rýchlosti vyjadruje zmenu uhlovej rýchlosti pripadajúcu na jednotku času. Jednotkou uhlového zrýchlenia v SI je rad/s² ≡ 1/s².



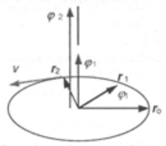
$$\frac{s}{2\pi R} = \frac{\varphi}{360°}$$

1 rad = 360° /2π = 57,296°

$s = R\varphi \quad v = R\omega \quad a_t = R\alpha$

$s(t) = R\,\varphi(t)$

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$



Uhlová rýchlosť $\boldsymbol{\omega}$ ako *vektorová veličina*

$$\omega = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\varphi}{dt}$$

Uhlové zrýchlenie $\boldsymbol{\alpha}$ ako **vektorová veličina**

$$\alpha = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\omega}{dt}$$

tangenciálna a dostredivá zložka celkového zrýchlenia pri pohybe po kružnici $\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_d$

veľkosť dostredivého zrýchlenia $a_d = \omega v = v^2/r = r\omega^2$

vzťahy pri pohybe po kružnici
dĺžka oblúka - uhlová dráha: $s = R\varphi$
obvodová rýchlosť - uhlová rýchlosť: $v = R\omega$
tangenc. zrýchl. - uhlové zrýchlenie $a_t = R\alpha$

vektor $\boldsymbol{\varphi}$ priradený uhlu pri pohybe konštantnou uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega}t + \boldsymbol{\varphi}_o$,
η - jednotkový vektor kolmý na rovinu otáčania
a príslušná uhlová súradnica: $\varphi_\eta = \omega_\eta\,t + \varphi_o$

uhlová rýchlosť pri pohybe konštantným uhlovým zrýchlením $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\alpha}t + \boldsymbol{\omega}_o$, jej súradnica: $\omega_\eta = \alpha_\eta t + \omega_{\eta o}$

vektor $\boldsymbol{\varphi}$ priradený uhlu pri pohybe konštantným uhlovým zrýchlením $\boldsymbol{\alpha}$ a príslušná uhlová súradnica φ_η
$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}t^2 + \boldsymbol{\omega}_o t + \boldsymbol{\varphi}_o \qquad \varphi_\eta = \frac{1}{2}\alpha_\eta t^2 + \omega_{\eta o} t + \varphi_{\eta o}$$

6 $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\boldsymbol{\rho}) = \frac{dR}{dt}\boldsymbol{\rho} + R\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = 0 + R(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\omega}\times(R\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \qquad a_t = R\alpha$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}\right) + \left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = (\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}) + [\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})]$$

$$\boldsymbol{a}_d = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}(\omega^2) = 0 - \boldsymbol{r}\omega^2 \qquad a_d = R\omega^2 = \omega v = v^2/R$$

Zrýchlenie možno rozložiť na dve zložky aj v prípade, keď sa častica pohybuje po všeobecnej, zakrivenej čiare K (obr. 2.2.3.2). Vektor rýchlosti v ľubovoľnom časovom okamihu vyjadríme ako skalárny násobok jednotkového vektora $\boldsymbol{\tau}$, ktorý má rovnaký smer ako vektor rýchlosti: $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}$. Zrýchlenie je jeho deriváciou podľa času:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d(v\boldsymbol{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\tau}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})$$

8 ***zákon zotrvačnosti***

"Jestvuje súradnicová sústava, vzhľadom na ktorú teleso zotrváva v pokoji, alebo priamočiarom rovnomernom pohybe, ak nepodlieha vplyvu iných telies".

Druhý Newtonov zákon - ***zákon sily*** - hovorí o zrýchlení, ktorým sa v inerciálnej sústave pohybuje teleso, ak naň pôsobí vonkajšia sila:

"Zrýchlenie $\boldsymbol{a}$ *telesa je úmerné pôsobiacej sile* $\boldsymbol{F}$ *, nepriamo úmerné jeho hmotnosti* m *" :*

$$\frac{F}{F_1} = \frac{a}{a_1}\,, \qquad \frac{m}{m_2} = \frac{a_{21}}{a_1} \qquad a = k\,F/m\,. \quad \frac{F}{F_1} = \frac{a}{a_1} \quad \frac{m}{m_2} = \frac{a_2}{a}$$

$$F = \frac{F_1}{m_2 a_{21}} ma$$

zákon akcie a reakcie

"Ak na seba pôsobia dve telesá, tak rovnakými silami, opačného smeru, pričom pôsobia v jednej priamke".

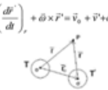
7 P sa pohybuje vzhladom na T
T' sa pohybuje vzhladom na T rychlostou v_0, zrychlenim a_0 a pritom sa otaca okolo O' uhlovou rychlostou ω a uhlovym zrychlenim ε. Rychlost bodu P vzhladom na T.

$$\vec{r} = \vec{r}_0' + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\vec{r}_0'}{dt}\right)_a + \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_a = \vec{v}_0 + \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_a = \vec{v}_0 + \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\vec{r}' = \vec{v}_0 + \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'$$

Vyjadrime $\vec{v}'$ $\quad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_d - \vec{\omega}\times\vec{r}'$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'$$



Zrychlenie bodu P vzhladom na T (absolut)

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\vec{v}_o}{dt}\right)_a + \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_a + \omega\times\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_a + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_a \times\vec{r}'$$

$$\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\vec{\omega} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_r = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right) = \vec{\varepsilon}$$

$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right) = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r} \qquad \vec{v}' = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_r$$

$$\left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right) = \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{v}' \qquad \vec{a}' = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_r$$

$$= \vec{a}'_0 + \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}'$$

$$= \vec{a}'_0 + \vec{a}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}' \qquad \vec{\varepsilon}\times\vec{r}' \text{-premenne}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') + 2(\vec{\omega}\times\vec{v}') + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}'$$

$$a' = \vec{a} - \vec{a}_0 + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') - 2(\vec{\omega}\times\vec{v}') - \vec{\varepsilon}\times\vec{r}'$$

$\vec{a}_0$ zrychlenie T' (teda O') voci T

$\vec{a}'_0$ zrychlenie P voci T'

$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$ - dostredive zrychlenie

$2(\vec{\omega}\times\vec{v}')$ - Coriol. Zrychlenie

9 **zotrvačné sily** – sily, ktorými si vysvetľujeme pozorované zmeny pohybového stavu telies v neinerciálnych vzťažných sústavách, ktoré neboli vyvolané niektorou zo štyroch fundamentálnych fyzikálnych interakcií.

Coriolisova sila – zotrvačná sila prejavujúca sa len v otáčajúcich sa neinerciálnych vzťažných sústavách (napr. naša Zem); pozoruje sa len pri telesách, ktoré sa vzhľadom na túto sústavu pohybujú.

$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}.$

odstredivá sila $\qquad \boldsymbol{F}_O = -m\,[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')]$

odstredivá sila – zotrvačná sila prejavujúca sa len v otáčajúcich sa neinerciálnych vzťažných sústavách (napr. naša Zem); má smer od stredu otáčania a pôsobí aj na telesá, ktoré sú vzhľadom na túto sústavu v pokoji.

10 ***Kinetická energia***

Keď na voľnú časticu pôsobí sila, urýchľuje ju, zväčšuje jej rýchlosť, alebo mení smer rýchlosti. Uvážime prípad, keď pôsobiaca sila $\boldsymbol{F}$ má smer rýchlosti častice. Vtedy aj zrýchlenie $\boldsymbol{a}$, ktoré sila častici udelí, má smer rýchlosti. Preto aj elementárna zmena rýchlosti $d\boldsymbol{v}$ je rovnobežná s vektorom rýchlosti, takže pre skalárny súčin $\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v}$ platí rovnosť $\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v} = v\,dv$.

$F \longrightarrow$ ● $\longrightarrow v \quad \longrightarrow a \quad \longrightarrow dv$	Obr.3.2.2.1

Potom môžeme písať

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} m\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot d\boldsymbol{v} = \int_{v_1}^{v_2} m\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v} = \int_{v_1}^{v_2} mv\,dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \tag{3.2.2.2}$$

Súčasne, podľa vzťahu (3.2.2.1), platí $W = E_2 - E_1$, takže porovnaním získame vzťah pre kinetickú (pohybovú) energiu:

$$E_k = (1/2)\,mv^2\,.$$

Vychádzajúc z porovnania vzťahov by sme vlastne mali písať $E_k = (1/2)mv^2 + C$, kde C je ľubovoľná konštanta, ktorá sa pri odčítaní hodnôt $E_{k2} - E_{k1}$ stratí. Jej ponechanie vo vzťahu by však znamenalo, že vo vzťažnej sústave, v ktorej je častica v pokoji (teda keď $v = 0$) by častica mala istú nenulovú kinetickú energiu. Preto sa pre kinetickú energiu častice akceptuje vzťah (3.2.2.3). Treba však podotknúť, že v inej vzťažnej sústave, ktorá sa vzhľadom na prvú pohybuje, kinetická energia tej istej častice nie je nulová.

Poznámka 1 *Postup pri odvodzovaní (3.2.2.2) možno naznačiť pomocou diferencií:*

$$\Delta W = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = m\boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = m\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = m\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\cdot\Delta\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{v}\,.$$

Potenciálna energia

Tiaž $\boldsymbol{F}$ telesa ako vektorová veličina smeruje nadol, proti jednotkovému vektoru $\boldsymbol{j}$, zatiaľ čo sila $\boldsymbol{F}_v$, ktorou pomaly dvíhame teleso (bez zrýchlenia !), má rovnakú veľkosť, ale smeruje nahor. Prácu na zodvihnutie telesa vypočítame integrálom

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}_v\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} (-m\boldsymbol{g})\cdot d\boldsymbol{r}\,.$$

Do integrálu dosadíme $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{j}$, $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{j}\,dy$, a integračné medze zameníme na y_1 a y_2 :

$$W = \int_{r_1}^{r_2} (-m\boldsymbol{g})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{y_1}^{y_2} [-m(-g\,\boldsymbol{j})]\cdot(\boldsymbol{j}\,dy) = mg\int_{y_1}^{y_2} dy = mgy_2 - mgy_1\,. \tag{3.2.2.4}$$

Vykonaná práca sa rovná rozdielu hodnôt potenciálnej energie telesa v dvoch polohách, preto za potenciálnu energiu v tomto prípade považujeme výraz

$$E_p = mgy + C. \tag{3.2.2.5}$$

Aj v tomto prípade, podobne ako pri kinetickej energii, bola k výrazu mgy pripočítaná ľubovoľná konštanta C. Ak vo zvolenej vzťažnej sústave považujeme potenciálnu energiu za nulovú vtedy, keď výšková súradnica častice je nulová, potom aj konštanta sa rovná nule: $C = 0$.

Zákon zachovania energie

V súlade s definíciou energie ako veličiny, energia mechanickej sústavy sa môže meniť, len ak vonkajšie sily ktoré na ňu pôsobia, konajú prácu. Ak na sústavu vonkajšie sily nepôsobia, potom podľa zákona akcie a reakcie, ani sústava nepôsobí na okolité telesá - sústava je izolovaná. Preto **energia izolovanej sústavy sa nemení**, čo je obsahom zákona zachovania energie mechanickej sústavy.

$$F_y\,dy = -dE_p = +dE_k\,,$$

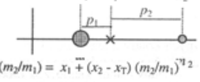
odkiaľ vyplýva

$$dE_k + dE_p = 0 \quad\Rightarrow\quad d(E_k + E_p) = 0 \quad\Rightarrow$$

$$E_k + E_p = \text{konšt.}\,.$$

11 Ťažisko telesa je bod, ktorým prechádza výslednica všetkých tiažových síl pôsobiacich na hmotné body z ktorých teleso pozostáva, pri jeho ľubovoľnej polohe v priestore. Ak sa teleso, alebo sústava hmotných bodov nachádza v silovom poli, je vhodné zaviesť ***hmotný stred*** sústavy. Pre dva hmotné body je to bod ležiaci na ich spojnici, deliaci túto spojnicu v nepriamom pomere hmotností bodov. Na obrázku sú znázornené hmotné body s hmotnosťami m_1 a m_2 , nachádzajúce sa v polohách, ktorým priradíme súradnice x_1 a x_2 . Súradnica hmotného stredu je označená symbolom x_T .

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_2}{m_1}$$



$x_T = x_1 + p_1 = x_1 + p_2\,(m_2/m_1) = x_1 + (x_2 - x_T)\,(m_2/m_1)$

$$x_T = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \quad y_T = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}\,, \quad z_T = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2} \quad \boldsymbol{r}_T = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\,, \quad y_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\,, \quad z_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_iz_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$x_T = \frac{\int x\,dm}{\int dm}\,, \qquad y_T = \frac{\int y\,dm}{\int dm}\,, \qquad z_T = \frac{\int z\,dm}{\int dm}$$

12 Vyjadruje súvislosť medzi zrýchleniami hmotných bodov, z ktorých pozostáva sústava, a silami ktoré na sústavu pôsobia. Medzi hmotnými bodmi sústavy pôsobia ***vnútorné sily***, navyše na jednotlivé hmotné body môžu pôsobiť ***vonkajšie sily***. Na konkrétny hmotný bod sústavy, ktorý má hmotnosť m_i , nech pôsobí výsledná vonkajšia sila $\boldsymbol{F}_i$ a vnútorné sily od ostatných hmotných bodov, ktoré vyjadríme v tvare vektorového súčtu síl $\boldsymbol{F}_{ij}^{vn}$ od jednotlivých hmotných bodov. Podľa druhého Newtonovho zákona platí rovnica

$$m_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ij}^{vn}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ij}^{vn} \qquad \boldsymbol{F}_{ik}^{vn} = -\boldsymbol{F}_{ki}^{vn} \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}$$

$$m_C\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}\,,$$

čo je pohybová rovnica sústavy hmotných bodov pri translačnom pohybe.

Ak pohyb nie je translačný, treba pri odvodení pohybovej rovnice využiť definíciu ťažiska (hmotného stredu) sústavy. Využijeme rovnicu (4.1.1.4):

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_{j=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{n} m_i\boldsymbol{r}_i\,,$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_T}{dt^2} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{a}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \frac{1}{M}\boldsymbol{F} \qquad m_C\,\boldsymbol{a}_T = \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{v}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{H}_i = \frac{d\boldsymbol{H}}{dt} \qquad \boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

Integráciou tejto pohybovej rovnice získame ***prvú impulzovú vetu***:

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1) = \Delta\boldsymbol{p}$$

prvá impulzová veta – vzťah medzi impulzom výslednej sily pôsobiacej na sústavu hmotných bodov (teleso) a zmenou hybnosti tejto sústavy.

prvá pohybová rovnica – vektorový vzťah medzi súčtom všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov (alebo teleso) a zmenou hybnosti tejto sústavy za jednotku času (t.j. jej deriváciou podľa času).

13 Týka sa otáčavého (rotačného) pohybu sústavy hmotných bodov, resp. telesa. Pri opise takýchto pohybov sa používajú ďalšie dôležité veličiny, ktoré uvedieme.

Ak na teleso pôsobí vonkajšia sila, z hľadiska jeho otáčania je dôležité, v ktorom bode na teleso pôsobí. Preto sa zavádza veličina ***moment sily*** ($\boldsymbol{M}$) vzhľadom na určitý vzťažný bod ako *vektorový súčin polohového vektora pôsobiska sily a pôsobiacej sily*:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}\,.$$

Na opis dynamiky otáčavého pohybu telies sa používa ***moment hybnosti*** ($\boldsymbol{L}$) , ktorý sa pre hmotný bod zavádza ako *vektorový súčin polohového vektora hmotného bodu a vektora hybnosti hmotného bodu*:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}\,.$$

Deriváciou vzťahu 4.1.3.5 dostaneme vzťah medzi momentom hybnosti a momentom sily

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}) = \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times m\boldsymbol{v}\right) + \left[\boldsymbol{r}\times\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}\right] = (\boldsymbol{v}\times m\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}) = 0 + \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}\,, \tag{4.1.3.6}$$

čiže $\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$. Pre sústavu hmotných bodov sa moment hybnosti zavádza vektorovým súčtom momentov hybnosti jednotlivých hmotných bodov:

$$\boldsymbol{L} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{L}_k = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k\times m_k\boldsymbol{v}_k\,.$$

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$$

čo je ***druhá pohybová rovnica*** sústavy hmotných bodov (telesa).

Integráciou druhej pohybovej rovnice dostaneme ***druhú impulzovú vetu*** pre sústavu hmotných bodov:

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} d\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(t_2) - \boldsymbol{L}(t_1) = \Delta\boldsymbol{L}\,.$$

14 Podmienky rovnováhy hovoria čo teba splniť, aby teleso (sústava hmotných bodov) v inerciálnej sústave **zachovávalo svoj pohybový stav**. *Pod pohybovým stavom telesa rozumieme* jeho celkovú hybnosť $\boldsymbol{p}$ a celkový moment hybnosti $\boldsymbol{L}$. Celková hybnosť sústavy hmotných bodov (telesa) predstavuje vektorový súčet hybností všetkých hmotných bodov sústavy a celkový moment hybnosti vektorový súčet momentov hybnosti všetkých hmotných bodov sústavy:

$$\boldsymbol{H} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{H}_j = \sum_{j=1}^{n} m_j\boldsymbol{v}_j\,, \qquad \boldsymbol{L} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{L}_j = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}_j\times m_j\boldsymbol{v}_j\,.$$

Podľa prvej pohybovej rovnice (4.1.2.8), ktorá má tvar

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\,,$$

hybnosť sústavy sa nemení, ak výsledná vonkajšia sila pôsobiaca na sústavu sa rovná nule. Preto rovnosť

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \tag{4.1.4.2}$$

je ***prvou podmienkou rovnováhy*** sústavy hmotných bodov (telesa).

Podľa druhej pohybovej rovnice (4.1.3.8), ktorá má tvar

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\,,$$

moment hybnosti telesa sa nemení, ak výsledný moment vonkajších síl pôsobiacich na sústavu sa rovná nule. Rovnosť

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0} \tag{4.1.4.3}$$

je ***druhou podmienkou rovnováhy*** sústavy hmotných bodov (telesa).

Pri splnení obidvoch podmienok rovnováhy teleso zachováva svoju hybnosť a svoj moment hybnosti (zjednodušene, ale nie celkom presne môžeme povedať že zachováva rýchlosť svojho pohybu a uhlovú rýchlosť svojho otáčania). To znamená, že v inerciálnej sústave nemusí byť v pokoji. Preto sa v takomto prípade hovorí o ***dynamickej rovnováhe*** telesa. Podľa toho v dynamickej rovnováhe je parašutista, ktorý klesá konštantnou rýchlosťou, alebo rotor elektromotora, ktorý sa otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou.

Popri dynamickej rovnováhe sa najmä v strojárstve a stavebníctve hovorí o ***statickej rovnováhe***, ktorá navyše vyžaduje, aby teleso v danej vzťažnej sústave bolo v pokoji. Aj v tomto prípade nevyhnutnými podmienkami rovnováhy telies sú rovnice (4.1.4.2) a (4.1.4.3) .

Pri posudzovaní situácie, či teleso môže byť v rovnováhe, treba obyčajne nájsť výslednú silu a výsledný moment síl, ktoré pôsobia na teleso. V tejto súvislosti sa hovorí o ***redukcii síl*** v telese. Podľa príslušnej vety **ľubovoľný počet síl pôsobiacich v rôznych bodoch na teleso možno nahradiť jedinou silou, pôsobiacou v bode ktorý si vyberieme, a jedinou dvojicou síl.**

Kinetickú energiu telesa definujeme ako súčet kinetických energií T_k jednotlivých hmotných bodov:

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}m_kv_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k(b_k\,\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2\sum_{k=1}^{n} m_kb_k^2 = \frac{1}{2}J\,\omega^2\,.$$

15 **Kinetická energia telesa otáčajúceho sa okolo osi** sa teda vyjadruje vzťahom

$$T = \frac{1}{2}J\,\omega^2,$$

kde výraz

$$J = \sum_{k=1}^{n} m_kb_k^2$$