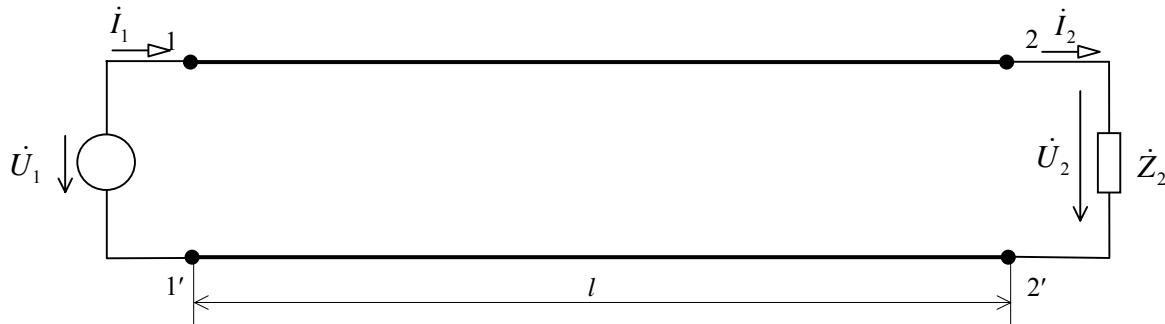


4. OBVODY S ROZLOŽENÝMI PARAMETRAMI – HOMOGENÉNE DLHÉ VEDENIA V HARMONICKOM USTÁLENOM STAVE

Dlhé vedenie ako jednorozmerný obvod s rozloženými parametrami je znázornený schémou podľa obrázka 4.1:



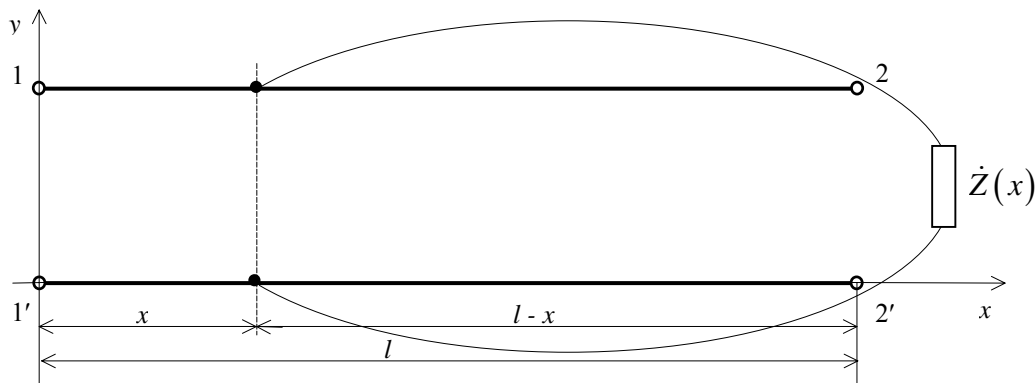
Obr. 4.1

kde 1, 1' sú vstupné svorky (vstup) vedenia, na ktoré sa spravidla pripája zdroj napätia \dot{U}_1 alebo prúdu \dot{I}_1 ,
 2, 2' sú výstupné svorky (výstup) vedenia, na ktoré sa spravidla pripája záťaž \dot{Z}_2 ,
 l je dĺžka vedenia.

4.1. VŠEOBECNÝ PRÍPAD DLHÉHO VEDENIA

Vo všeobecnom prípade je homogénne dlhé vedenie v harmonickom ustálenom stave:

a) **popísané** podmienkovými rovnicami pre fázory napätia a prúdu v ľubovoľnom mieste x vedenia (obr. 4.2)



Obr. 4.2

ktoré majú tvar:

- $\dot{U}(x) = \dot{U}_1 \cosh \dot{\gamma}x - \dot{I}_1 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma}x = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma}(l-x) + \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma}(l-x),$
- $\dot{I}(x) = \dot{I}_1 \cosh \dot{\gamma}x - \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma}x = \dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma}(l-x) + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma}(l-x),$

kde \dot{U}_1, \dot{I}_1 sú hodnoty napätia a prúdu na vstupe vedenia,

\dot{U}_2, \dot{I}_2 sú hodnoty napätia a prúdu na výstupe vedenia;

b) charakterizované parametrami

- primárnymi: R_0, L_0, G_0, C_0 ;
- sekundárnymi (prenosovými resp. vlnovými):
 vlnovou impedanciou \dot{Z}_v

komplexným koeficientom šírenia sa vlny (vlnová miera prenosu výkonu) $\dot{\gamma}$, pričom sekundárne parametre sú definované pomocou primárnych parametrov vzťahmi:

$$\dot{Z}_v = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} \quad \text{a} \quad \dot{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \beta + j\alpha$$

β je koeficient (konštanta, merný činiteľ) tlmenia,
 α je koeficient (konštanta, merný činiteľ) fázy.

Špeciálne pre

- $x = 0$ t.j. začiatok vedenia bude:

$$\dot{U}(x=0) \equiv \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma}l + \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma}l \quad (1.1.)$$

$$\dot{I}(x=0) \equiv \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma}l + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma}l \quad (1.2.)$$

- $x = l$ t.j. koniec vedenia bude:

$$\dot{U}(x=l) \equiv \dot{U}_2 = \dot{U}_1 \cosh \dot{\gamma}l - \dot{I}_1 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma}l \quad (2.1.)$$

$$\dot{I}(x=l) \equiv \dot{I}_2 = \dot{I}_1 \cosh \dot{\gamma}l - \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma}l \quad (2.2.)$$

Ďalej definujeme:

- impedanciu vedenia $\dot{Z}(x)$:

$$\dot{Z}(x) = \frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)} = \frac{\dot{U}_1 \cosh \dot{\gamma}x - \dot{I}_1 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma}x}{\dot{I}_1 \cosh \dot{\gamma}x - \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma}x} = \frac{\dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma}(l-x) + \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma}(l-x)}{\dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma}(l-x) + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma}(l-x)}$$

a po úprave:
$$\dot{Z}(x) = \dot{Z}_v \frac{\dot{Z}_1 - \dot{Z}_v \operatorname{tgh} \dot{\gamma}x}{\dot{Z}_v - \dot{Z}_1 \operatorname{tgh} \dot{\gamma}x} = \dot{Z}_v \frac{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_v \operatorname{tgh} \dot{\gamma}(l-x)}{\dot{Z}_v + \dot{Z}_2 \operatorname{tgh} \dot{\gamma}(l-x)},$$

pričom pre

- pre $x = 0$ t.j. začiatok vedenia platí:
$$\dot{Z}(x=0) \equiv \dot{Z}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma}l + \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma}l}{\dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma}l + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma}l}$$

kde \dot{Z}_1 je **vstupná impedancia vedenia** a po úprave dostaneme

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_v \frac{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_v \operatorname{tgh} \dot{\gamma}l}{\dot{Z}_v + \dot{Z}_2 \operatorname{tgh} \dot{\gamma}l} \quad \text{kde} \quad \dot{Z}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2};$$

- pre $x = l$ t.j. koniec vedenia platí:
$$\dot{Z}(x=l) \equiv \dot{Z}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_1 \cosh \dot{\gamma}l - \dot{I}_1 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma}l}{\dot{I}_1 \cosh \dot{\gamma}l - \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma}l}$$

kde \dot{Z}_2 je **výstupná impedancia vedenia** a po úprave dostaneme

$$\dot{Z}_2 = \dot{Z}_v \frac{\dot{Z}_1 - \dot{Z}_v \operatorname{tgh} \dot{\gamma}l}{\dot{Z}_v - \dot{Z}_1 \operatorname{tgh} \dot{\gamma}l} \quad \text{kde} \quad \dot{Z}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}.$$

- koeficient odrazu vlny $\dot{r}(x)$:
$$\dot{r}_u(x) = \dot{r}_u(l) e^{-2\dot{\gamma}(l-x)} = \frac{\dot{Z}_2 - \dot{Z}_v}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_v} e^{-2\dot{\gamma}(l-x)} \quad \text{pre vlnu napätia,}$$

$$\dot{r}_i(x) = \dot{r}_i(l) e^{-2\dot{\gamma}(l-x)} = -\frac{\dot{Z}_2 - \dot{Z}_v}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_v} e^{-2\dot{\gamma}(l-x)} \quad \text{pre vlnu prúdu;}$$
- koeficient odrazu vlny na konci vedenia $\dot{r}(l)$:
$$\dot{r}_u(l) = \frac{\dot{Z}_2 - \dot{Z}_v}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_v} \quad \text{pre vlnu napätia,}$$

$$\dot{i}_i(l) = -\frac{\dot{Z}_2 - \dot{Z}_v}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_v} \text{ pre vlnu prúdu.}$$

Vlna napätia a prúdu na dlhom vedení je popísaná svojimi fyzikálnymi parametrami:

$$\begin{aligned} \text{fázová rýchlosť šírenia sa vln } v: & \quad v = \frac{\omega}{\alpha}, \\ \text{dĺžka vlny } \lambda: & \quad \lambda = \frac{2\pi}{\alpha}. \end{aligned}$$

Príklady riešenia úloh:

Uvažujme homogénne dlhé vedenie s primárnymi parametrami $R_0 = 3 \text{ } \Omega/\text{km}$, $L_0 = 3 \text{ mH/km}$, $G_0 = 10^{-6} \text{ S/km}$, $C_0 = 8 \text{ nF/km}$ a dĺžkou $l = 100 \text{ km}$.

4.1.

Pre uvažované vedenie vypočítajte

1. sekundárne parametre \dot{Z}_v a $\dot{\gamma}$ vedenia, koeficient tlmenia β a koeficient fázy α ,
2. vlnovú dĺžku λ vln napätia a prúdu na tomto vedení,
3. fázovú rýchlosť v šírenia sa vln napätia a prúdu na tomto vedení

ak na vstup tohto vedenia je pripojený zdroj napätia $u_1(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(1000t + 30^\circ) \text{ V}$.

Riešenie:

4.1.1.

Sekundárne parametre vedenia sú definované:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_v &= \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{3 + j10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{10^{-6} + j10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-9}}} = \sqrt{\frac{3 + j3}{10^{-6}(1 + j8)}} = 10^3 \sqrt{\frac{4,24 e^{j45^\circ}}{8,06 e^{j82,9^\circ}}} = \\ &= 10^3 \sqrt{0,526 e^{-j37,8^\circ}} = 725,19 e^{-j18,9^\circ} \Omega; \end{aligned}$$

$$\dot{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = 10^{-3} \sqrt{4,24 e^{j45^\circ} \cdot 8,06 e^{j82,9^\circ}} = 5,85 \cdot 10^{-3} e^{j63,95^\circ} \text{ km}^{-1};$$

$$\beta = \text{Re}[\dot{\gamma}] = 2,57 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}, \quad \alpha = \text{Im}[\dot{\gamma}] = 5,26 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}.$$

$$\mathbf{4.1.1.} \quad \dot{Z}_v = 725,19 e^{-j18,9^\circ} \Omega, \quad \dot{\gamma} = 5,85 \cdot 10^{-3} e^{j63,95^\circ} \text{ km}^{-1}, \quad \beta = 2,57 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}, \quad \alpha = 5,26 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}.$$

4.1.2.

$$v = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{10^3}{5,26 \cdot 10^{-3}} = 19 \cdot 10^4 \text{ km/s} = 1,9 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

$$\mathbf{4.1.2.} \quad v = 1,9 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

4.1.3.

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2 \cdot 3,14}{5,26 \cdot 10^{-3}} = 1,19 \cdot 10^3 \text{ km}.$$

$$\mathbf{4.1.3.} \quad \lambda = 1,19 \cdot 10^3 \text{ km}.$$

4.2.

Pre uvedené dlhé vedenie vypočítajte

1. napätie $u_2(t)$ na konci vedenia,
2. prúd $i_2(t)$ na konci vedenia,
3. prúd $i_1(t)$ na začiatku vedenia

ak napätie na vstupe vedenia je $u_1(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(1000t + 30^\circ)$ V a impedancia zát'aže $Z_2 = 200 \Omega$.

Riešenie:

Pretože máme definovaný výstup (koniec) vedenia ($Z_2 = 200 \Omega$), pre jeho popis zvyčajne používame podmienkové rovnice (1.1) a (1.2) pre napätie a prúd na vstupe vedenia, určené pomocou výstupných hodnôt:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma}l + \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma}l,$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma}l + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma}l.$$

4.2.1.

Z prvej rovnice vyjadríme:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma}l + \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma}l = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma}l + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma}l = \dot{U}_2 \left(\cosh \dot{\gamma}l + \frac{\dot{Z}_v}{\dot{Z}_2} \sinh \dot{\gamma}l \right) \Rightarrow$$

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\cosh \dot{\gamma}l + \frac{\dot{Z}_v}{\dot{Z}_2} \sinh \dot{\gamma}l},$$

kde $\dot{U}_1 = 10 e^{j30^\circ}$ V, $\dot{Z}_2 = 200 \Omega$,

$$\dot{Z}_v = 725,19 e^{-j18,9^\circ} \Omega \text{ (úloha 4.1.1),}$$

$$\dot{\gamma} = 5,85 \cdot 10^{-3} e^{j63,95^\circ} \text{ km}^{-1}, \quad \beta = 2,57 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}, \quad \alpha = 5,26 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1} \text{ (úloha 4.1.1).}$$

Potom

$$\beta l = 5,26 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,526, \quad \alpha l = 2,57 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,257$$

a

$$\begin{aligned} \cosh \dot{\gamma}l &= \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma}l} + e^{-\dot{\gamma}l}) = \frac{1}{2} (e^{(\beta+j\alpha)l} + e^{-(\beta+j\alpha)l}) = \frac{1}{2} (e^{\beta l} e^{j\alpha l} + e^{-\beta l} e^{-j\alpha l}) = \\ &= \frac{1}{2} [e^{\beta l} (\cos \alpha l + j \sin \alpha l) + e^{-\beta l} (\cos \alpha l - j \sin \alpha l)] = \\ &= \frac{1}{2} [e^{0,257} (\cos 0,526 + j \sin 0,526) + e^{-0,257} (\cos 0,526 - j \sin 0,526)] = \\ &= \frac{1}{2} [1,293(0,865 + j0,502) + 0,774(0,865 - j0,502)] = \\ &= \frac{1}{2} (1,12 + j0,646 + 0,67 - j0,387) = \frac{1}{2} (1,79 + j0,259) = 0,9 e^{j8,2^\circ}; \end{aligned}$$

$$\sinh \dot{\gamma}l = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma}l} - e^{-\dot{\gamma}l}) = \frac{1}{2} (1,12 + j0,646 - 0,67 + j0,387) = \frac{1}{2} (0,45 + j1,03) = 0,563 e^{j66,5^\circ}.$$

Máme teda:

$$\dot{U}_2 = \frac{10 e^{j30^\circ}}{0,9 e^{j8,2^\circ} + \frac{725,19 e^{-j18,9^\circ}}{200} \cdot 0,56 e^{j66,5^\circ}} = \frac{10 e^{j30^\circ}}{0,9 e^{j8,2^\circ} + 2,04 e^{j47,6^\circ}} = 3,57 e^{-j5,8^\circ} \text{ V}.$$

4.2.1.

$$u_2(t) = 5,3 \sin(1000t - 5,8^\circ) \text{ V}.$$

4.2.2.

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} = \frac{3,57 e^{-j5,8^\circ}}{200} = 17,85 \cdot 10^{-3} e^{-j5,8^\circ} \text{ A}.$$

4.2.2.

$$i_2(t) = 25,24 \sin(1000t - 5,8^\circ) \text{ mA}.$$

4.2.3.

Z druhej rovnice vyjadríme:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma}l + \frac{\dot{U}_2}{Z_v} \sinh \dot{\gamma}l = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} \cosh \dot{\gamma}l + \frac{\dot{U}_2}{Z_v} \sinh \dot{\gamma}l = \dot{U}_2 \left(\frac{1}{\dot{Z}_2} \cosh \dot{\gamma}l + \frac{1}{Z_v} \sinh \dot{\gamma}l \right),$$

kde $\dot{Z}_2 = 200 \Omega$, $\dot{Z}_v = 725,19 e^{-j18,9^\circ} \Omega$ (úloha 4.1.1),

$$\cosh \dot{\gamma}l = \frac{1}{2}(e^{\dot{\gamma}l} + e^{-\dot{\gamma}l}) = 0,9 e^{j8,2^\circ} \quad \text{a} \quad \sinh \dot{\gamma}l = \frac{1}{2}(e^{\dot{\gamma}l} - e^{-\dot{\gamma}l}) = 0,563 e^{j66,5^\circ} \quad (\text{úloha 4.2.1}).$$

Potom

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= 3,57 e^{-j5,8^\circ} \left(\frac{0,9 e^{j8,2^\circ}}{200} + \frac{0,56 e^{j66,5^\circ}}{725,19 e^{-j18,9^\circ}} \right) = 3,57 e^{-j5,8^\circ} \left(4,5 \cdot 10^{-3} e^{j2,4^\circ} + 0,77 \cdot 10^{-3} e^{j75,4^\circ} \right) = \\ &= 16,06 \cdot 10^{-3} e^{j2,4^\circ} + 2,75 \cdot 10^{-3} e^{j69,6^\circ} = 17,4 \cdot 10^{-3} e^{j10,8^\circ} \text{ A.} \end{aligned}$$

4.2.3. $i_1(t) = 24,6 \sin(1000t + 10,8^\circ) \text{ mA}$.

4.3.

Pre uvedené dlhé vedenie ďalej vypočítajte

1. fázor napätia v polovici vedenia $\dot{U}(l/2)$,
2. fázor prúdu v polovici vedenia $\dot{I}(l/2)$,
3. koeficient odrazu vlny napätia v polovici vedenia $\dot{r}_u(l/2)$.

ak napätie na vstupe vedenia je $u_1(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(1000t + 30^\circ) \text{ V}$ a impedancia záťaže $\dot{Z}_2 = 200 \Omega$.

Riešenie:

Pre napätie a prúd v polovici vedenia platí:

$$\dot{U}(x=l/2) = \dot{U}_1 \cosh \dot{\gamma}l/2 - \dot{I}_1 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma}l/2 = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma}l/2 + \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma}l/2,$$

$$\dot{I}(x=l/2) = \dot{I}_1 \cosh \dot{\gamma}l/2 - \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma}l/2 = \dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma}l/2 + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma}l/2.$$

Aj v tomto prípade máme definovaný výstup vedenia ($\dot{Z}_2 = 200 \Omega$), preto použijeme podmienkové rovnice pre napätie a prúd v polovici vedenia určené pomocou výstupných hodnôt:

$$\dot{U}(l/2) = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma}l/2 + \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma}l/2 \quad (1)$$

$$\dot{I}(l/2) = \dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma}l/2 + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma}l/2 \quad (2)$$

4.3.1.

Z rovnice (1) dostaneme:

$$\begin{aligned} \dot{U}(l/2) &= \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma}l/2 + \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma}l/2 = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma}l/2 + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma}l/2 = \\ &= \dot{U}_2 \left(\cosh \dot{\gamma}l/2 + \frac{\dot{Z}_v}{\dot{Z}_2} \sinh \dot{\gamma}l/2 \right). \end{aligned}$$

kde $\dot{Z}_v = 725,19 e^{-j18,9^\circ} \Omega$ (úloha 4.1.1),

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\cosh \dot{\gamma}l + \frac{\dot{Z}_v}{\dot{Z}_2} \sinh \dot{\gamma}l} = 3,57 e^{-j5,8^\circ} \text{ V} \quad (\text{úloha 4.2.1}).$$

Určíme $\cosh \dot{\gamma}l/2$ a $\sinh \dot{\gamma}l/2$:

$$\beta l/2 = 2,57 \cdot 10^{-3} \cdot 50 = 0,128 \quad \text{a} \quad \alpha l/2 = 5,26 \cdot 10^{-3} \cdot 50 = 0,263,$$

$$\begin{aligned} \cosh \dot{\gamma} l/2 &= \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l/2} + e^{-\dot{\gamma} l/2}) = \frac{1}{2} [e^{\beta l/2} (\cos \alpha l/2 + j \sin \alpha l/2) + e^{-\beta l/2} (\cos \alpha l/2 - j \sin \alpha l/2)] = \\ &= \frac{1}{2} [e^{0,128} (\cos 0,263 + j \sin 0,263) + e^{-0,128} (\cos 0,263 - j \sin 0,263)] = \\ &= \frac{1}{2} (1,097 + j0,295 + 0,85 - j0,229) = 0,974 e^{j1,94^\circ}; \end{aligned}$$

$$\sinh \dot{\gamma} l/2 = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l/2} - e^{-\dot{\gamma} l/2}) = \frac{1}{2} (1,097 + j0,295 - 0,85 + j0,229) = 0,289 e^{j64,7^\circ}.$$

Potom

$$\begin{aligned} \dot{U}(l/2) &= 3,57 e^{-j5,8^\circ} \left(0,974 e^{j1,9^\circ} + \frac{725,19 e^{j18,9^\circ}}{200} 0,289 e^{j64,3^\circ} \right) = \\ &= 3,57 e^{-j5,8^\circ} (0,974 e^{j1,9^\circ} + 1,048 e^{j45,4^\circ}) = 3,477 e^{-j3,9^\circ} + 3,741 e^{j39,6^\circ} = 6,23 e^{j20,2^\circ} \text{ V}. \end{aligned}$$

4.3.1. $\dot{U}(l/2) = 6,23 e^{j20,2^\circ} \text{ V}.$

4.3.2.

Z rovnice (2) dostaneme:

$$\begin{aligned} \dot{I}(l/2) &= \dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma} l/2 + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l/2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} \cosh \dot{\gamma} l/2 + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l/2 = \\ &= \dot{U}_2 \left(\frac{1}{\dot{Z}_2} \cosh \dot{\gamma} l/2 + \frac{1}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l/2 \right), \end{aligned}$$

kde $\dot{Z}_2 = 200 \Omega$, $\dot{Z}_v = 725,19 e^{-j18,9^\circ} \Omega$ (úloha 4.1.1),

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\cosh \dot{\gamma} l + \frac{\dot{Z}_v}{\dot{Z}_2} \sinh \dot{\gamma} l} = 3,57 e^{-j5,8^\circ} \text{ V} \quad (\text{úloha 4.2.1});$$

$$\cosh \dot{\gamma} l/2 = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l/2} + e^{-\dot{\gamma} l/2}) = 0,974 e^{j1,94^\circ},$$

$$\sinh \dot{\gamma} l/2 = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l/2} - e^{-\dot{\gamma} l/2}) = 0,289 e^{j64,7^\circ} \quad (\text{úloha 4.3.1}).$$

Potom

$$\begin{aligned} \dot{I}(l/2) &= 3,57 e^{-j5,8^\circ} \left(\frac{0,974 e^{j1,9^\circ}}{200} + \frac{0,289 e^{j64,7^\circ}}{725,19 e^{-j18,9^\circ}} \right) = 3,57 e^{-j5,8^\circ} (4,87 \cdot 10^{-3} e^{j1,9^\circ} + 0,398 \cdot 10^{-3} e^{j83,6^\circ}) = \\ &= 17,386 \cdot 10^{-3} e^{-j3,9^\circ} + 1,42 \cdot 10^{-3} e^{j78,1^\circ} = 17,64 \cdot 10^{-3} e^{j0,7^\circ} \text{ A}. \end{aligned}$$

4.3.2. $\dot{I}(l/2) = 17,64 e^{j0,7^\circ} \text{ mA}.$

4.3.3.

Koeficient odrazu vlny napätia v mieste x vedenia je

$$\dot{r}_u(x) = \dot{r}_u(l) e^{-2\dot{\gamma}(l-x)} = \frac{\dot{Z}_2 - \dot{Z}_v}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_v} e^{-2\dot{\gamma}(l-x)}$$

a pre $x = l/2$ bude:

$$\dot{r}_u(l/2) = \dot{r}_u(l) e^{-2\dot{\gamma}l/2} = \frac{\dot{Z}_2 - \dot{Z}_v}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_v} e^{-\dot{\gamma}l} = \frac{\dot{Z}_2 - \dot{Z}_v}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_v} e^{-\beta l} e^{-j\alpha l},$$

kde $\dot{Z}_2 = 200 \Omega$, $\dot{Z}_v = 725,19 e^{-j18,9^\circ} \Omega$ (úloha 4.1.1),
 $\beta l = 0,526$ a $\alpha l = 0,257$ (úloha 4.2.1).

Potom

$$\begin{aligned} \dot{r}_u(l/2) &= \frac{200 - 725,19 e^{-j18,9^\circ}}{200 + 725,19 e^{-j18,9^\circ}} e^{-0,257} e^{-j0,526} = \frac{539,87 e^{j154,2^\circ}}{916,7 e^{-j14,85^\circ}} e^{-0,257} e^{-j169^\circ} = \\ &= 0,59 e^{-0,257} e^{-j169^\circ} e^{j30,13^\circ} = 0,773 e^{-j138,9^\circ}. \end{aligned}$$

4.3.3. $\dot{r}_u(l/2) = 0,772 e^{-j138,9^\circ}$.

Poznámka:

Aj keď máme definovaný výstup vedenia, t.j. v tomto prípade impedanciu \dot{Z}_2 , môžeme na riešenie úloh použiť aj podmienkové rovnice (2.1) a (2.2) pre napätie a prúd určené pomocou vstupných hodnôt, ale v tom prípade je výpočet podstatne obtiažnejší. Pre porovnanie uvedieme riešenie úlohy 4.3.1 a 4.3.2 pomocou podmienkových rovníc pre napätie a prúd v polovici vedenia určené pomocou vstupných hodnôt:

$$\dot{U}(l/2) = \dot{U}_1 \cosh \dot{\gamma} l/2 - \dot{I}_1 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l/2 \quad (1)'$$

$$\dot{I}(l/2) = \dot{I}_1 \cosh \dot{\gamma} l/2 - \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l/2 \quad (2)'$$

(4.3.1)'

Z rovnice (1) dostaneme:

$$\begin{aligned} \dot{U}(l/2) &= \dot{U}_1 \cosh \dot{\gamma} l/2 - \dot{I}_1 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l/2 = \dot{U}_1 \cosh \dot{\gamma} l/2 - \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_1} \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l/2 = \\ &= \dot{U}_1 \left(\cosh \dot{\gamma} l/2 - \frac{\dot{Z}_v}{\dot{Z}_1} \sinh \dot{\gamma} l/2 \right), \end{aligned}$$

kde $\dot{U}_1 = 10 e^{j30^\circ} \text{V}$, $\dot{Z}_2 = 200 \Omega$, $\dot{Z}_v = 725,19 e^{-j18,9^\circ} \Omega$ (úloha 4.1.1).

Ďalej určíme:

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_v \frac{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_v \operatorname{tgh} \dot{\gamma} l/2}{\dot{Z}_v + \dot{Z}_2 \operatorname{tgh} \dot{\gamma} l/2}, \quad \text{kde} \quad \operatorname{tgh} \dot{\gamma} l/2 = \frac{\sinh \dot{\gamma} l/2}{\cosh \dot{\gamma} l/2}.$$

$$\cosh \dot{\gamma} l/2 = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l/2} + e^{-\dot{\gamma} l/2}) = 0,974 e^{j1,94^\circ}, \quad \sinh \dot{\gamma} l/2 = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l/2} - e^{-\dot{\gamma} l/2}) = 0,289 e^{j64,7^\circ} \quad (\text{úloha 4.3.1}),$$

$$\operatorname{tgh} \dot{\gamma} l/2 = \frac{0,289 e^{j64,7^\circ}}{0,974 e^{j1,94^\circ}} = 0,296 e^{j62,7^\circ}$$

a

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= 725,19 e^{-j18,9^\circ} \frac{200 + 725,19 e^{-j18,9^\circ} \cdot 0,296 e^{j62,7^\circ}}{725,19 e^{-j18,9^\circ} + 200 \cdot 0,296 e^{j62,7^\circ}} = 725,19 e^{-j18,9^\circ} \frac{200 + 214,66 e^{j43,8^\circ}}{725,19 e^{-j18,9^\circ} + 59,29 e^{j62,7^\circ}} = \\ &= 725,19 e^{-j18,9^\circ} \frac{384,77 e^{j22,7^\circ}}{736,18 e^{-j14,3^\circ}} = 379 e^{j18,1^\circ} \Omega. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} \dot{U}(l/2) &= 10 e^{j30^\circ} \left(0,974 e^{j1,94^\circ} - \frac{725,19 e^{-j18,9^\circ}}{379 e^{j18,1^\circ}} 0,289 e^{j64,7^\circ} \right) = \\ &= 10 e^{j30^\circ} \left(0,974 e^{j1,94^\circ} - 1,913 e^{-j37^\circ} \cdot 0,289 e^{j64,7^\circ} \right) = 10 e^{j30^\circ} \left(0,974 e^{j1,94^\circ} - 0,553 e^{j27,7^\circ} \right) = \\ &= 10 e^{j30^\circ} \cdot 0,532 e^{-j24,9^\circ} = 5,32 e^{j5,1^\circ} \text{V}. \end{aligned}$$

$$(4.3.1)'. \quad \dot{U}(l/2) = 5,32 e^{j5,1^\circ} \text{ V}$$

(4.3.2)'.
Z rovnice (2) dostaneme:

$$\begin{aligned} \dot{I}(l/2) &= \dot{I}_1 \cosh \dot{\gamma} l/2 - \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l/2 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_1} \cosh \dot{\gamma} l/2 - \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l/2 = \\ &= \dot{U}_1 \left(\frac{1}{\dot{Z}_1} \cosh \dot{\gamma} l/2 - \frac{1}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l/2 \right), \end{aligned}$$

kde $\dot{U}_1 = 10 e^{j30^\circ} \text{ V}$, $\dot{Z}_2 = 200 \Omega$,

$$\dot{Z}_1 = 379 e^{j18,1^\circ} \Omega \text{ (úloha 4.3.1)'}, \quad \dot{Z}_v = 725,19 e^{-j18,9^\circ} \Omega \text{ (úloha 4.1.1.)},$$

$$\cosh \dot{\gamma} l/2 = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l/2} + e^{-\dot{\gamma} l/2}) = 0,974 e^{j1,94^\circ},$$

$$\sinh \dot{\gamma} l/2 = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l/2} - e^{-\dot{\gamma} l/2}) = 0,289 e^{j64,7^\circ} \text{ (úloha 4.3.1)}.$$

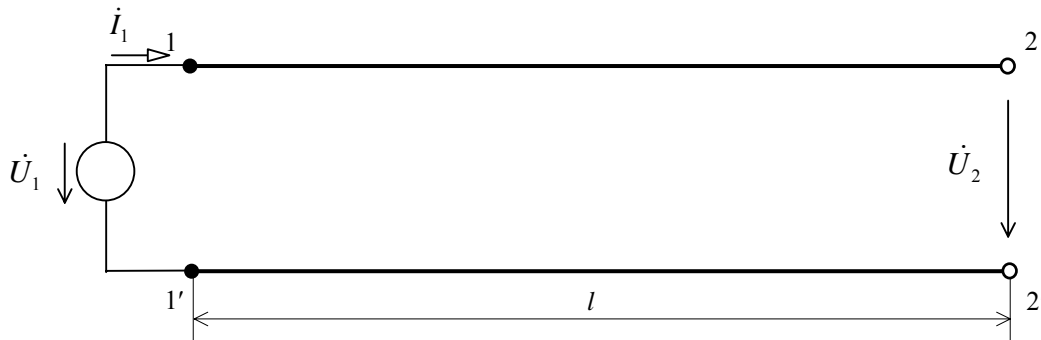
Potom

$$\begin{aligned} \dot{I}(l/2) &= 10 e^{j30^\circ} \left(\frac{0,974 e^{j1,9^\circ}}{379 e^{j18,1^\circ}} - \frac{0,289 e^{j64,7^\circ}}{725,19 e^{-j18,9^\circ}} \right) = 10 e^{j30^\circ} (2,5 \cdot 10^{-3} e^{-j16,2^\circ} - 0,398 \cdot 10^{-3} e^{j83,6^\circ}) = \\ &= 10 e^{j30^\circ} \cdot 2,13 \cdot 10^{-3} e^{j9,7^\circ} = 21,3 e^{j9,7^\circ} \text{ mA}. \end{aligned}$$

$$(4.3.2)'. \quad \dot{I}(l/2) = 21,3 e^{j9,7^\circ} \text{ mA}.$$

4.2. ŠPECIÁLNE PRÍPADY HOMOGENNÝCH DLHÝCH VEDENÍ

A. Homogénne dlhé vedenie v režime naprázdno



Obr. 4.3

Režim naprázdno znamená, že výstupné svorky vedenia 2, 2' sú naprázdno, t.j. rozpojené (obr. 4.3).

Impedanciu záťaže \dot{Z}_2 teda považujeme za nekonečne veľkú a prúd \dot{I}_2 na konci vedenia netečie:

$$\dot{Z}_2 \rightarrow \infty \quad \text{a} \quad \dot{I}_2 = 0.$$

Pretože v prípade dlhého vedenia v režime naprázdno máme vždy definovaný výstup vedenia, pre jeho popis zvyčajne používame systém rovníc (1.1.) a (1.2.), ktoré pre režim naprázdno budú mať tvar:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma} l \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l \quad (\text{A.2})$$

Ďalej bude:

$$\dot{Z}(x) = \frac{\dot{U}_1 \cosh \dot{\gamma}x}{-\frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma}x} = \frac{\dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma}(l-x)}{\frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma}(l-x)} = -\dot{Z}_v \operatorname{cotgh} \dot{\gamma}x = \dot{Z}_v \operatorname{cotgh} \dot{\gamma}(l-x),$$

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma}l}{\frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma}l} = \dot{Z}_v \operatorname{cotgh} \dot{\gamma}l,$$

$$\dot{i}_u(l) = 1, \quad \dot{i}_i(l) = -1,$$

teda na konci vedenia naprázdno dochádza k úplnému odrazu vlny napätia aj vlny prúdu, pričom vlna napätia sa odráža s rovnakou fázou a vlna prúdu s opačnou fázou.

Príklady riešenia úloh:

4.4.

Uvedené dlhé vedenie pracuje v režime naprázdno. Vypočítajte:

1. napätie $u_2(t)$ na konci vedenia,
2. vstupnú impedanciu vedenia \dot{Z}_1 ,
3. prúd $i_1(t)$ na začiatku vedenia.

ak napätie na vstupe vedenia je $u_1(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(1000t + 30^\circ)$ V.

Riešenie:

4.4.1.

Z rovnice (A.1) vyjadríme:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma}l \quad \Rightarrow \quad \dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\cosh \dot{\gamma}l},$$

$$\text{kde } \dot{U}_1 = 10 e^{j30^\circ} \text{ V, } \cosh \dot{\gamma}l = \frac{1}{2}(e^{\dot{\gamma}l/2} + e^{-\dot{\gamma}l/2}) = 0,9 e^{j8,2^\circ} \text{ (úloha 4.2.1).}$$

Potom

$$\dot{U}_2 = \frac{10 e^{j30^\circ}}{0,9 e^{j8,2^\circ}} = 11,11 e^{j21,8^\circ} \text{ V.}$$

$$4.4.1. \quad u_2(t) = 15,7 \sin(1000t + 27,8^\circ) \text{ V}$$

4.4.2.

Vstupná impedancia \dot{Z}_1 dlhého vedenia v režime naprázdno je vyjadrená vzťahom

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_v \operatorname{cotgh} \dot{\gamma}l,$$

kde $\dot{Z}_v = 725,19 e^{-j18,9^\circ} \Omega$ (úloha 4.1.1),

$$\operatorname{cotgh} \dot{\gamma}l = \frac{\cosh \dot{\gamma}l}{\sinh \dot{\gamma}l} \quad \text{a} \quad \cosh \dot{\gamma}l = \frac{1}{2}(e^{\dot{\gamma}l/2} + e^{-\dot{\gamma}l/2}) = 0,9 e^{j8,2^\circ},$$

$$\sinh \dot{\gamma}l = \frac{1}{2}(e^{\dot{\gamma}l/2} - e^{-\dot{\gamma}l/2}) = 0,563 e^{j66,5^\circ} \text{ (úloha 4.2.1).}$$

Potom

$$\dot{Z}_1 = 725,19 e^{-j18,9^\circ} \frac{0,9 e^{j8,2^\circ}}{0,563 e^{j66,5^\circ}} = 1165,67 e^{-j77,2^\circ} \Omega.$$

$$4.4.2. \quad \dot{Z}_1 = 1165,67 e^{-j77,2^\circ} \Omega.$$

4.4.3.

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_1} = \frac{10 e^{j30^\circ}}{1165,67 e^{-j77,2^\circ}} = 8,58 \cdot 10^{-3} e^{j107,2^\circ} \text{ A.}$$

$$4.4.3. \quad i_1(t) = 12,13 \sin(1000t + 107,2^\circ) \text{ mA.}$$

4.5.

Pre uvedené dlhé vedenie pracujúce v režime naprázdno vypočítajte

1. fázor napätia v polovici vedenia $\dot{U}(l/2)$,
2. fázor prúdu v polovici vedenia $\dot{I}(l/2)$,
3. koeficient odrazu vlny napätia v polovici vedenia $\dot{r}_u(l/2)$

ak napätie na vstupe vedenia je $u_1(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(1000t + 30^\circ) \text{ V}$.

Riešenie:

Pre napätie a prúd v polovici vedenia pracujúceho v režime naprázdno platí:

$$\dot{U}(x=l/2) = \dot{U}_1 \cosh \dot{\gamma} l/2 - \dot{I}_1 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l/2 = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma} l/2,$$

$$\dot{I}(x=l/2) = \dot{I}_1 \cosh \dot{\gamma} l/2 - \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l/2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l/2.$$

a použijeme podmienkové rovnice pre napätie a prúd v polovici vedenia určené pomocou výstupných hodnôt:

$$\dot{U}(l/2) = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma} l/2,$$

$$\dot{I}(l/2) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l/2.$$

4.5.1.

Fázor napätia v polovici vedenia je

$$\dot{U}(l/2) = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma} l/2.$$

$$\text{Kde} \quad \dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\cosh \dot{\gamma} l} = 11,11 e^{j21,8^\circ} \text{ V (úloha 4.4.1);}$$

$$\beta = 2,57 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}, \quad \alpha = 5,26 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1} \text{ (úloha 4.4.1)} \Rightarrow \beta l/2 = 0,128, \quad \alpha l/2 = 0,263;$$

$$\cosh \dot{\gamma} l/2 = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l/2} + e^{-\dot{\gamma} l/2}) = 0,974 e^{j1,94^\circ} \text{ (úloha 4.3.1).}$$

Potom

$$\dot{U}(l/2) = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma} l/2 = 11,11 e^{j21,8^\circ} \cdot 0,974 e^{j1,94^\circ} = 10,82 e^{j23,7^\circ} \text{ V}$$

$$4.5.1. \quad \dot{U}(l/2) = 10,82 e^{j23,7^\circ} \text{ V.}$$

4.5.2.

Fázor prúdu v polovici vedenia je

$$\dot{I}(l/2) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l/2,$$

$$\text{kde} \quad \dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\cosh \dot{\gamma} l} = 11,11 e^{j21,8^\circ} \text{ V (úloha 4.4.1);}$$

$$\dot{Z}_v = 725,19 e^{-j18,9^\circ} \Omega \text{ (úloha 4.1.1);}$$

$$\sinh \dot{\gamma} l/2 = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l/2} - e^{-\dot{\gamma} l/2}) = 0,289 e^{j64,7^\circ} \quad (\text{úloha 4.3.1}).$$

Potom

$$\dot{I}(l/2) = \frac{11,11 e^{j21,8^\circ}}{725,19 e^{-j18,9^\circ}} 0,289 e^{j64,7^\circ} = 4,43 \cdot 10^{-3} e^{j105,4^\circ} \text{ A}.$$

$$4.5.2. \quad \dot{I}(l/2) = 4,43 e^{j105,4^\circ} \text{ mA}.$$

4.5.3.

Koeficient odrazu vlny napätia v polovici vedenia $\dot{r}_u(l/2)$ je daný vzťahom

$$\dot{r}_u(x=l/2) = \dot{r}_u(l) e^{-2\dot{\gamma}(l-l/2)} = \dot{r}_u(l) e^{-2\dot{\gamma}l/2} = \dot{r}_u(l) e^{-2\beta l/2} e^{-j2\alpha l/2},$$

$$\text{kde } \dot{r}_u(l) = 1, \quad \beta l/2 = 0,128 \quad \text{a} \quad \alpha l/2 = 0,263.$$

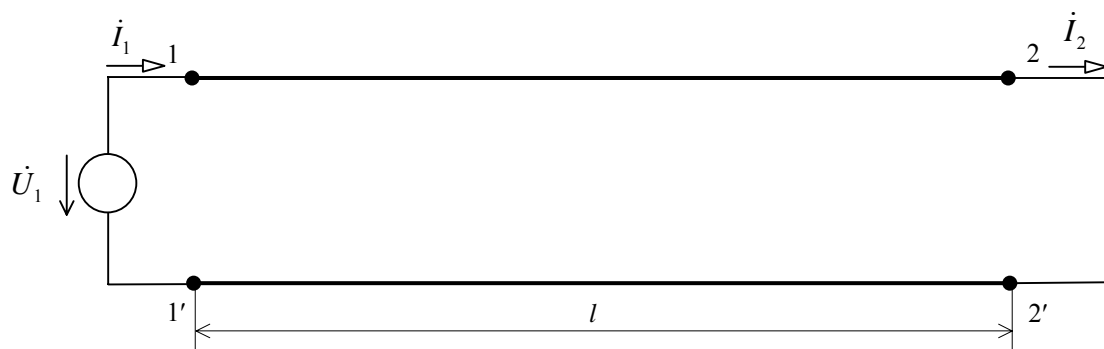
Potom

$$\dot{r}_u(l/2) = \dot{r}_u(l) e^{-2\beta l/2} e^{-j2\alpha l/2} = 1 e^{-j0,256} e^{-j0,526} = 0,774 e^{-j30,1^\circ}$$

$$4.5.3. \quad \dot{r}_u(l/2) = 0,774 e^{-j30,1^\circ}$$

B. Homogénne dlhé vedenie v režime nakrátko

Režim nakrátko znamená, že výstupné svorky vedenia 2, 2' sú spojené nakrátko (obr. 4.4).



Obr. 4.4

Impedanciu záťaže \dot{Z}_2 teda považujeme za nulovú a napätie \dot{U}_2 na konci vedenia je tiež nulové:

$$\dot{Z}_2 = 0 \quad \text{a} \quad \dot{U}_2 = 0.$$

Pretože aj prípade dlhého vedenia v režime nakrátko máme vždy zadaný výstup vedenia, pre jeho popis použijeme systém rovníc (1.1.) a (1.2.), ktoré pre režim nakrátko budú mať tvar:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l \quad (\text{B.1})$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma} l \quad (\text{B.2})$$

Ďalej bude:

$$\dot{Z}(x) = \frac{-\dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} x}{\dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma} x} = \frac{\dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} (l-x)}{\dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma} (l-x)} = -\dot{Z}_v \tanh \dot{\gamma} x = \dot{Z}_v \tanh \dot{\gamma} (l-x),$$

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l}{\dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma} l} = \dot{Z}_v \tanh \dot{\gamma} l$$

$$\dot{r}_u(l) = -1; \quad \dot{r}_i(l) = 1,$$

teda na konci vedenia naprázdno dochádza k úplnému odrazu vlny napätia aj vlny prúdu, pričom vlna napätia sa odráža s opačnou fázou a vlna prúdu s rovnakou fázou.

Príklady riešenia úloh:

4.6.

Uvedené dlhé vedenie pracuje v režime nakrátko. Vypočítajte:

1. prúd $i_2(t)$ na konci vedenia,
2. vstupnú impedanciu \dot{Z}_1 ,
3. prúd $i_1(t)$ na začiatku vedenia

ak napätie na vstupe vedenia je $u_1(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(1000t + 30^\circ)$ V .

Riešenie:**4.6.1.**

Z rovnice (B.1) vyjadríme:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l}$$

kde $\dot{U}_1 = 10 e^{j30^\circ}$ V , $\dot{Z}_v = 725,19 e^{-j18,9^\circ} \Omega$ (úloha 4.1.1),

$$\beta l/2 = 0,256 \quad \text{a} \quad \alpha l/2 = 0,526 ,$$

$$\sinh \dot{\gamma} l = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l} - e^{-\dot{\gamma} l}) = 0,563 e^{j66,5^\circ} \text{ (úloha 4.2.1).}$$

Potom

$$\dot{I}_2 = \frac{10 e^{j30^\circ}}{725,19 e^{-j18,9^\circ} \cdot 0,563 e^{j66,5^\circ}} = 24,5 \cdot 10^{-3} e^{-j17,6^\circ} \text{ A .}$$

$$\mathbf{4.6.1.} \quad i_2(t) = 34,65 \sin(1000t - 17,6^\circ) \text{ mA}$$

4.6.2.

Vstupná impedancia \dot{Z}_1 dlhého vedenia v režime nakrátko je vyjadrená vzťahom

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_v \operatorname{tgh} \dot{\gamma} l ,$$

$$\text{kde} \quad \dot{Z}_v = 725,19 e^{-j18,9^\circ} \Omega \text{ (úloha 4.1.1),} \quad \operatorname{tgh} \dot{\gamma} l = \frac{\sinh \dot{\gamma} l}{\cosh \dot{\gamma} l} ,$$

$$\cosh \dot{\gamma} l = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l} + e^{-\dot{\gamma} l}) = 0,9 e^{j8,2^\circ} , \quad \sinh \dot{\gamma} l = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l} - e^{-\dot{\gamma} l}) = 0,563 e^{j66,5^\circ} \text{ (úloha 4.2.1).}$$

Potom

$$\dot{Z}_1 = 725,19 e^{-j18,9^\circ} \frac{0,563 e^{j66,5^\circ}}{0,9 e^{j8,2^\circ}} = 453,65 e^{j39,4^\circ} \Omega .$$

$$\mathbf{4.6.2.} \quad \dot{Z}_1 = 453,65 e^{j39,4^\circ} \Omega .$$

4.6.3.

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_1} = \frac{10 e^{j30^\circ}}{453,65 e^{j39,4^\circ}} = 22 \cdot 10^{-3} e^{-j9,4^\circ} \text{ A .}$$

$$\mathbf{4.6.3.} \quad i_1(t) = 31,1 \sin(1000t - 9,4^\circ) \text{ mA .}$$

4.7.

Pre uvedené dlhé vedenie pracujúce v režime nakrátko vypočítajte

1. fázor napätia v polovici vedenia $\dot{U}(l/2)$,
2. fázor prúdu v polovici vedenia $\dot{I}(l/2)$,
3. koeficient odrazu vlny napätia v polovici vedenia $\dot{r}_u(l/2)$

ak napätie na vstupe vedenia je $u_1(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(1000t + 30^\circ)$ V .

Riešenie:

Pre napätie a prúd v polovici vedenia pracujúceho v režime nakrátko platí:

$$\dot{U}(x=l/2) = \dot{U}_1 \cosh \dot{\gamma} l/2 - \dot{I}_1 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l/2 = \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l/2,$$

$$\dot{I}(x=l/2) = \dot{I}_1 \cosh \dot{\gamma} l/2 - \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l/2 = \dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma} l/2.$$

V tomto prípade máme opäť definovaný výstup vedenia, preto použijeme podmienkové rovnice pre napätie a prúd v polovici vedenia určené pomocou výstupných hodnôt:

$$\dot{U}(l/2) = \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l/2,$$

$$\dot{I}(l/2) = \dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma} l/2.$$

4.7.1.

Fázor napätia v polovici vedenia je

$$\dot{U}(l/2) = \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l/2,$$

kde $\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l} = 24,5 \cdot 10^{-3} e^{-j17,6^\circ}$ A (úloha 4.6.1);

$$\beta l/2 = 0,128 \quad \text{a} \quad \alpha l/2 = 0,263,$$

$$\sinh \dot{\gamma} l/2 = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l/2} - e^{-\dot{\gamma} l/2}) = \frac{1}{2} 0,289 e^{j64,7^\circ} \quad (\text{úloha 4.3.1}).$$

Potom

$$\dot{U}(l/2) = \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l/2 = 24,5 \cdot 10^{-3} e^{-j17,6^\circ} \cdot 725,19 e^{-j18,9^\circ} \cdot 0,289 e^{j64,7^\circ} = 5,13 e^{j28,2^\circ} \text{ V}$$

4.7.1. $\dot{U}(l/2) = 5,13 e^{j28,2^\circ}$ V .

4.7.2.

Fázor prúdu v polovici vedenia je

$$\dot{I}(l/2) = \dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma} l/2,$$

kde $\dot{I}_2 = 24,5 \cdot 10^{-3} e^{-j17,6^\circ}$ A (úloha 4.6.1);

$$\beta l/2 = 0,128 \quad \text{a} \quad \alpha l/2 = 0,263,$$

$$\cosh \dot{\gamma} l/2 = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l/2} + e^{-\dot{\gamma} l/2}) = 0,974 e^{j1,94^\circ} \quad (\text{úloha 4.3.1}).$$

Potom

$$\dot{I}(l/2) = 24,5 \cdot 10^{-3} e^{-j17,6^\circ} \cdot 0,974 e^{j1,9^\circ} = 23,86 \cdot 10^{-3} e^{-j15,7^\circ} \text{ A}.$$

4.7.2. $\dot{I}(l/2) = 23,86 \cdot 10^{-3} e^{-j15,7^\circ}$ A .

4.7.3.

Koeficient odrazu vlny napätia v polovici vedenia $\dot{r}_u(l/2)$ je daný vzťahom

$$\dot{r}_u(x=l/2) = \dot{r}_u(l) e^{-2\dot{\gamma}(l-l/2)} = \dot{r}_u(l) e^{-2\dot{\gamma} l/2} = \dot{r}_u(l) e^{-2\beta l/2} e^{-j2\alpha l/2},$$

kde $\dot{r}_u(l) = -1$, $\beta l/2 = 0,128$ a $\alpha l/2 = 0,263$.

Potom

$$\dot{r}_u(l/2) = \dot{r}_u(l) e^{-2\beta l/2} e^{-j2\alpha l/2} (-1) e^{-j0,256} e^{-j0,526} = -0,774 e^{-j30,1^\circ}.$$

4.7.3. $\dot{r}_u(l/2) = -0,774 e^{-j30,1^\circ}$.

C. Prispôsobené homogénne dlhé vedenie

Prispôsobené vedenie je také, ktoré je na konci zaťažené impedanciou \dot{Z}_2 , ktorá je rovnaká ako vlnová impedancia vedenia \dot{Z}_v (obr. 4.5).



Obr. 4.5

Potom je:

$$\dot{Z}_2 = \dot{Z}_v$$

a pretože aj v tomto prípade máme zadaný výstup vedenia, pre jeho popis použijeme systém rovníc (1.1.) a (1.2.), ktoré pre prispôsobené vedenie budú mať tvar:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^{\gamma l} = \dot{U}_2 e^{\beta l} e^{j\alpha l} \quad (\text{C.1})$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 e^{\gamma l} = \dot{I}_2 e^{\beta l} e^{j\alpha l} \quad (\text{C.2})$$

Ďalej bude:

$$\dot{Z}_1(x) = \frac{\dot{U}_2 e^{\gamma(l-x)}}{\dot{I}_2 e^{\gamma(l-x)}} = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_v, \quad \dot{Z}_1 = \frac{\dot{U}_2 e^{\gamma x}}{\dot{I}_2 e^{\gamma x}} = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_v$$

$$\dot{r}_u(l) = 0; \quad \dot{r}_i(l) = 0,$$

teda impedancia prispôsobeného vedenia je v každom mieste vedenia rovnaká a rovná sa vlnovej impedancii tohto vedenia a koeficient odrazu vlny napätia aj vlny prúdu na konci vedenia je nulový, t.j. na konci vedenia ani v žiadnom mieste x vedenia nedochádza k odrazu vlny napätia ani vlny prúdu.

Príklady riešenia úloh:

4.8.

Uvedené dlhé vedenie je prispôsobené. Vypočítajte:

1. prúd $i_2(t)$ na konci vedenia,
2. vstupnú impedanciu \dot{Z}_1 ,
3. prúd $i_1(t)$ na začiatku vedenia

ak napätie na vstupe vedenia je $u_1(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(1000t + 30^\circ)$ V.

Riešenie:

4.8.1.

Z rovnice (C.1) vyjadríme:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^{\gamma l} = \dot{U}_2 e^{\beta l} e^{j\alpha l} \quad \Rightarrow \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_1 e^{-\beta l} e^{-j\alpha l}$$

$$\text{kde } \dot{U}_1 = 10 e^{j30^\circ} \text{ V}, \quad \beta l = 0,257, \quad \alpha l = 0,526.$$

Potom

$$\dot{U}_2 = 10 e^{j30^\circ} e^{-0,257} e^{-j0,526} = 7,73 e^{-j30,15^\circ} \text{ V}.$$

4.8.1. $u_2(t) = 10,9 \sin(1000t - 30,15^\circ) \text{ V}.$

4.8.2.

Impedancia prispôsobeného dlhého vedenia $\dot{Z}(x)$ sa v každom mieste x vedenia rovná jeho vlnovej impedancii \dot{Z}_v , teda aj vstupná impedancia \dot{Z}_1 prispôsobeného vedenia sa rovná jeho vlnovej impedancii \dot{Z}_v :

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_v = 725,19 e^{-j18,9^\circ} \Omega \text{ (úloha 4.1.1.)},$$

4.8.2. $\dot{Z}_1 = 725,19 e^{-j18,9^\circ} \Omega.$

4.8.3.

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_1} = \frac{10 e^{j30^\circ}}{725,19 e^{-j18,9^\circ}} = 13,8 \cdot 10^{-3} e^{j48,9^\circ} \text{ A}.$$

4.8.3. $i_1(t) = 19,5 \sin(1000t + 48,9^\circ) \text{ mA}.$

4.9.

Pre uvedené dlhé vedenie

1. fázor napätia v polovici vedenia $\dot{U}(l/2)$,

2. fázor prúdu v polovici vedenia $\dot{I}(l/2)$,

3. koeficient odrazu vlny napätia v polovici vedenia $\dot{r}_u(l/2)$

ak je vedenie prispôsobené a napätie na jeho vstupe je $u_1(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(1000t + 30^\circ) \text{ V}.$

Riešenie:

Pre napätie a prúd v polovici prispôsobeného vedenia platí:

$$\dot{U}(x=l/2) = \dot{U}_1 \cosh \dot{\gamma} l/2 - \dot{I}_1 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l/2 = \dot{U}_2 e^{\dot{\gamma} l/2},$$

$$\dot{I}(x=l/2) = \dot{I}_1 \cosh \dot{\gamma} l/2 - \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l/2 = \dot{I}_2 e^{\dot{\gamma} l/2}.$$

V tomto prípade máme opäť definovaný výstup, preto použijeme podmienkové rovnice pre napätie a prúd v polovici vedenia určené pomocou výstupných hodnôt:

$$\dot{U}(l/2) = \dot{U}_2 e^{\dot{\gamma} l/2},$$

$$\dot{I}(l/2) = \dot{I}_2 e^{\dot{\gamma} l/2}.$$

4.9.1.

Fázor napätia v polovici vedenia je

$$\dot{U}(l/2) = \dot{U}_2 e^{\dot{\gamma} l/2} = \dot{U}_2 e^{\beta l/2} e^{j\alpha l/2},$$

kde $\dot{U}_2 = \dot{U}_1 e^{-\beta l} e^{-j\alpha l} = 7,73 e^{-j30,15^\circ} \text{ V}$ (úloha 4.8.1).

Potom

$$\dot{U}(l/2) = 7,73 e^{-j30,15^\circ} 1,136 e^{j15^\circ} = 8,78 e^{-j15,15^\circ} \text{ V}$$

4.9.1. $\dot{U}(l/2) = 8,78 e^{-j15,15^\circ} \text{ V}.$

4.9.2.

Fázor prúdu v polovici vedenia je

$$\dot{I}(l/2) = \dot{I}_2 e^{\dot{\gamma} l/2}.$$

Prúd \dot{I}_2 na konci vedenia je

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} = \frac{7,73 e^{-j30,15^\circ}}{725,19 e^{-j18,9^\circ}} = 10,66 \cdot 10^{-3} e^{-j11,25^\circ} \text{ A}.$$

Potom

$$\dot{I}(l/2) = 10,66 \cdot 10^{-3} e^{-j11,25^\circ} e^{-0,128} e^{-j0,263} = 10,66 \cdot 10^{-3} e^{-j11,25^\circ} 0,88 e^{-j15^\circ} = 9,38 \cdot 10^{-3} e^{-j26,25^\circ} \text{ A}.$$

$$4.9.2. \quad \dot{I}(l/2) = 9,38 e^{-j26,25^\circ} \text{ mA}.$$

4.9.3.

Koeficient odrazu vlny napätia v polovici vedenia $\dot{r}_u(l/2)$ je daný vzťahom

$$\dot{r}_u(x=l/2) = \dot{r}_u(l) e^{-2\dot{\gamma}(l-l/2)} = \dot{r}_u(l) e^{-2\dot{\gamma}l/2} = \dot{r}_u(l) e^{-2\beta l/2} e^{-j2\alpha l/2},$$

$$\text{kde} \quad \dot{r}_u(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{r}_u(l/2) = 0.$$

$$4.9.3. \quad \dot{r}_u(l/2) = 0.$$

4.3. ŠPECIÁLNE TYPY DLHÝCH VEDENÍ

A. Bezstratové (ideálne) dlhé vedenia

Pre primárne parametre bezstratového dlhého vedenia platí

$$R_0 = 0 \quad \text{a} \quad G_0 = 0.$$

Sekundárne parametre bezstratového vedenia potom budú:

$$\dot{Z}_v = \sqrt{\frac{j\omega L_0}{j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}},$$

teda vlnová impedancia bezstratového vedenia má rýdzo ohmický charakter;

$$\dot{\gamma} = \sqrt{j\omega L_0 j\omega C_0} = j\omega \sqrt{L_0 C_0} = \beta + j\alpha \quad \Rightarrow \quad \beta = 0, \quad \alpha = \omega \sqrt{L_0 C_0},$$

teda pre bezstratové vedenie je komplexná konštanta šírenia sa vlny rýdzo imaginárna a koeficient tlmenia β vedenia je nulový.

Hyperbolické funkcie pre rýdzo imaginárny argument $\dot{\gamma} = j\alpha$ budú

$$\cosh \dot{\gamma} l = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l} + e^{-\dot{\gamma} l}) = \frac{1}{2} (e^{j\alpha l} + e^{-j\alpha l}) = \frac{1}{2} (\cos \alpha l + j \sin \alpha l + \cos \alpha l - j \sin \alpha l) = \cos \alpha l,$$

$$\sinh \dot{\gamma} l = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l} - e^{-\dot{\gamma} l}) = \frac{1}{2} (e^{j\alpha l} - e^{-j\alpha l}) = \frac{1}{2} (\cos \alpha l + j \sin \alpha l - \cos \alpha l + j \sin \alpha l) = j \sin \alpha l$$

a tak v podmienkových rovniciach pre napätie a prúd na vedení aj vo vzťahu pre impedanciu vedenia pre bezstratové vedenie hyperbolické funkcie komplexného argumentu $\dot{\gamma} l$ nahradíme jednoduchými goniometrickými funkciami rýdzo imaginárneho argumentu $j\alpha l$:

$$\cosh \dot{\gamma} l \rightarrow \cos \alpha l \quad \text{a} \quad \sinh \dot{\gamma} l \rightarrow j \sin \alpha l,$$

čím sa výpočet týchto veličín značne zjednoduší.

Príklady riešenia úloh:

Uvažujme bezstratové homogénne dlhé vedenie s primárnymi parametrami $L_0 = 3 \text{ mH/km}$, $C_0 = 3 \text{ nF/km}$ a dĺžkou $l = 100 \text{ km}$.

4.10.

Pre uvažované vedenie vypočítajte

1. sekundárne parametre \dot{Z}_v a $\dot{\gamma}$ vedenia, koeficient tlmenia β a koeficient fázy α ,
2. vlnovú dĺžku λ vln napätia a prúdu na tomto vedení,
3. fázovú rýchlosť v šírenia sa vln napätia a prúdu na tomto vedení

ak na vstup tohto vedenia je pripojený zdroj napätia $u_1(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(1000t + 30^\circ)$ V .

Riešenie:

4.10.1.

Sekundárne parametre bezstratového vedenia sú:

$$\dot{Z}_v = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-9}}} = 1000 \Omega ;$$

$$\dot{\gamma} = j\omega\sqrt{L_0 C_0} = j10^3 \sqrt{4 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-9}} = j4 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1} \Rightarrow \alpha = 4 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}, \beta = 0.$$

4.10.1. $\dot{Z}_v = 1000 \Omega, \quad \dot{\gamma} = j4 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}, \quad \alpha = 4 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}, \quad \beta = 0$

4.10.2.

$$v = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{10^3}{4 \cdot 10^{-3}} = 2,5 \cdot 10^5 \text{ km/s} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

4.10.2. $v = 2,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$

4.10.3.

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2 \cdot 3,14}{4 \cdot 10^{-3}} = 1,57 \cdot 10^3 \text{ km}.$$

4.10.3. $\lambda = 1,57 \cdot 10^3 \text{ km}.$

4.11.

Pre uvedené bezstratové dlhé vedenie vypočítajte

1. napätie $u_2(t)$ na konci vedenia,
2. prúd $i_2(t)$ na konci vedenia,
3. prúd $i_1(t)$ na začiatku vedenia

ak napätie na vstupe vedenia je $u_1(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(1000t + 30^\circ)$ V a impedancia záťaže $\dot{Z}_2 = 200 \Omega$.

Riešenie:

Pretože máme definovaný výstup (koniec) vedenia ($\dot{Z}_2 = 200 \Omega$) použijeme podmienkové rovnice (1.1) a (1.2) pre napätie a prúd na vstupe vedenia, určené pomocou výstupných hodnôt, pričom nahradíme

$$\cosh \dot{\gamma} l \rightarrow \cos \alpha l \quad \text{a} \quad \sinh \dot{\gamma} l \rightarrow j \sin \alpha l.$$

Bude teda

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cos \alpha l + j \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sin \alpha l,$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cos \alpha l + j \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sin \alpha l.$$

4.11.1.

Z prvej rovnice vyjadríme:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cos \alpha l + j \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sin \alpha l = \dot{U}_2 \cos \alpha l + j \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} \dot{Z}_v \sin \alpha l = \dot{U}_2 \left(\cos \alpha l + j \frac{\dot{Z}_v}{\dot{Z}_2} \sin \alpha l \right) \Rightarrow$$

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\cos \alpha l + j \frac{\dot{Z}_v}{\dot{Z}_2} \sin \alpha l},$$

kde $\dot{U}_1 = 10 e^{j30^\circ}$ V, $\dot{Z}_2 = 200 \Omega$,

$$\dot{Z}_v = 1000 \Omega, \quad \alpha = 4 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1} \quad (\text{úloha 4.10.1}),$$

Potom

$$\alpha l = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,4, \quad \cos \alpha l = 0,921 \quad \text{a} \quad \sin \alpha l = 0,389.$$

Máme teda:

$$\dot{U}_2 = \frac{10 e^{j30^\circ}}{0,921 + j \frac{1000}{200} 0,389} = \frac{10 e^{j30^\circ}}{0,921 + j1,945} = \frac{10 e^{j30^\circ}}{2,15 e^{j64,7^\circ}} = 4,65 e^{-j34,7^\circ} \text{ V}.$$

$$4.11.1. \quad u_2(t) = 6,56 \sin(1000t - 34,7^\circ) \text{ V}.$$

4.11.2.

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} = \frac{4,65 e^{-j34,7^\circ}}{200} = 23,25 \cdot 10^{-3} e^{-j34,7^\circ} \text{ A}.$$

$$4.11.2. \quad i_2(t) = 32,9 \sin(1000t - 34,7^\circ) \text{ mA}.$$

4.11.3.

Z druhej rovnice vyjadríme:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cos \alpha l + j \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sin \alpha l = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} \cos \alpha l + j \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sin \alpha l = \dot{U}_2 \left(\frac{1}{\dot{Z}_2} \cos \alpha l + j \frac{1}{\dot{Z}_v} \sin \alpha l \right),$$

$$\text{kde} \quad \dot{Z}_2 = 200 \Omega, \quad \dot{Z}_v = 1000 \Omega \quad (\text{úloha 4.10.1}), \\ \cos \alpha l = 0,921 \quad \text{a} \quad \sin \alpha l = 0,389 \quad (\text{úloha 4.11.1}).$$

Potom

$$\dot{I}_1 = 4,64 e^{-j34,7^\circ} \left(\frac{0,921}{200} + j \frac{0,389}{1000} \right) = 4,64 e^{-j34,7^\circ} (4,6 \cdot 10^{-3} + j0,39 \cdot 10^{-3}) = \\ = 4,64 e^{-j34,7^\circ} \cdot 4,62 \cdot 10^{-3} e^{j4,7^\circ} = 21,43 \cdot 10^{-3} e^{-j30^\circ} \text{ A}.$$

$$4.11.3. \quad i_1(t) = 30,3 \sin(1000t - 30^\circ) \text{ mA}.$$

4.12.

Pre uvedené dlhé vedenie ďalej vypočítajte

1. fázor napätia v polovici vedenia $\dot{U}(l/2)$,
2. fázor prúdu v polovici vedenia $\dot{I}(l/2)$,
3. koeficient odrazu vlny napätia v polovici vedenia $\dot{r}_u(l/2)$.

ak napätie na vstupe vedenia je $u_1(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(1000t + 30^\circ) \text{ V}$ a impedancia záťaže $\dot{Z}_2 = 200 \Omega$.

Riešenie:

Pre napätie a prúd v polovici bezstratového vedenia platí:

$$\dot{U}(x=l/2) = \dot{U}_1 \cos \alpha l/2 - j \dot{I}_1 \dot{Z}_v \sin \alpha l/2 = \dot{U}_2 \cos \alpha l/2 + j \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sin \alpha l/2,$$

$$\dot{I}(x=l/2) = \dot{I}_1 \cos \alpha l/2 - j \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_v} \sin \alpha l/2 = \dot{I}_2 \cos \alpha l/2 + j \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sin \alpha l/2.$$

Aj v tomto prípade máme definovaný výstup vedenia ($\dot{Z}_2 = 200 \Omega$), preto použijeme podmienkové rovnice pre napätie a prúd v polovici vedenia určené pomocou výstupných hodnôt, ktoré pre bezstratové vedenie upravíme:

$$\dot{U}(l/2) = \dot{U}_2 \cos \alpha l/2 + j \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sin \alpha l/2 \quad (1)$$

$$\dot{I}(l/2) = \dot{I}_2 \cos \alpha l/2 + j \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sin \alpha l/2 \quad (2)$$

4.12.1.

Z rovnice (1) dostaneme:

$$\begin{aligned}\dot{U}(l/2) &= \dot{U}_2 \cos \alpha l/2 + j \dot{Z}_v \dot{Z}_2 \sin \alpha l/2 = \dot{U}_2 \cos \alpha l/2 + j \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} \dot{Z}_v \sin \alpha l/2 = \\ &= \dot{U}_2 \left(\cos \alpha l/2 + j \frac{\dot{Z}_v}{\dot{Z}_2} \sin \alpha l/2 \right).\end{aligned}$$

kde $\dot{Z}_v = 1000 \Omega$ (úloha 4.10.1),

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\cos \alpha l + j \frac{\dot{Z}_v}{\dot{Z}_2} \sin \alpha l} = 4,65 e^{-j34,7^\circ} \text{ V (úloha 4.11.1).}$$

Určíme $\cos \alpha l/2$ a $\sin \alpha l/2$:

$$\alpha l/2 = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 50 = 0,2 \quad \text{a} \quad \cos \alpha l/2 = 0,98, \quad \sin \alpha l/2 = 0,199.$$

Potom

$$\begin{aligned}\dot{U}(l/2) &= 4,65 e^{-j34,7^\circ} \left(0,98 + j \frac{1000}{200} 0,199 \right) = \\ &= 4,65 e^{-j30,7^\circ} (0,98 + j0,993) = 4,65 e^{-j30,7^\circ} \cdot 1,395 e^{j45,4^\circ} = 6,49 e^{j14,7^\circ} \text{ V}.\end{aligned}$$

$$\mathbf{4.12.1. \dot{U}(l/2) = 6,49 e^{j14,7^\circ} \text{ V} .}$$

4.12.2.

Z rovnice (2) dostaneme:

$$\begin{aligned}\dot{I}(l/2) &= \dot{I}_2 \cos \alpha l/2 + j \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sin \alpha l/2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} \cos \alpha l/2 + j \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sin \alpha l/2 = \\ &= \dot{U}_2 \left(\frac{1}{\dot{Z}_2} \cos \alpha l/2 + j \frac{1}{\dot{Z}_v} \sin \alpha l/2 \right),\end{aligned}$$

kde $\dot{Z}_2 = 200 \Omega$, $\dot{Z}_v = 1000 \Omega$ (úloha 4.10.1);

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\cos \alpha l + j \frac{\dot{Z}_v}{\dot{Z}_2} \sin \alpha l} = 4,65 e^{-j34,7^\circ} \text{ V (úloha 4.11.1);}$$

$$\cos \alpha l/2 = 0,98, \quad \sin \alpha l/2 = 0,199 \quad (\text{úloha 4.11.1}).$$

$$\begin{aligned}\text{Potom } \dot{I}(l/2) &= 4,64 e^{-j34,7^\circ} \left(\frac{0,98}{200} + j \frac{0,199}{1000} \right) = 3,57 e^{-j5,8^\circ} \left(4,87 \cdot 10^{-3} e^{j1,9^\circ} + 0,398 \cdot 10^{-3} e^{j83,6^\circ} \right) = \\ &= 4,64 e^{-j34,7^\circ} (4,9 \cdot 10^{-3} + j0,199 \cdot 10^{-3}) = 4,64 e^{-j34,7^\circ} \cdot 4,9 \cdot 10^{-3} e^{j2,3^\circ} = 22,74 \cdot 10^{-3} e^{-j32,4^\circ} \text{ A} .\end{aligned}$$

$$\mathbf{4.12.2. \dot{I}(l/2) = 22,74 e^{-j32,4^\circ} \text{ mA} .}$$

4.12.3.

Koeficient odrazu vlny napätia v mieste x bezstratového vedenia je

$$\dot{r}_u(x) = \dot{r}_u(l) e^{-2j\alpha(l-x)} = \frac{\dot{Z}_2 - \dot{Z}_v}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_v} e^{-2j\alpha(l-x)}$$

a pre $x = l/2$ bude:

$$\dot{r}_u(l/2) = \dot{r}_u(l) e^{-2j\alpha l/2} = \frac{\dot{Z}_2 - \dot{Z}_v}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_v} e^{-j\alpha l} = \frac{\dot{Z}_2 - \dot{Z}_v}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_v} e^{-j\alpha l},$$

kde $\dot{Z}_2 = 200 \Omega$, $\dot{Z}_v = 1000 \Omega$ (úloha 4.10.1), $\alpha l = 0,4$ (úloha 4.11.1).

Potom

$$\dot{i}_u(l/2) = \frac{200 - 1000}{200 + 1000} e^{-j0,4} = -0,66 e^{-j22,9^\circ}$$

4.12.3. $\dot{i}_u(l/2) = -0,66 e^{-j22,9^\circ}$.

B. Dlhé vedenie bez skreslenia

Pre primárne parametre dlhého vedenia bez skreslenia platí

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0} = k.$$

Sekundárne parametre bezstratového vedenia potom budú:

$$\dot{Z}_v = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0(k + j\omega)}{C_0(k + j\omega)}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}},$$

teda vlnová impedancia vedenia bez skreslenia má rýdzo ohmický charakter;

$$\dot{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{L_0(k + j\omega)C_0(k + j\omega)} = (k + j\omega)\sqrt{L_0C_0} = k\sqrt{L_0C_0} + j\omega\sqrt{L_0C_0}$$

$$\beta = k\sqrt{L_0C_0}, \quad \alpha = \omega\sqrt{L_0C_0}.$$

Príklady riešenia úloh:

Uvažujme homogénne dlhé vedenie bez skreslenia s primárnymi parametrami $R_0 = 3 \Omega/\text{km}$, $L_0 = 6 \text{ mH}/\text{km}$, $G_0 = 10^{-6} \text{ S}/\text{km}$ a dĺžkou $l = 100 \text{ km}$.

4.13.

Pre uvažované vedenie vypočítajte

1. sekundárne parametre \dot{Z}_v a $\dot{\gamma}$ vedenia, koeficient tlmenia β a koeficient fázy α ,
2. vlnovú dĺžku λ vln napätia a prúdu na tomto vedení,
3. fázovú rýchlosť v šírenia sa vln napätia a prúdu na tomto vedení

ak na vstup tohto vedenia je pripojený zdroj napätia $u_1(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(1000t + 30^\circ) \text{ V}$.

Riešenie:

4.13.1.

Sekundárne parametre vedenia bez skreslenia sú:

$$\dot{Z}_v = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}},$$

kde $L_0 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ H}/\text{km}$ a C_0 určíme:

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0} = k \Rightarrow \frac{G_0}{C_0} = k \Rightarrow C_0 = \frac{G_0}{k}, \text{ kde } k = \frac{R_0}{L_0} \text{ a } R_0 = 3 \Omega/\text{km}.$$

Potom

$$k = \frac{3}{6 \cdot 10^{-3}} = 500, \quad C_0 = \frac{10^{-6}}{0,5 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ F}/\text{km} \text{ a } \dot{Z}_v = \sqrt{\frac{6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-9}}} = 1732 \Omega.$$

$$\dot{\gamma} = (k + j\omega)\sqrt{L_0C_0} = (0,5 \cdot 10^3 + j10^3)\sqrt{3 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-9}} = 1,12 \cdot 10^3 e^{j63,4^\circ} \cdot 2,45 \cdot 10^{-6} = 2,74 \cdot 10^{-3} e^{j63,4^\circ} \text{ km}^{-1}$$

$$\beta = 0,5 \cdot 10^3 \sqrt{6 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-9}} = 1,73 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}, \quad \alpha = 10^3 \sqrt{6 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-9}} = 3,46 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}.$$

$$4.13.1. \dot{Z}_v = 1732 \Omega, \quad \dot{\gamma} = 2,74 \cdot 10^{-3} e^{j63,40} \text{ km}^{-1}, \quad \beta = 1,73 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}, \quad \alpha = 3,46 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}.$$

4.13.2.

$$v = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{10^3}{3,46 \cdot 10^{-3}} = 0,289 \cdot 10^6 \text{ km/s} = 2,89 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

$$4.13.2. v = 1,9 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

4.13.3.

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2,3,14}{3,46 \cdot 10^{-3}} = 1,8 \cdot 10^3 \text{ km}.$$

$$4.13.3. \lambda = 1,8 \cdot 10^3 \text{ km}.$$

4.14.

Pre uvedené dlhé vedenie vypočítajte

1. napätie $u_2(t)$ na konci vedenia,
2. prúd $i_2(t)$ na konci vedenia,
3. prúd $i_1(t)$ na začiatku vedenia

ak napätie na vstupe vedenia je $u_1(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(1000t + 30^\circ)$ V a impedancia záťaže $Z_2 = 200 \Omega$.

Riešenie:

Pre popis vedenia použijeme podmienkové rovnice (1.1) a (1.2) pre napätie a prúd na vstupe vedenia, určené pomocou výstupných hodnôt:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma}l + \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma}l,$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma}l + \frac{\dot{U}_2}{Z_v} \sinh \dot{\gamma}l.$$

4.14.1.

Z prvej rovnice vyjadríme:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma}l + \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma}l = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma}l + \frac{\dot{U}_2}{Z_2} \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma}l = \dot{U}_2 \left(\cosh \dot{\gamma}l + \frac{\dot{Z}_v}{Z_2} \sinh \dot{\gamma}l \right) \Rightarrow$$

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\cosh \dot{\gamma}l + \frac{\dot{Z}_v}{Z_2} \sinh \dot{\gamma}l},$$

$$\text{kde } \dot{U}_1 = 10 e^{j30^\circ} \text{ V}, \quad \dot{Z}_2 = 200 \Omega,$$

$$\dot{Z}_v = 1732 \Omega \text{ (úloha 4.13.1),}$$

$$\dot{\gamma} = 2,74 \cdot 10^{-3} e^{j63,40} \text{ km}^{-1}, \quad \beta = 1,73 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}, \quad \alpha = 3,46 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1} \text{ (úloha 4.13.1).}$$

Potom

$$\beta l = 1,73 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,173, \quad \alpha l = 3,46 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,346$$

a

$$\begin{aligned} \cosh \dot{\gamma}l &= \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma}l} + e^{-\dot{\gamma}l}) = \frac{1}{2} (e^{(\beta+j\alpha)l} + e^{-(\beta+j\alpha)l}) = \frac{1}{2} (e^{\beta l} e^{j\alpha l} + e^{-\beta l} e^{-j\alpha l}) = \\ &= \frac{1}{2} [e^{\beta l} (\cos \alpha l + j \sin \alpha l) + e^{-\beta l} (\cos \alpha l - j \sin \alpha l)] = \\ &= \frac{1}{2} [e^{0,173} (\cos 0,346 + j \sin 0,346) + e^{-0,173} (\cos 0,346 - j \sin 0,346)] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} [1,189(0,941 + j0,339) + 0,841(0,941 - j0,339)] =$$

$$= \frac{1}{2} (1,119 + j0,403 + 0,791 - j0,285) = \frac{1}{2} (1,404 + j0,118) = 0,7 e^{j4,8^\circ};$$

$$\sinh \dot{\gamma} l = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l} - e^{-\dot{\gamma} l}) = \frac{1}{2} (1,119 + j0,403 - 0,791 + j0,285) = \frac{1}{2} (0,328 + j0,688) = 0,38 e^{j64,5^\circ}.$$

Máme teda:

$$\dot{U}_2 = \frac{10 e^{j30^\circ}}{0,7 e^{j4,8^\circ} + \frac{1732}{200} 0,38 e^{j64,5^\circ}} = \frac{10 e^{j30^\circ}}{0,7 e^{j4,8^\circ} + 3,29 e^{j64,5^\circ}} = 2,7 e^{-j25^\circ} \text{ V}.$$

4.14.1. $u_2(t) = 3,8 \sin(1000t - 25^\circ) \text{ V}.$

4.14.2.

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} = \frac{2,7 e^{-j25^\circ}}{200} = 13,5 \cdot 10^{-3} e^{-j25^\circ} \text{ A}.$$

4.14.2. $i_2(t) = 19,1 \sin(1000t - 25^\circ) \text{ mA}.$

4.14.3.

Z druhej rovnice vyjadříme:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma} l + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} \cosh \dot{\gamma} l + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l = \dot{U}_2 \left(\frac{1}{\dot{Z}_2} \cosh \dot{\gamma} l + \frac{1}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l \right),$$

kde $\dot{Z}_2 = 200 \Omega$, $\dot{Z}_v = 1732 \Omega$ (úloha 4.13.1),

$$\cosh \dot{\gamma} l = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l} + e^{-\dot{\gamma} l}) = 0,7 e^{j4,8^\circ} \quad \text{a} \quad \sinh \dot{\gamma} l = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l} - e^{-\dot{\gamma} l}) = 0,38 e^{j64,5^\circ} \quad (\text{úloha 4.14.1}).$$

Potom

$$\dot{I}_1 = 2,7 e^{-j25^\circ} \left(\frac{0,7 e^{j4,8^\circ}}{200} + \frac{0,38 e^{j64,5^\circ}}{1732} \right) = 2,7 e^{-j25^\circ} (3,5 \cdot 10^{-3} e^{j4,8^\circ} + 0,22 \cdot 10^{-3} e^{j64,5^\circ}) =$$

$$= 2,7 e^{-j25^\circ} 10^{-3} (3,488 + j0,293 + 0,095 + j0,199) = 2,7 e^{-j25^\circ} 10^{-3} (3,583 + j0,492) =$$

$$= 2,7 e^{-j25^\circ} 10^{-3} 3,62 e^{j7,8^\circ} = 9,8 \cdot 10^{-3} e^{-j17,2^\circ} \text{ A}.$$

4.14.3. $i_1(t) = 13,86 \sin(1000t - 17,2^\circ) \text{ mA}.$

4.15.

Pre uvedené dlhé vedenie ďalej vypočítajte

1. fázor napätia v polovici vedenia $\dot{U}(l/2)$,
2. fázor prúdu v polovici vedenia $\dot{I}(l/2)$,
3. koeficient odrazu vlny napätia v polovici vedenia $\dot{r}_u(l/2)$.

ak napätie na vstupe vedenia je $u_1(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(1000t + 30^\circ) \text{ V}$ a impedancia záťaže $\dot{Z}_2 = 200 \Omega$.

Riešenie:

Pre napätie a prúd v polovici vedenia platí:

$$\dot{U}(x=l/2) = \dot{U}_1 \cosh \dot{\gamma} l/2 - \dot{I}_1 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l/2 = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma} l/2 + \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l/2,$$

$$\dot{I}(x=l/2) = \dot{I}_1 \cosh \dot{\gamma} l/2 - \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l/2 = \dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma} l/2 + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l/2.$$

Pre popis použijeme podmienkové rovnice pre napätie a prúd v polovici vedenia určené pomocou výstupných hodnôt:

$$\dot{U}(l/2) = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma} l/2 + \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l/2 \quad (1)$$

$$\dot{I}(l/2) = \dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma} l/2 + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l/2 \quad (2)$$

4.15.1.

Z rovnice (1) dostaneme:

$$\begin{aligned} \dot{U}(l/2) &= \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma} l/2 + \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l/2 = \dot{U}_2 \cosh \dot{\gamma} l/2 + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l/2 = \\ &= \dot{U}_2 \left(\cosh \dot{\gamma} l/2 + \frac{\dot{Z}_v}{\dot{Z}_2} \sinh \dot{\gamma} l/2 \right). \end{aligned}$$

kde $\dot{Z}_v = 1732 \Omega$ (úloha 4.13.1),

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\cosh \dot{\gamma} l + \frac{\dot{Z}_v}{\dot{Z}_2} \sinh \dot{\gamma} l} = 2,7 e^{-j25^\circ} \text{ V (úloha 4.14.1).}$$

Určíme $\cosh \dot{\gamma} l/2$ a $\sinh \dot{\gamma} l/2$:

$$\beta l/2 = 1,73 \cdot 10^{-3} \cdot 50 = 0,0865 \quad \text{a} \quad \alpha l/2 = 3,46 \cdot 10^{-3} \cdot 50 = 0,173,$$

$$\begin{aligned} \cosh \dot{\gamma} l/2 &= \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l/2} + e^{-\dot{\gamma} l/2}) = \frac{1}{2} [e^{\beta l/2} (\cos \alpha l/2 + j \sin \alpha l/2) + e^{-\beta l/2} (\cos \alpha l/2 - j \sin \alpha l/2)] = \\ &= \frac{1}{2} [e^{0,0865} (\cos 0,173 + j \sin 0,173) + e^{-0,0865} (\cos 0,173 - j \sin 0,173)] = \\ &= \frac{1}{2} [1,09(0,985 + j0,172) + 0,917(0,985 - j0,172)] = \\ &= \frac{1}{2} (1,074 + j0,187 + 0,903 - j0,158) = 0,99 e^{j0,8^\circ}; \end{aligned}$$

$$\sinh \dot{\gamma} l/2 = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l/2} - e^{-\dot{\gamma} l/2}) = \frac{1}{2} (1,074 + j0,187 - 0,903 + j0,158) = 0,193 e^{j63,6^\circ}.$$

Potom

$$\begin{aligned} \dot{U}(l/2) &= 2,7 e^{-j25^\circ} \left(0,99 e^{j0,8^\circ} + \frac{1732}{200} 0,193 e^{j63,6^\circ} \right) = \\ &= 2,7 e^{-j25^\circ} (0,99 e^{j0,8^\circ} + 1,67 e^{j63,6^\circ}) = 6,2 e^{j16,1^\circ} \text{ V}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{4.15.1. \dot{U}(l/2) = 6,2 e^{j16,1^\circ} \text{ V} .}$$

4.15.2.

Z rovnice (2) dostaneme:

$$\begin{aligned} \dot{I}(l/2) &= \dot{I}_2 \cosh \dot{\gamma} l/2 + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l/2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} \cosh \dot{\gamma} l/2 + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l/2 = \\ &= \dot{U}_2 \left(\frac{1}{\dot{Z}_2} \cosh \dot{\gamma} l/2 + \frac{1}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l/2 \right), \end{aligned}$$

kde $\dot{Z}_2 = 200 \Omega$, $\dot{Z}_v = 1732 \Omega$ (úloha 4.13.1),

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\cosh \dot{\gamma} l + \frac{\dot{Z}_v}{\dot{Z}_2} \sinh \dot{\gamma} l} = 2,7 e^{-j25^\circ} \text{ V (úloha 4.14.1);}$$

$$\cosh \dot{\gamma} l/2 = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l/2} + e^{-\dot{\gamma} l/2}) = 0,99 e^{j0,8^0},$$

$$\sinh \dot{\gamma} l/2 = \frac{1}{2} (e^{\dot{\gamma} l/2} - e^{-\dot{\gamma} l/2}) = 0,193 e^{j63,6^0} \text{ (úloha 4.15.1).}$$

Potom

$$\begin{aligned} \dot{I}(l/2) &= 2,7 e^{-j25^0} \left(\frac{0,99 e^{j0,8^0}}{200} + \frac{0,193 e^{j63,6^0}}{1732} \right) = 2,7 e^{-j25^0} (4,95 \cdot 10^{-3} e^{j0,8^0} + 0,111 \cdot 10^{-3} e^{j63,6^0}) = \\ &= 13,5 \cdot 10^{-3} e^{-j23,1^0} \text{ A.} \end{aligned}$$

$$4.15.2. \dot{I}(l/2) = 19,1 e^{-j23,1^0} \text{ mA.}$$

4.15.3.

Koeficient odrazu vlny napätia v mieste x vedenia je

$$\dot{r}_u(x) = \dot{r}_u(l) e^{-2\dot{\gamma}(l-x)} = \frac{\dot{Z}_2 - \dot{Z}_v}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_v} e^{-2\dot{\gamma}(l-x)}$$

a pre $x = l/2$ bude:

$$\dot{r}_u(l/2) = \dot{r}_u(l) e^{-2\dot{\gamma}l/2} = \frac{\dot{Z}_2 - \dot{Z}_v}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_v} e^{-\dot{\gamma}l/\dot{\gamma}} = \frac{\dot{Z}_2 - \dot{Z}_v}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_v} e^{-\beta l} e^{-j\alpha l},$$

kde $\dot{Z}_2 = 200 \Omega$, $\dot{Z}_v = 1732 \Omega$ (úloha 4.13.1),

$\beta l = 0,173$ a $\alpha l = 0,346$ (úloha 4.14.1).

Potom

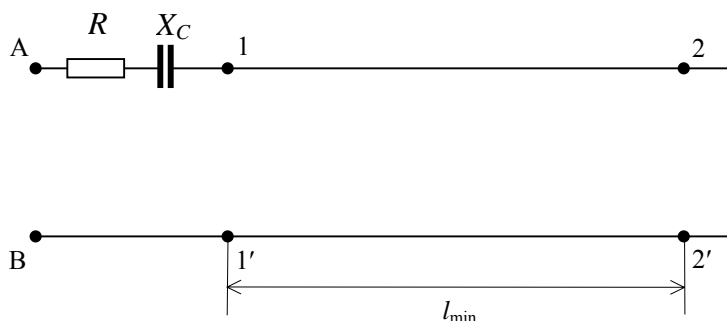
$$\dot{r}_u(l/2) = \frac{200 - 1732}{200 + 1732} e^{-0,173} e^{-j0,346} = 0,667 e^{-j19,8^0}$$

$$4.15.3. \dot{r}_u(l/2) = 0,667 e^{-j19,8^0}.$$

4.4. ZLOŽITEJŠIE ÚLOHY

4.16.

Na vstup homogénneho dlhého, na konci skratovaného vedenia pripojíme štvorpól podľa obr. 4.6., kde $R = 50 \Omega$ a $X_C = 5 \Omega$. Určte minimálnu dĺžku vedenia pri ktorej nastane na vstupe vedenia rezonancia, ak primárne parametre vedenia sú $L_0 = 12,5 \text{ mH/km}$, $C_0 = 2 \text{ nF/km}$ a uhlová frekvencia časových zmien zdroja je $\omega = 2000 \text{ Hz}$.



Obr.4.6

Rezonancia na vstupe nastane, ak imaginárna časť impedancie na vstupe vedenia bude nulová:

$$\text{Im}[\dot{Z}_{AB}] = 0.$$

Impedancia \dot{Z}_{AB} na vstupe vedenia je

$$\dot{Z}_{AB} = \dot{Z} + \dot{Z}_1,$$

kde \dot{Z} je impedancia štvorpólu,
 \dot{Z}_1 je vstupná impedancia vedenia.

Impedancia \dot{Z} štvorpólu je

$$\dot{Z} = R - jX_C$$

a vstupná impedancia \dot{Z}_1 bezstratového dlhého vedenia je

$$\dot{Z}_1 = jZ_v \operatorname{tg} \alpha l.$$

Potom

$$\dot{Z}_{AB} = R - jX_C + jZ_v \operatorname{tg} \alpha l \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im}[\dot{Z}_{AB}] = -X_C + Z_v \operatorname{tg} \alpha l.$$

Pre rezonanciu na vstupe vedenia potom bude

$$-X_C + Z_v \operatorname{tg} \alpha l_{\min} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha l_{\min} = \frac{X_C}{Z_v},$$

$$\alpha l_{\min} = \operatorname{arctg} \frac{X_C}{Z_v} \quad \text{a} \quad l_{\min} = \left(\operatorname{arctg} \frac{X_C}{Z_v} \right) / \alpha.$$

Potom

$$Z_v = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{12,5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-9}}} = 2500 \, \Omega, \quad \operatorname{arctg} \frac{X_C}{Z_v} = \operatorname{arctg} \frac{5}{2500} = \operatorname{arctg} 0,002 = 2 \cdot 10^{-3},$$

$$\alpha = \omega \sqrt{L_0 C_0} = 2 \cdot 10^3 \sqrt{12,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-9}} = 10^{-2} \operatorname{km}^{-1},$$

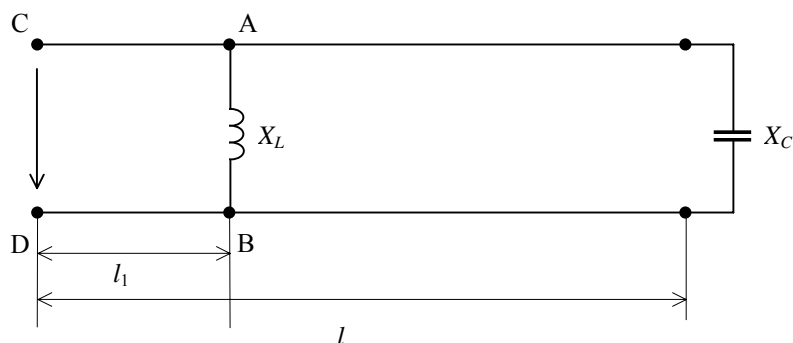
takže

$$l_{\min} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}} = 0,2 \operatorname{km}.$$

4.17

Vypočítajte impedancie \dot{Z}_{AB} a \dot{Z}_{CD} v obvode podľa obr. 4.7, ak primárne parametre homogénneho dlhého vedenia sú $L_0 = 3,5 \operatorname{mH}/\operatorname{km}$, $C_0 = 3,5 \operatorname{nF}/\operatorname{km}$, $l = 400 \operatorname{km}$, $l_1 = 100 \operatorname{km}$, na vstup vedenia je pripojené napätie $u_1(t) = \sqrt{2} \cdot 200 \cos(1000t - 45^\circ) \operatorname{V}$ a $X_L = 100 \, \Omega$, $X_C = 200 \, \Omega$.

Pri riešení tejto úlohy musíme vedenie rozdeliť na dve časti podľa obr. 4.8. Potom bude



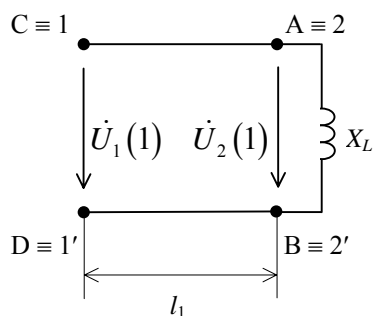
Obr.4.7

$$\dot{Z}_{AB} = \frac{\dot{Z}_1(2) X_L e^{j90^\circ}}{\dot{Z}_1(2) + X_L e^{j90^\circ}} \quad \text{a} \quad \dot{Z}_{CD} = \dot{Z}_1(1),$$

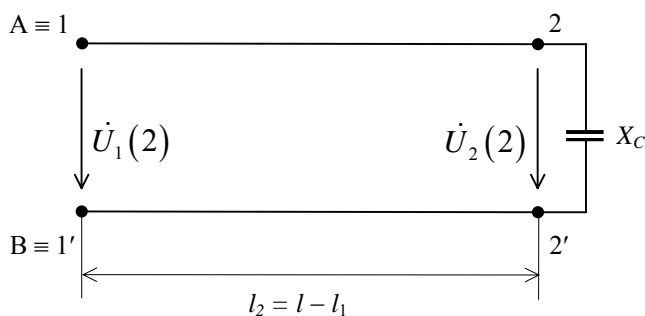
kde $\dot{Z}_1(1)$ je vstupná impedancia prvej časti vedenia,

$\dot{Z}_1(2)$ je vstupná impedancia druhej časti vedenia,

Prvá časť vedenia



Druhá časť vedenia



Obr. 4.8

pričom

$$\dot{Z}_1(1) = \frac{\dot{U}_1(1)}{\dot{I}_1(1)}, \quad \dot{Z}_1(2) = \frac{\dot{U}_1(2)}{\dot{I}_1(2)},$$

kde $\dot{U}_2(1)$ je napätie na výstupe prvej časti vedenia, $\dot{U}_1(2)$ je napätie na vstupe druhej časti vedenia

a teda je

$$\dot{U}_2(1) = \dot{U}_1(2).$$

Potom

$$\dot{Z}_1(1) = \frac{\dot{U}_1(1)}{\dot{I}_1(1)} = \frac{\dot{U}_2(1) \cosh \dot{\gamma} l_1 + \dot{I}_2(1) \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l_1}{\dot{I}_2(1) \cosh \dot{\gamma} l_1 + \frac{\dot{U}_2(1)}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l_1},$$

$$\dot{Z}_1(2) = \frac{\dot{U}_2(1)}{\dot{I}_1(2)} = \frac{\dot{U}_2(1)}{\dot{I}_2(2) \cosh \dot{\gamma} l_2 + \frac{\dot{U}_2(2)}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l_2}.$$

Určíme najprv napätie na výstupe prvej časti vedenia $\dot{U}_2(1)$:

Rovnica

$$\dot{U}_1(1) = \dot{U}_2(1) \cosh \dot{\gamma} l_1 + \dot{I}_2(1) \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l_1$$

pre bezstratové vedenie má tvar

$$\dot{U}_1(1) = \dot{U}_2(1) \cos \alpha l_1 + j \dot{I}_2(1) \dot{Z}_v \sin \alpha l_1$$

a túto rovnicu upravíme

$$\dot{U}_1(1) = \dot{U}_2(1) \cos \alpha l_1 + j \frac{\dot{U}_2(1)}{\dot{Z}_2} \dot{Z}_v \sin \alpha l_1 = \dot{U}_2(1) \left(\cos \alpha l_1 + j \frac{\dot{Z}_v}{\dot{Z}_2} \sin \alpha l_1 \right) \Rightarrow$$

$$\dot{U}_2(1) = \frac{\dot{U}_1(1)}{\cos \alpha l_1 + j \frac{\dot{Z}_v}{\dot{Z}_2} \sin \alpha l_1}$$

kde $\dot{U}_1(1) = \dot{U}_1 = 200 e^{-j45^\circ} \text{ V}$, $\dot{Z}_2 = jX_L = j100$,

$$\alpha = \omega \sqrt{L_0 C_0} = 10^3 \sqrt{3,5 \cdot 10^{-3} \cdot 3,5 \cdot 10^{-9}} = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1} \Rightarrow \alpha l_1 = 3,5 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,35,$$

$$\dot{Z}_v = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{3,5 \cdot 10^{-9}}} = 1000 \Omega.$$

Potom

$$\dot{U}_2(1) = \frac{200 e^{-j45^\circ}}{\cos 0,35 + j \frac{1000}{j100} \sin 0,35} = \frac{200 e^{-j45^\circ}}{\cos 0,35 + 10 \sin 0,35} = \frac{200 e^{-j45^\circ}}{4,37} = 45,78 e^{-j45^\circ} \text{ V} .$$

Ďalej určíme vstupnú impedanciu druhej časti vedenia $\dot{Z}_1(2)$:

$$\dot{Z}_1(2) = \frac{\dot{U}_2(1)}{\dot{I}_1(2)} \quad \text{kde} \quad \dot{U}_2(1) = 45,78 e^{-j45^\circ} \text{ V} ,$$

$$\dot{I}_1(2) = \dot{I}_2(2) \cos \alpha l_2 + j \frac{\dot{U}_2(2)}{\dot{Z}_v} \sinh \alpha l_2 .$$

V rovnici pre prúd na začiatku druhej časti vedenia $\dot{I}_2(2)$ je

$$\dot{I}_2(2) = \frac{\dot{U}_2(2)}{\dot{Z}_2}$$

a napätie na výstupe druhej časti vedenia $\dot{U}_2(2)$ určíme z rovnice

$$\dot{U}_1(2) = \dot{U}_2(2) \cos \alpha l_2 + j \dot{I}_2 \dot{Z}_v \sin \alpha l_2 ,$$

ktorú opäť upravíme

$$\dot{U}_1(2) = \dot{U}_2(2) \cos \alpha l_2 + j \frac{\dot{U}_2(2)}{\dot{Z}_2} \dot{Z}_v \sin \alpha l_2 = \dot{U}_2(2) \left(\cos \alpha l_2 + j \frac{\dot{Z}_v}{\dot{Z}_2} \sin \alpha l_2 \right) ,$$

$$\text{pričom} \quad \alpha l_2 = \alpha (l - l_1) = 3,5 \cdot 10^{-3} \cdot 300 = 1,05 ,$$

$$\dot{Z}_2 = -j200 \Omega .$$

Potom

$$\dot{U}_2(2) = \frac{\dot{U}_1(2)}{\cos \alpha l_2 + j \frac{\dot{Z}_v}{\dot{Z}_2} \sin \alpha l_2} = \frac{45,78 e^{-j45^\circ}}{\cos 1,05 + j \frac{1000}{-j200}} = \frac{45,78 e^{-j45^\circ}}{0,498 - 4,337} = 11,92 e^{j135^\circ} \text{ V}$$

a

$$\dot{I}_2(2) = \frac{\dot{U}_2(2)}{\dot{Z}_2} = \frac{11,92 e^{j135^\circ}}{200 e^{-j90^\circ}} = 59,6 \cdot 10^{-3} e^{-j135^\circ} \text{ A} .$$

Potom

$$\begin{aligned} \dot{I}_1(2) &= \dot{I}_2(2) \cos \alpha l_2 + j \frac{\dot{U}_2(2)}{\dot{Z}_v} \sin \alpha l_2 = 59,6 \cdot 10^{-3} e^{-j135^\circ} \cos 1,04 + j \frac{11,92 e^{j135^\circ}}{1000} \sin 1,04 = \\ &= 20,66 \cdot 10^{-3} e^{-j135^\circ} + 10,34 \cdot 10^{-3} e^{-j135^\circ} = 30,09 \cdot 10^{-3} e^{-j135^\circ} \text{ A} . \end{aligned}$$

Máme teda

$$\dot{Z}_1(2) = \frac{\dot{U}_2(1)}{\dot{I}_1(2)} = \frac{45,78 e^{-j45^\circ}}{30,09 \cdot 10^{-3} e^{-j135^\circ}} = 1479,6 e^{j90^\circ} \Omega$$

a

$$\dot{Z}_{AB} = \frac{\dot{Z}_1(2) X_L e^{j90^\circ}}{\dot{Z}_1(2) + X_L e^{j90^\circ}} = \frac{1479,6 e^{j90^\circ} 100 e^{j90^\circ}}{1479,6 e^{j90^\circ} + 100 e^{j90^\circ}} = \frac{147,96 \cdot 10^3 e^{j180^\circ}}{1579,6 e^{j90^\circ}} = 93,67 e^{j90^\circ} \Omega .$$

Pre impedanciu \dot{Z}_{CD} platí

$$\dot{Z}_{CD} = \dot{Z}_1(1) = \frac{\dot{U}_1(1)}{\dot{I}_1(1)} = \frac{\dot{U}_2(1) \cosh \dot{\gamma} l_1 + \dot{I}_2(1) \dot{Z}_v \sinh \dot{\gamma} l_1}{\dot{I}_2(1) \cosh \dot{\gamma} l_1 + \frac{\dot{U}_2(1)}{\dot{Z}_v} \sinh \dot{\gamma} l_1} ,$$

kde $\dot{U}_2(1) = 45,78 e^{-j45^\circ} \text{ V}$,

$$\dot{I}_2(1) = \frac{\dot{U}_2(1)}{\dot{Z}_2} = \frac{\dot{U}_2(1)}{\dot{Z}_{AB}} = \frac{45,78 e^{-j45^\circ}}{93,67 e^{j90^\circ}} = 0,49 e^{-j135^\circ} \text{ A}, \quad \text{pretože teraz } \dot{Z}_2 = \dot{Z}_{AB}.$$

Potom

$$\dot{Z}_{CD} = \frac{45,78 e^{-j45^\circ}}{0,49 e^{-j135^\circ}} = 93,43 e^{j90^\circ} \Omega.$$